

## Анализ многомерных временных рядов финансовых доходностей: сравнение различных подходов к моделированию тяжелых хвостов

Балаев А.И.

В работе проведено сравнение некоторых известных вероятностных моделей для доходностей основных мировых фондовых индексов и новой вероятностной модели, построенной на основе  $t$ -распределения с вектором степеней свободы. Сравнение проводится в терминах качества внутривыборочной подгонки и предсказательной способности вне выборки при предсказании условной функции плотности в целом. Основное внимание уделяется эффектам, порождаемым формой функций плотности, в особенности многомерным тяжелым хвостам. Рассматриваются, с одной стороны,  $t$ -распределение с вектором и скаляром степеней свободы и, с другой стороны, модификации многомерного нормального распределения, приспособленные для учета тяжелых хвостов: обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье. С помощью теста, основанного на информационном критерии Кульбака – Лейблера, проводится попарное сравнение построенных моделей. Модели упорядочиваются по качеству подгонки и предсказательной способности, и обсуждаются причины превосходства той или иной спецификации функции плотности над другой.

**Ключевые слова:** многомерное распределение доходностей; тяжелые хвосты; информационный критерий Кульбака – Лейблера.

### 1. Введение

Эконометрические модели играют очень большую роль в теории и практике финансовых рынков. Во многих случаях инвестору необходимо знание совместного распределения доходностей имеющихся на рынке активов, условного на доступной к текущему моменту времени информации. Поэтому часто возникает задача построения оценки условной функции плотности для вектора доходностей активов. В частности, решение такой задачи оказывается необходимым для выбора финансового портфеля.

Для оценки условной функции плотности вектора доходностей можно либо исходить из тех или иных параметризаций, либо использовать копулы. В данной статье рас-

---

Балаев Алексей Иванович – аспирант кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. E-mail: a.balaev@gmail.com

Статья поступила в Редакцию в январе 2013 г.

смачивается параметрический подход. Обзор копула-методов дается, например, в работе [9]. В рамках параметрического подхода рассматриваются следующие вопросы: какие параметризации функции плотности следует использовать, какова степень соответствия этих параметризаций данным внутри выборки и насколько хорошо с их помощью предсказывается условное распределение доходностей вне выборки. В данной работе принята попытка, исследуя динамику доходностей основных мировых фондовых индексов за последние несколько лет, дать ответы на эти вопросы.

Одним из важных эмпирических фактов о распределениях финансовых доходностей является наличие у этих распределений тяжелых хвостов. Для совместных распределений доходностей нескольких активов можно говорить о так называемых многомерных тяжелых хвостах. В параметрическом подходе наличие таких хвостов учитывается при выборе параметризации для функции плотности, чему посвящено достаточно много публикаций. Так, в работе [12] предложен класс многомерных непрерывных распределений, известных как  $\mathcal{U}$ -сферические, которые позволяют учитывать наличие многомерных тяжелых хвостов. Тяжелые хвосты способны учитывать также и многомерные устойчивые распределения (см., например, [22]). Однако функцию плотности этих распределений, как правило, нельзя записать в аналитическом виде, и для них известна лишь характеристическая функция, что затрудняет моделирование на практике. Достаточно широкий класс эллиптических функций плотности, позволяющих учитывать многомерные тяжелые хвосты, предложен в работе [8]. Данные функции плотности представляют собой обобщение многомерного асимметричного нормального распределения, введенного в исследовании [7]. Наличие многомерных тяжелых хвостов допускает также распределение Грама – Шарлье, функция плотности которого получается урезанием многомерного разложения Грама – Шарлье после третьего члена. В работе [20] данное распределение применяется при моделировании шоков в двумерных GARCH-моделях.

В статье [14] для учета многомерных тяжелых хвостов предложено использовать многомерное  $t$ -распределение со скалярным параметром степеней свободы. Как показано в работе [1],  $t$ -распределение со скаляром степеней свободы дает хорошие результаты по сравнению с некоторыми другими гибкими параметризациями. Широкий класс многомерных распределений представляют поли  $t$ -распределения, частным случаем которых является многомерное  $t$ -распределение со скаляром степеней свободы. Поли  $t$ -распределения получаются как апостериорные распределения в байесовском анализе и позволяют учитывать наличие тяжелых хвостов. Однако соотношение параметров и моментов поли  $t$ -распределений достаточно сложно. В работе [3] предложено обобщение многомерного  $t$ -распределения со скаляром степеней свободы на случай вектора степеней свободы (см. также: [4; 5; 6]). Это обобщение дает дополнительную гибкость при моделировании, поскольку позволяет задавать разную толщину хвостов распределения доходностей для различных активов.

В настоящей работе проведено сравнение некоторых известных двумерных функций плотности для доходностей основных мировых фондовых индексов и функции плотности  $t$ -распределения с вектором степеней свободы, эмпирические свойства которого ранее не исследовались. Сравнение проводится в терминах качества внутривыборочной подгонки и предсказательной способности вне выборки при предсказании условной функции плотности в целом. Рассматриваются  $t$ -распределение с вектором и скаляром степеней свободы, обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье. Основное вни-

мание уделяется эффектам, порождаемым формой функций плотности, в особенности многомерным тяжелым хвостам. Все модели оцениваются и тестируются на выборках дневных доходностей фондовых индексов различных стран. С помощью теста, основанного на информационном критерии Кульбака – Лейблера (далее – KLIC-теста), проводится попарное сравнение оцененных моделей условной функции плотности внутри и вне выборки. Затем модели упорядочиваются по качеству подгонки и предсказательной способности, и определяется их рейтинг. В работе обсуждаются причины превосходства той или иной спецификации функции плотности над другой внутри или вне выборки.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 описаны использованные данные и проведен некоторый предварительный эмпирический анализ. В разделе 3 приведено описание различных параметризаций условных функций плотности, которые используются для того чтобы учесть так называемые «многомерные тяжелые хвосты» в распределениях векторов доходностей. Раздел 4 посвящен описанию KLIC-теста и результатам сравнения на его основе построенных в работе моделей.

## 2. Данные и предварительный анализ

В этом разделе приведено описание используемых в работе данных и отмечены некоторые их свойства, которые предполагается учесть в разделе 3 при построении условных функций плотности распределения доходностей.

### 2.1. Данные

Используются дневные цены закрытия фондовых индексов различных стран: S&P 500 (США), FTSE 100 (Великобритания), CAC 40 (Франция), DAX (Германия), Hang Seng (Китай), Nikkei 225 (Япония)<sup>1</sup>. Исходные данные по ценам охватывают период с 26 ноября 1990 г. (первый день расчета индекса DAX) по 18 октября 2012 г. Построение моделей и все прочие расчеты в работе проводятся для логарифмических доходностей индексов, т.е. для величин  $r_t = 100 \ln(S_t / S_{t-1})$ , где  $S_t$  – значение фондового индекса в момент времени  $t$ . При этом, для построения многомерных моделей возникла необходимость синхронизировать данные: доходности рассчитаны на основе цен закрытия только в такие дни, когда одновременно торговались все шесть упомянутых фондовых индексов. Соответственно из исходных рядов дневных цен закрытия для каждого из индексов было удалено некоторое количество наблюдений. Поэтому, строго говоря, рассчитанные доходности фондовых индексов соответствуют временным промежуткам различной длины. В табл. 1 приведено распределение длин временных промежутков, соответствующих построенным рядам доходностей.

Наличие двухдневных пропусков (главным образом, это суббота и воскресенье) естественно при работе с дневными доходностями. Потенциально, проблемными могут оказаться доходности за период в три и более дней. Однако, как видно из табл. 1, для рассматриваемых данных такие доходности составляют 8,3% всех наблюдений, что в целом является приемлемым. По этой причине в данной работе не учитывается специфика доходностей, соответствующих промежуткам в три и более дней, и все доходности рассматриваются как однородные.

<sup>1</sup> Использована база данных Yahoo Finance (<http://finance.yahoo.com/>).



## 2.2. Связи между доходностями

В рассматриваемых рядах логарифмических доходностей значимую автокорреляцию показывает только индекс S&P 500. Гипотеза о постоянном нулевом условном среднем в простой AR(1)-модели с константой не отвергается на 5-процентном уровне значимости тестом Вальда для всех индексов, кроме S&P 500, как показано в табл. 3. Таким образом, в доходностях большинства рассматриваемых фондовых индексов отсутствует значимая автокорреляция, и при построении одномерных моделей условное среднее можно было бы зафиксировать на нулевом уровне без значительных потерь качества модели. Однако в многомерном моделировании такой подход будет некорректен, поскольку существуют значимые корреляции между доходностями различных индексов.

Таблица 3.

**Тест Вальда на постоянное нулевое условное среднее  
в моделях AR(1)**

|                   | S&P 500 | FTSE 100 | CAC 40 | DAX   | Hang Seng | Nikkei 225 |
|-------------------|---------|----------|--------|-------|-----------|------------|
| Статистика Вальда | 18,059  | 5,225    | 1,370  | 2,406 | 3,520     | 3,446      |
| P-значение        | 0,000   | 0,073    | 0,504  | 0,300 | 0,172     | 0,179      |

В табл. 4 приведены корреляции доходностей каждого индекса с доходностями других индексов в текущий и предыдущий моменты времени. Наличие значимых корреляций в этой таблице можно объяснить географическим расположением фондовых рынков, которое определяет время торгов. Для рассматриваемых индексов временные границы торговых сессий выглядят следующим образом (указано приблизительное время): по московскому времени рынки в Японии и Гонконге открываются в 3<sup>00</sup> и закрываются в 11<sup>00</sup>, европейские рынки открываются в 9<sup>00</sup> и закрываются в 17<sup>00</sup>, американский рынок открывается в 16<sup>00</sup> и закрывается в 00<sup>00</sup>. Динамика на фондовых рынках, где торговля осуществляется раньше, является информацией для участников рынков, где торгуют позже. Этим можно объяснить существенную положительную корреляцию между лагированной доходностью индекса S&P 500 и текущими доходностями индексов Nikkei 225 и Hang-Seng. По той же причине лагированная доходность индекса S&P 500 положительно коррелирует с текущими доходностями европейских индексов FTSE 100, CAC 40 и DAX. Корреляции в этом случае ниже, чем для Nikkei 225 и Hang Seng, поскольку с момента закрытия американского рынка до момента открытия европейских рынков проходит больше времени и поступает больше информации. Аналогичные связи можно наблюдать для временных пар Восточная Азия – Европа и Европа – США.

Среди рассматриваемых индексов S&P 500 приносит на мировой фондовый рынок наиболее важную информацию и значимо влияет на доходности остальных индексов. При этом обратная связь практически отсутствует: доходность S&P 500 несущественно зависит от информации о реализовавшихся доходностях других индексов. Это продемонстрировано в табл. 5, в которой приведены оценки параметров VAR(1)-модели для вектора доходностей всех шести рассматриваемых индексов.

**Таблица 4.**

**Одновременные и лагированные корреляции доходностей**

|                 | S&P<br>500<br>(-1) | S&P<br>500 | FTSE<br>100<br>(-1) | FTSE<br>100 | CAC 40<br>(-1) | CAC 40 | DAX<br>(-1) | DAX  | Hang<br>Seng<br>(-1) | Hang<br>Seng | Nikkei<br>225<br>(-1) | Nikkei<br>225 |
|-----------------|--------------------|------------|---------------------|-------------|----------------|--------|-------------|------|----------------------|--------------|-----------------------|---------------|
| S&P 500 (-1)    | 1                  |            |                     |             |                |        |             |      |                      |              |                       |               |
| S&P 500         | -0,1               | 1          |                     |             |                |        |             |      |                      |              |                       |               |
| FTSE 100 (-1)   | 0,5                | 0,0        | 1                   |             |                |        |             |      |                      |              |                       |               |
| FTSE 100        | 0,3                | 0,5        | 0,0                 | 1           |                |        |             |      |                      |              |                       |               |
| CAC 40 (-1)     | 0,6                | 0,0        | 0,8                 | 0,0         | 1              |        |             |      |                      |              |                       |               |
| CAC 40          | 0,2                | 0,6        | 0,0                 | 0,8         | 0,0            | 1      |             |      |                      |              |                       |               |
| DAX (-1)        | 0,6                | 0,0        | 0,8                 | 0,0         | 0,8            | 0,0    | 1           |      |                      |              |                       |               |
| DAX             | 0,2                | 0,6        | 0,0                 | 0,8         | 0,0            | 0,8    | 0,0         | 1    |                      |              |                       |               |
| Hang Seng (-1)  | 0,2                | 0,0        | 0,4                 | 0,0         | 0,4            | 0,0    | 0,4         | 0,0  | 1                    |              |                       |               |
| Hang Seng       | 0,4                | 0,2        | 0,2                 | 0,4         | 0,2            | 0,4    | 0,2         | 0,4  | 0,0                  | 1            |                       |               |
| Nikkei 225 (-1) | 0,2                | 0,0        | 0,4                 | -0,1        | 0,4            | -0,1   | 0,3         | -0,1 | 0,5                  | 0,0          | 1                     |               |
| Nikkei 225      | 0,4                | 0,2        | 0,2                 | 0,4         | 0,2            | 0,4    | 0,3         | 0,3  | 0,0                  | 0,5          | 0,0                   | 1             |

Примечание: (-1) означает лагированную доходность.

**Таблица 5.**

**Оценки параметров модели VAR(1)  
для 6-мерного вектора доходностей**

|                 | S&P 500                  | FTSE 100                 | CAC 40                   | DAX                      | Hang Seng                | Nikkei 225               |
|-----------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| S&P 500 (-1)    | <b>-0,062</b><br>(0,018) | <b>0,401</b><br>(0,017)  | <b>0,462</b><br>(0,021)  | <b>0,408</b><br>(0,022)  | <b>0,530</b><br>(0,024)  | <b>0,447</b><br>(0,021)  |
| FTSE 100 (-1)   | 0,011<br>(0,028)         | <b>-0,116</b><br>(0,026) | <b>-0,132</b><br>(0,033) | <b>-0,095</b><br>(0,034) | <b>0,205</b><br>(0,037)  | 0,044<br>(0,033)         |
| CAC 40 (-1)     | -0,011<br>(0,026)        | <b>-0,077</b><br>(0,024) | <b>-0,097</b><br>(0,031) | 0,022<br>(0,032)         | -0,024<br>(0,035)        | 0,040<br>(0,031)         |
| DAX (-1)        | 0,025<br>(0,022)         | -0,039<br>(0,020)        | -0,026<br>(0,026)        | <b>-0,137</b><br>(0,027) | <b>-0,062</b><br>(0,029) | 0,049<br>(0,026)         |
| Hang Seng (-1)  | -0,012<br>(0,012)        | 0,014<br>(0,011)         | 0,012<br>(0,014)         | 0,006<br>(0,015)         | <b>-0,084</b><br>(0,016) | <b>-0,051</b><br>(0,014) |
| Nikkei 225 (-1) | -0,024<br>(0,013)        | <b>-0,043</b><br>(0,012) | <b>-0,043</b><br>(0,015) | <b>-0,046</b><br>(0,016) | <b>-0,087</b><br>(0,018) | <b>-0,098</b><br>(0,015) |
| C               | 0,032<br>(0,018)         | 0,012<br>(0,017)         | 0,005<br>(0,021)         | 0,026<br>(0,022)         | 0,024<br>(0,024)         | -0,037<br>(0,021)        |

Примечания. Оценки получены методом максимального квазиравдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным шрифтом показана значимость на 5-процентном уровне.

Согласно оцененной векторной авторегрессии, лагированная доходность индекса S&P 500 имеет прямое статистически значимое влияние на доходности европейских и азиатских индексов (коэффициенты в первой строке табл. 5), но в обратную сторону такого влияния нет (коэффициенты в первом столбце). Таким образом, текущая доходность индекса S&P 500 – особенная переменная, которая может рассматриваться как предиктор будущих доходностей других индексов. При построении моделей в разделе 3 отмеченные динамические связи между доходностями различных индексов учитываются также с помощью модели VAR(1) для вектора условных средних.

На рис. 1 изображена динамика логарифмических доходностей рассматриваемых фондовых индексов в полных рядах по 4891 наблюдению. Очевидна классическая кластеризация волатильности, которая, как правило, наблюдается в рядах финансовых доходностей. Можно также заметить, что периоды высокой волатильности одного индекса в той или иной мере перекрываются или совпадают с периодами высокой волатильности других индексов. Таким образом, возможна некоторая связь между волатильностями доходностей различных индексов. В моделях, рассматриваемых в разделе 3, использована одна из известных GARCH-моделей для условной ковариационной матрицы. Это позволяет учесть как индивидуальную кластеризацию волатильности, так и возможные связи между волатильностями различных фондовых индексов.

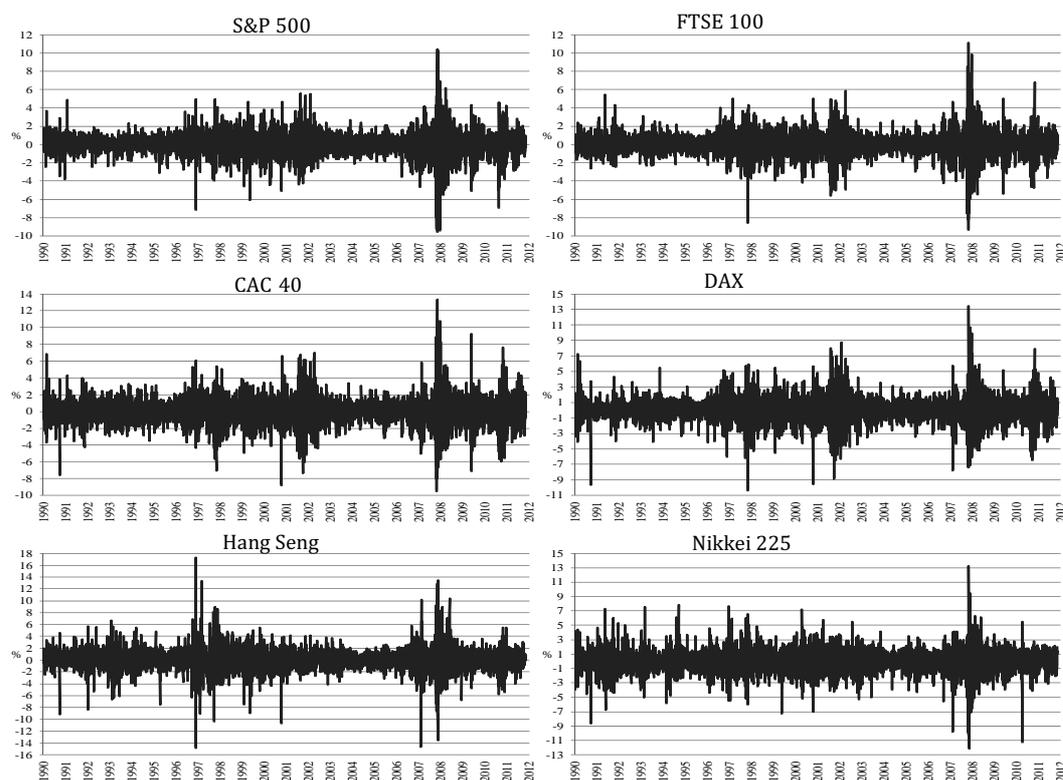


Рис. 1. Динамика логарифмических доходностей фондовых индексов

### 2.3. Тяжелые хвосты условных распределений

Источником тяжелых хвостов маргинального распределения финансовых доходностей может быть не только переменная волатильность, которая видна на рис. 1, но и наличие тяжелых хвостов у соответствующего условного распределения. В данном разделе для доходностей рассматриваемых фондовых индексов проведена пробная оценка «веса» хвостов условных распределений. Для этого построены непараметрические оценки одномерных условных функций плотности распределения доходностей, а затем на их основе рассчитаны условные коэффициенты эксцесса.

Предположим, что ряд доходностей  $r_t$  является строго стационарным, так что неизвестные совместные функции плотности  $f_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$  и маргинальные функции плотности  $f_{r_t}(x)$  не зависят от времени. Тогда условная функция плотности  $f_{r_t|r_{t-1}}(x|y)$  также не зависит от времени и может быть оценена по имеющимся наблюдениям, в частности, непараметрическими методами. Здесь для простоты в доступную к моменту времени  $t-1$  информацию  $I_{t-1}$  включено только значение  $r_{t-1}$ .

Используется одношаговая непараметрическая оценка условной функции плотности<sup>2</sup>, основанная на стандартных ядерных оценках. Пусть  $h_1$  и  $h_2$  – это ширина окон для  $r_t$  и  $r_{t-1}$  соответственно и  $K_{h_i}(x) = h_i^{-1}K(x/h_i)$ ,  $i = 1, 2$  для некоторой функции ядра  $K(x)$ . Ядерная оценка Надарайа – Уотсона<sup>3</sup> совместной функции плотности распределения  $r_t$  и  $r_{t-1}$  определяется следующим образом:

$$\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T K_{h_1}(x - r_t) K_{h_2}(y - r_{t-1}),$$

а оценка маргинальной функции плотности распределения  $r_{t-1}$  имеет вид

$$\hat{f}_{r_{t-1}}(y) = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T K_{h_2}(y - r_{t-1}).$$

Одношаговая оценка условной функции плотности  $f_{r_t|r_{t-1}}(x|y)$  определяется на основе  $\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y)$  и  $\hat{f}_{r_{t-1}}(y)$  по формуле

$$\hat{f}_{r_t|r_{t-1}}(x|y) = \frac{\hat{f}_{r_t, r_{t-1}}(x, y)}{\hat{f}_{r_{t-1}}(y)}.$$

<sup>2</sup> Данная оценка рассмотрена, например, в работе [16].

<sup>3</sup> Оценка названа в честь авторов работ [21] и [26].

В качестве условия задано  $r_{t-1} = 0$ , т.е. для всех фондовых индексов построены функции  $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ . Используется гауссово ядро  $K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ , а ширина окна вычисляется по правилу Сильвермана<sup>4</sup>  $h_1 = h_2 = 1,06\hat{\sigma}_r T^{-1/5}$ , где  $\hat{\sigma}_r$  – выборочное стандартное отклонение доходности, а  $T = 4891$  – размер выборки<sup>5</sup>. Построенные функции  $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$  были центрированы и нормированы с помощью рассчитанных по ним же условному среднему и дисперсии. На рис. 2 представлено сравнение полученных оценок с функцией плотности распределения  $N(0,1)$ .

Как известно, коэффициент эксцесса нормального распределения равен нулю. В табл. 6 приведены коэффициенты условного эксцесса, вычисленные по функциям  $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$ . Оценки условного эксцесса для всех фондовых индексов положительны, и таким образом оцененные условные распределения доходностей имеют тяжелые хвосты. При этом фондовый индекс S&P 500 имеет наибольший условный эксцесс при условии  $r_{t-1} = 0$ . На рис. 2 превышение условным эксцессом нуля проявляется в большей «пиковости» функций  $\hat{f}_{r_t|r_{t-1}=0}(x|0)$  по сравнению с функциями плотности стандартного нормального распределения.

Таблица 6.

Оценки условного эксцесса распределений доходностей при  $r_{t-1} = 0$ 

|         | S&P 500 | FTSE 100 | CAC 40 | DAX   | Hang Seng | Nikkei 225 |
|---------|---------|----------|--------|-------|-----------|------------|
| Эксцесс | 2,259   | 1,312    | 0,843  | 1,237 | 0,785     | 0,652      |

Наличие тяжелых хвостов у одномерных условных распределений доходностей должно учитываться при построении соответствующих многомерных распределений. Рассматриваемые в разделе 3 функции плотности имеют параметры, позволяющие контролировать вероятностную массу в центре распределения и посредством этого обеспечивать наличие так называемых «многомерных тяжелых хвостов».

### 3. Условные распределения доходностей

В данном разделе рассмотрены три модели для вектора доходностей фондовых индексов: во-первых, модель на основе  $t$ -распределения с вектором степеней свободы, включающая, как частный случай, модель со скаляром степеней свободы, во-вторых, модель с обобщенным распределением ошибки (GED) и, в-третьих, модель с распределением Грама – Шарлье.

<sup>4</sup> Правило предложено в книге [24].

<sup>5</sup> Использован пакет «пр» в языке программирования R.

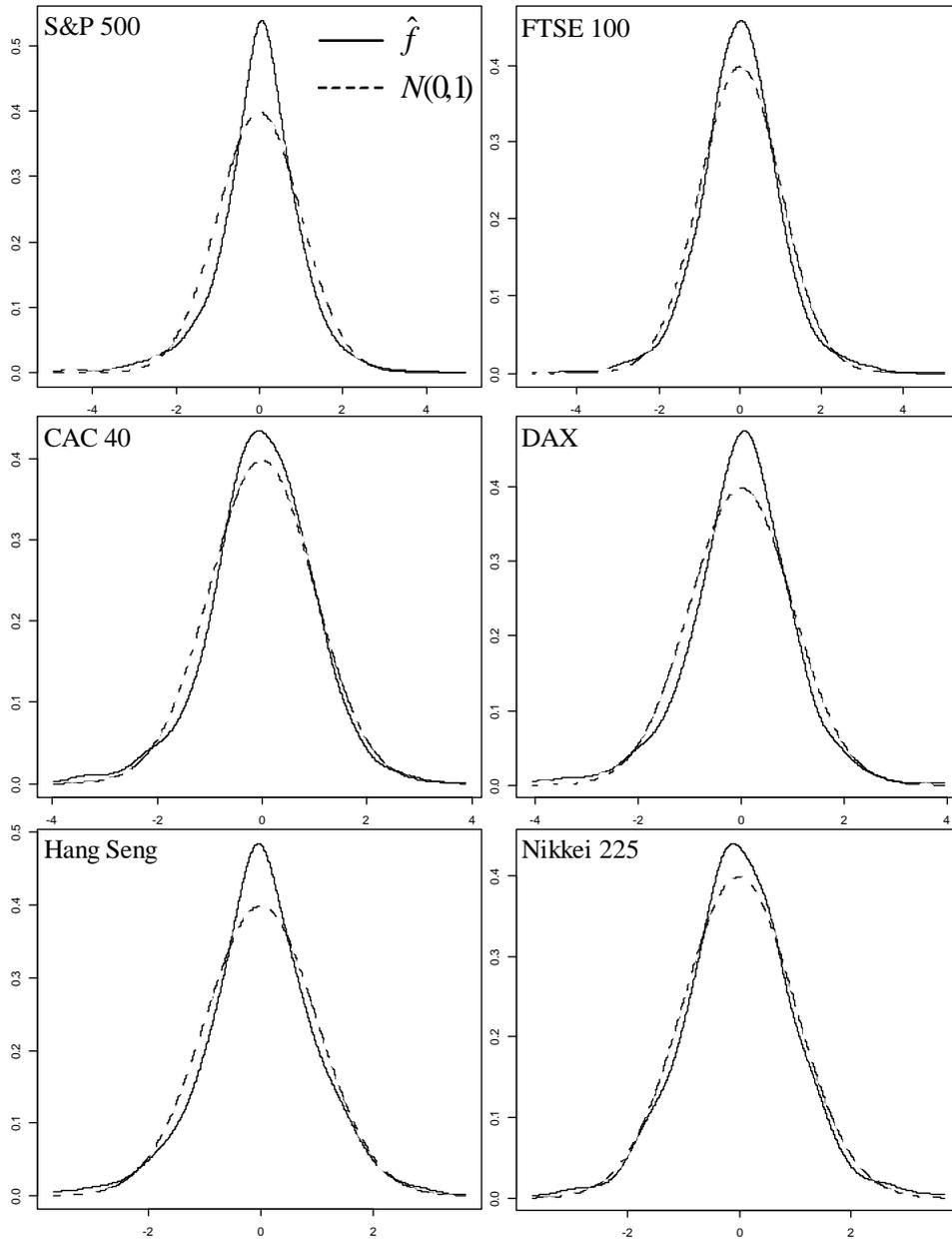


Рис. 2. Стандартизованные непараметрические оценки условных функций плотности

Многомерное нормальное распределение входит в качестве частного случая в обобщенное распределение ошибки и в распределение Грама – Шарлье. В подразделах 3.1–3.3 приведены теоретические аспекты каждой модели, а также примеры оценок их параметров на данных, описанных в разделе 2. Последующее сравнение оцененных моделей проводится в разделе 4. Целью эмпирического сравнения моделей в работе является выявление среди них той, которая способна наилучшим образом учитывать многомерные тяжелые хвосты распределений.

Толщина многомерных хвостов распределения в значительной степени определяется первыми четырьмя моментами. В данной работе для  $t$ -распределения, обобщенного распределения ошибки и распределения Грама – Шарлье используются одинаковые принципы определения первого – третьего условных моментов, а четвертый условный момент моделируется различно за счет специфики каждого распределения. Это в некоторой мере позволяет выявить наилучший способ моделирования четвертого условного момента и соответственно многомерных тяжелых хвостов условного распределения доходностей.

Вектор условных ожиданий доходностей фондовых индексов для распределений, рассматриваемых в подразделах 3.1–3.3, определяется одинаково, и его уравнение имеет вид VAR(1)

$$(1) \quad \mu_t = E_{t-1}(r_t) = c + Q r_{t-1},$$

где  $c$  и  $Q$  – произвольные  $d \times 1$  вектор и  $d \times d$  матрица соответственно (в работе рассмотрен случай  $d = 2$ ). Выше было отмечено, что лагированное значение доходности одного фондового индекса может быть значимым предиктором доходности другого индекса из-за разницы во времени между торговыми сессиями на различных мировых фондовых рынках. Именно по этой причине в модель вводится матрица  $Q$ , обеспечивающая зависимость  $E_{t-1}(r_t)$  от  $r_{t-1}$ .

Вторым общим свойством рассматриваемых в работе распределений является одинаковое уравнение динамики условной ковариационной матрицы вектора доходностей  $H_t = V_{t-1}(r_t)$ . Используется так называемая BEKK(1,1)<sup>6</sup> многомерная GARCH-модель, которая имеет вид

$$(2) \quad H_t = \Omega \Omega' + A \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}' A + B H_{t-1} B',$$

где  $\Omega$  –  $d \times d$  нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами;  $A$  и  $B$  – произвольные  $d \times d$  матрицы;  $\varepsilon_t$  – вектор шоков в момент  $t$ , т.е.

$$\varepsilon_t = r_t - \mu_t = r_t - E_{t-1}(r_t) = r_t - c - Q r_{t-1}.$$

Использование модели BEKK выгодно по двум причинам. Во-первых, в данной модели матрица  $H_t$  в любой момент времени  $t$  положительно определена по построению, что существенно облегчает техническую процедуру вычисления оценок параметров мо-

<sup>6</sup> Модель Baba – Engle – Kraft – Kroner, предложенная в работе [11].

дели. И, во-вторых, ВЕКК является одной из наиболее гибких моделей среди тех, в которых  $H_t$  всегда положительно определена<sup>7</sup>.

В предыдущем разделе было показано, что для рассматриваемых в данной работе временных рядов доходностей характерна классическая кластеризация волатильности, а изменение волатильности на различных рынках происходит в определенной мере синхронно. Многомерная GARCH-модель ВЕКК позволяет учесть как классическую кластеризацию волатильности на отдельных рынках, так и возможные связи между волатильностями на разных рынках. Учет этих связей достигается за счет внедиагональных элементов матриц  $A$  и  $B$ .

Рассмотренные в подразделах 3.1 и 3.2  $t$ -распределение и обобщенное распределение ошибки имеют нулевую асимметрию, и соответственно все третьи центральные условные моменты для них автоматически равны нулю, т.е.  $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes \varepsilon_t) = \mathbb{O}_{d^2 \times d}$ . В то же

время распределение Грама – Шарлье, описанное в подразделе 3.3, допускает наличие асимметрии, что дает ему некоторое преимущество. Поэтому в распределении Грама – Шарлье следовало бы задать ограничение вида  $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes \varepsilon_t) = \mathbb{O}_{d^2 \times d}$  для обеспечения

равноправия при его сравнении с  $t$ -распределением и обобщенным распределением ошибки. Однако было эмпирически проверено, что наличие или отсутствие асимметрии в распределении Грама – Шарлье не влияет на результаты его эмпирического сравнения с другими распределениями. По этой причине для распределения Грама – Шарлье использовалось более общее ограничение  $E_{t-1}(\varepsilon_t \varepsilon_t' \otimes \varepsilon_t) = D_3 = const$ , и построенные на его осно-

ве модели имеют некоторую асимметрию.

Далее приведено описание рассматриваемых в работе моделей. Для каждой из них отмечены некоторые теоретические свойства, приведена формула логарифма функции плотности для вычисления оценок параметров методом максимального квазиправдоподобия<sup>8</sup> и представлены таблицы с примерами вычисленных оценок.

### 3.1. Модели на основе $t$ -распределения с вектором и скаляром степеней свободы

Рассматриваемое в данной работе  $t$ -распределение с вектором степеней свободы было предложено в работе [3]. Его теория также развивается в работах [2; 4; 6], а практическое применение реализовано в [5].

Используется определение  $t$ -распределения с вектором степеней свободы, приведенное в работе [3]. Запишем для случая  $d = 2$  условную функцию плотности распределения вектора доходностей в следующем виде:

<sup>7</sup> Обзор многомерных GARCH-моделей можно найти, например, в работе [23].

<sup>8</sup> О полноценном максимальном правдоподобии можно говорить в том случае, если маргинальное распределение первого наблюдения во временном ряду не зависит от оцениваемых параметров. Проверить эту гипотезу, как правило, не представляется возможным. Поэтому на практике этим пренебрегают и максимизируют функцию квазиправдоподобия.

$$(3) \quad f_{t-1}(r_t) = (2\pi)^{-1} \frac{\Gamma\left(v_1 + \frac{1}{2}\right)\Gamma(v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma\left(v_2 - \frac{1}{2}\right)} |A_t|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}(r_t - \mu_t)' A_t^{-1} (r_t - \mu_t)\right)^{-v_1 - \frac{1}{2}} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{2} \frac{(r_{t1} - \mu_{t1})^2}{A_{t11}}\right)^{v_1 - v_2}.$$

Она соответствует  $t$ -распределению с вектором степеней свободы, параметрами которого являются  $\mu_t \in \mathbb{R}^2$ , положительно определенная матрица  $A_t$  и вектор  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  такой, что  $v_1 > 0$  и  $v_2 > \frac{1}{2}$ .

В работе [6] показано, что вектор  $r_t$  может быть представлен в виде  $r_t = \mu_t + P_t \eta$ , где  $P_t P_t' = A_t$ , а случайный вектор  $\eta$  имеет функцию плотности распределения (3) с параметрами  $\mu_t = 0$ ,  $A_t = I_2$  и тем же вектором  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ , что и для  $r_t$ . Таким образом, распределение  $\eta$  не зависит от времени и поэтому индекс  $t$  для него был изначально опущен. В работе [2] показано, что  $E(\eta)$  существует при  $v_1 > \frac{1}{2}$ ,  $v_2 > 1$  и  $E(\eta) = 0$ , а  $E(\eta\eta')$  существует при  $v_1 > 1$ ,  $v_2 > \frac{3}{2}$  и  $E(\eta\eta') = \begin{pmatrix} \frac{2}{2v_2 - 3} & 0 \\ 0 & \frac{2(v_2 - 1)}{(2v_2 - 3)(v_1 - 1)} \end{pmatrix}$ .

Предположим, что упомянутые ограничения на  $v_1$  и  $v_2$  выполнены. Тогда для вектора условных средних имеем  $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$ , а условная ковариационная матрица вектора  $r_t$  имеет вид

$$V_{t-1}(r_t) = H_t = P_t \begin{pmatrix} \frac{2}{2v_2 - 3} & 0 \\ 0 & \frac{2(v_2 - 1)}{(2v_2 - 3)(v_1 - 1)} \end{pmatrix} P_t'.$$

Отсюда

$$P_t = \left( \frac{2v_2 - 3}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} H_{t11}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ H_{t12} H_{t11}^{-\frac{1}{2}} & \left( \frac{v_1 - 1}{v_2 - 1} \left( H_{t22} - \frac{H_{t12}^2}{H_{t11}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда, определяя  $A_t = P_t P_t'$  в формуле (3), получим  $V_{t-1}(r_t) = H_t$ . Динамика  $\mu_t$  и  $H_t$  задается формулами (1) и (2) соответственно, что завершает построение модели.

Следует отметить, что можно было бы изначально задать динамику положительно определенной матрицы  $A_t$ , например, по формуле, аналогичной (2). Однако в этом случае  $V_{t-1}(r_t)$  могла бы не следовать ВЕКК(1,1) динамике и был бы нарушен принятый выше принцип одинаковой динамики условных ковариационных матриц для рассматриваемых в работе распределений.

Для вектора шоков имеем  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$ , поэтому логарифм условной функции плотности распределения  $r_t$  в модели с  $t$ -распределением с вектором степеней свободы запишется в виде

$$(4) \quad \ln f_{t-1}(r_t) = -\ln(2\pi) + \ln \Gamma\left(v_1 + \frac{1}{2}\right) + \ln \Gamma(v_2) - \ln \Gamma(v_1) - \ln \Gamma\left(v_2 - \frac{1}{2}\right) - \\ - \frac{1}{2} \ln |A_t| - \left(v_1 + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_t' A_t^{-1} \varepsilon_t\right) + (v_1 - v_2) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{t1}^2}{A_{t11}}\right).$$

Модель на основе  $t$ -распределения со скалярным параметром степеней свободы получается введением ограничения  $v_1 = v_2$ . При этом лишь упрощаются вышеприведенные формулы.

В настоящее время известно, что включение числа степеней свободы многомерного  $t$ -распределения в состав аргументов, по которым максимизируется функция правдоподобия (как, например, в работе [18]), является не вполне корректным с вычислительной точки зрения. Возникающие в случае такого включения проблемы рассмотрены в работах [13; 19]. В силу наличия этих проблем, при оценке моделей с  $t$ -распределением в настоящей работе скалярный и векторный параметры степеней свободы не входят в состав аргументов оптимизации. Применяется двухшаговая процедура: на основе предварительного анализа выбирается и фиксируется скаляр или вектор степеней свободы, а затем проводится максимизация функции квазиправдоподобия по остальным параметрам. Выбор значения для скаляра или вектора степеней свободы основан на результатах эмпирического сравнения, пример дается в разделе 4.

В табл. 7 представлены примеры оценок параметров моделей на основе  $t$ -распределения со скаляром и вектором степеней свободы. Данные оценки получены с предварительной фиксацией степеней свободы и последующей максимизацией по остальным аргументам функции квазиправдоподобия, основанной на (4). Рассматриваются три случая:

$v_1 = 3,9$   $v_2 = 4,1$ ,  $v_1 = v_2 = 4$  и  $v_1 = 4,1$   $v_2 = 3,9$ . Случай  $v_1 = v_2 = 4$  соответствует обычному двумерному  $t$ -распределению со скаляром степеней свободы. Здесь, а также в подразделах 3.2 и 3.3 в качестве примеров взяты пары индексов (S&P 500, DAX), (S&P 500, Hang Seng) и (DAX, Hang Seng). Для остальных 12 пар проведены аналогичные расчеты.

Таблица 7.

**Оценки параметров моделей на основе  $t$ -распределения со скалярным и векторным параметрами степеней свободы**

|          | S&P 500, DAX            |                          | S&P 500, Hang Seng      |                         | DAX, Hang Seng          |                         |
|----------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|          | $v_1 = 3,9$ $v_2 = 4,1$ |                          | $v_1 = v_2 = 4$         |                         | $v_1 = 4,1$ $v_2 = 3,9$ |                         |
| $c$      | <b>0,061</b><br>(0,014) |                          | <b>0,057</b><br>(0,014) |                         | <b>0,067</b><br>(0,018) |                         |
|          | <b>0,060</b><br>(0,017) |                          | <b>0,059</b><br>(0,020) |                         | <b>0,081</b><br>(0,021) |                         |
| $Q$      | 0,014<br>(0,019)        | 0,008<br>(0,013)         | 0,008<br>(0,017)        | -0,003<br>(0,009)       | 0,009<br>(0,017)        | -0,002<br>(0,013)       |
|          | <b>0,414</b><br>(0,025) | <b>-0,135</b><br>(0,017) | <b>0,465</b><br>(0,025) | 0,006<br>(0,017)        | <b>0,163</b><br>(0,018) | 0,000<br>(0,018)        |
| $\Omega$ | <b>0,057</b><br>(0,024) | 0<br>-                   | <b>0,046</b><br>(0,014) | 0<br>-                  | <b>0,096</b><br>(0,020) | 0<br>-                  |
|          | -0,055<br>(0,029)       | <b>0,076</b><br>(0,026)  | -0,009<br>(0,061)       | <b>0,175</b><br>(0,040) | 0,081<br>(0,049)        | <b>0,138</b><br>(0,029) |
| $A$      | <b>0,179</b><br>(0,032) | -0,012<br>(0,017)        | <b>0,159</b><br>(0,021) | 0,002<br>(0,010)        | <b>0,210</b><br>(0,022) | 0,014<br>(0,020)        |
|          | -0,015<br>(0,036)       | <b>0,209</b><br>(0,018)  | -0,009<br>(0,035)       | <b>0,271</b><br>(0,038) | -0,007<br>(0,030)       | <b>0,246</b><br>(0,040) |
| $B$      | <b>0,982</b><br>(0,007) | 0,002<br>(0,004)         | <b>0,987</b><br>(0,004) | -0,001<br>(0,003)       | <b>0,977</b><br>(0,005) | -0,005<br>(0,006)       |
|          | 0,010<br>(0,007)        | <b>0,974</b><br>(0,004)  | 0,006<br>(0,007)        | <b>0,956</b><br>(0,013) | 0,002<br>(0,007)        | <b>0,964</b><br>(0,012) |

*Примечания.* Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия с предварительной фиксацией степеней свободы.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным шрифтом показана значимость на 5-процентном уровне.

### 3.2. Модель на основе обобщенного распределения ошибки (GED)

Многомерное обобщенное распределение ошибки рассматривается в работе [15]. Запишем для случая  $d = 2$  условную функцию плотности распределения вектора доходностей в следующем виде:

$$(5) \quad f_{t-1}(r_t) = \pi^{-1} \left| \sum_t \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(1+2\kappa)\Gamma(\kappa)} \exp \left\{ - \left( \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} (r_t - \mu_t)' \sum_t^{-1} (r_t - \mu_t) \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \right\}.$$

По определению, приведенному в работе [15], функция плотности (5) соответствует обобщенному распределению ошибки, параметрами которого являются  $\mu_t \in \mathbb{R}^2$ , положительно определенная матрица  $\sum_t$  и  $\kappa > 0$ . В исследовании [15] устанавливается, что в данном случае  $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$  и  $V_{t-1}(r_t) = H_t = \frac{\Gamma(4\kappa)\Gamma(1+\kappa)}{\Gamma(3\kappa)\Gamma(1+2\kappa)} \sum_t$ . Отсюда

$$\sum_t = \frac{\Gamma(3\kappa)\Gamma(1+2\kappa)}{\Gamma(4\kappa)\Gamma(1+\kappa)} H_t.$$

Тогда, используя эту формулу для  $\sum_t$  в (5), будем иметь  $V_{t-1}(r_t) = H_t$ . Динамика  $\mu_t$  и  $H_t$ , как и для модели с  $t$ -распределением, задается формулами (1) и (2) соответственно, что завершает построение модели.

Вектор шоков определяется как  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$ , поэтому логарифм условной функции плотности распределения  $r_t$  в модели с обобщенным распределением ошибки запишется в виде

$$(6) \quad \ln f_{t-1}(r_t) = -\ln(\pi) - \frac{1}{2} \ln \left| \sum_t \right| + \ln \Gamma(2) + \ln \Gamma(3\kappa) - \ln \Gamma(1+2\kappa) - \\ - \ln \Gamma(\kappa) - \left( \frac{\Gamma(3\kappa)}{\Gamma(\kappa)} \varepsilon_t' \sum_t^{-1} \varepsilon_t \right)^{\frac{1}{2\kappa}}.$$

Отметим, что при  $\kappa = \frac{1}{2}$  многомерное обобщенное распределение ошибки сводится к многомерному нормальному распределению, и в этом случае имеем

$$(r_t | I_{t-1}) \sim N_2(\mu_t, \sum_t).$$

При  $\kappa > \frac{1}{2}$  многомерные хвосты обобщенного распределения ошибки имеют больший «вес», чем многомерные хвосты нормального распределения, и с ростом  $\kappa$  толщина хвостов увеличивается. Параметр  $\kappa$  в данной работе включается в список аргументов, по которым проводится максимизация функции квазиравдоподобия.

Таблица 8.

**Оценки параметров моделей на основе  
обобщенного распределения ошибки (GED)**

|          | S&P 500, DAX            |                          | S&P 500, Hang Seng      |                         | DAX, Hang Seng          |                         |
|----------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| <i>c</i> | <b>0,059</b><br>(0,014) |                          | <b>0,056</b><br>(0,015) |                         | <b>0,068</b><br>(0,019) |                         |
|          | <b>0,063</b><br>(0,018) |                          | <b>0,054</b><br>(0,021) |                         | <b>0,074</b><br>(0,021) |                         |
| <i>Q</i> | 0,017<br>(0,018)        | 0,004<br>(0,013)         | -0,002<br>(0,018)       | -0,001<br>(0,010)       | 0,011<br>(0,018)        | -0,006<br>(0,013)       |
|          | <b>0,415</b><br>(0,026) | <b>-0,137</b><br>(0,018) | <b>0,462</b><br>(0,025) | -0,002<br>(0,018)       | <b>0,159</b><br>(0,018) | -0,005<br>(0,018)       |
| <i>Ω</i> | <b>0,058</b><br>(0,022) | 0<br>-                   | <b>0,045</b><br>(0,015) | 0<br>-                  | <b>0,114</b><br>(0,021) | 0<br>-                  |
|          | -0,057<br>(0,031)       | <b>0,085</b><br>(0,028)  | -0,001<br>(0,063)       | <b>0,19</b><br>(0,051)  | <b>0,113</b><br>(0,054) | <b>0,148</b><br>(0,030) |
| <i>A</i> | <b>0,176</b><br>(0,030) | -0,013<br>(0,017)        | <b>0,155</b><br>(0,019) | 0,004<br>(0,013)        | <b>0,204</b><br>(0,025) | 0,020<br>(0,020)        |
|          | -0,031<br>(0,034)       | <b>0,205</b><br>(0,021)  | -0,028<br>(0,037)       | <b>0,274</b><br>(0,046) | -0,014<br>(0,030)       | <b>0,257</b><br>(0,044) |
| <i>B</i> | <b>0,983</b><br>(0,007) | 0,002<br>(0,004)         | <b>0,987</b><br>(0,003) | -0,002<br>(0,004)       | <b>0,977</b><br>(0,006) | -0,008<br>(0,007)       |
|          | <b>0,014</b><br>(0,007) | <b>0,973</b><br>(0,005)  | 0,010<br>(0,008)        | <b>0,954</b><br>(0,017) | 0,003<br>(0,007)        | <b>0,960</b><br>(0,014) |
| <i>κ</i> | <b>0,786</b><br>(0,034) |                          | <b>0,818</b><br>(0,033) |                         | <b>0,835</b><br>(0,038) |                         |

*Примечания.* Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным шрифтом показана значимость на 5-процентном уровне.

В табл. 8 приведены примеры оценок параметров моделей с обобщенным распределением ошибки методом максимального квазиправдоподобия, основанном на функции (6).

### 3.3. Модель на основе распределения Грама – Шарлье

Функция плотности распределения Грама – Шарлье получается на основе разложения истинной условной функции плотности для вектора доходностей в ряд Грама – Шарлье вокруг нормального распределения  $N(\mu_i, H_i)$ . В полученном ряде все члены

после третьего отбрасываются, а остаток объявляется функцией плотности. Подробное описание построения данной функции можно найти, например, в работе [10].

Для условной ковариационной матрицы  $H_t$  определим нижнюю треугольную с положительными диагональными элементами матрицу  $P_t$  такую, что  $P_t P_t' = H_t$ . Запишем для случая  $d = 2$  условную функцию плотности распределения вектора доходностей в следующем виде:

$$(7) \quad f_{t-1}(r_t) = \phi_2(r_t, \mu_t, H_t) \left( 1 + \frac{1}{3!} \text{tr} \left\{ D_3 \left[ \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' (P_t^{-1})' - 3I_2 \right) \otimes \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \otimes P_t^{-1}(r_t - \mu_t) \right] \right\} + \frac{1}{4!} \text{tr} \left\{ \left[ D_4 - 3 \text{vec}(I_2) \text{vec}(I_2)' \right] \left[ \text{vec} \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' (P_t^{-1})' - I_2 \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \text{vec} \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' (P_t^{-1})' - I_2 \right) - 4I_2 \otimes \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(r_t - \mu_t)' (P_t^{-1})' \right) + 2I_4 \right] \right\} \right),$$

где  $P_t = \begin{pmatrix} H_{t11}^{\frac{1}{2}} & 0 \\ H_{t12} H_{t11}^{-\frac{1}{2}} & (H_{t22} - H_{t12}^2 H_{t11}^{-1})^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$ . Тогда непосредственным интегрированием мо-

жет быть установлено, что  $\int_{\mathbb{R}^2} f_{t-1}(r_t) d\eta = 1$ ,  $E_{t-1}(r_t) = \mu_t$  и  $V_{t-1}(r_t) = H_t$ . Кроме того,

для матрицы третьих центральных нормированных моментов имеем

$$E \left( \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(P_t^{-1}(r_t - \mu_t))' \right) \otimes \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t) \right) \right) = D_{3, 2 \times 4},$$

а для матрицы четвертых моментов получаем

$$E \left( \left( \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(P_t^{-1}(r_t - \mu_t))' \right) \otimes \left( P_t^{-1}(r_t - \mu_t)(P_t^{-1}(r_t - \mu_t))' \right) \right) \right) = D_{4, 4 \times 4}.$$

Таким образом, для функции (7) и распределения на ее основе имеем следующие результаты. Во-первых, если значения параметров таковы, что для любого  $r_t$  выполнено  $f_{t-1}(r_t) > 0$ , то  $f_{t-1}(r_t)$  является функцией плотности. Обрывание ряда Грама – Шарлье на третьем члене приводит к тому, что функция  $f_{t-1}(r_t)$  имеет области отрицательности для некоторых значений параметров. Тем не менее на практике в многомерном моделировании распределения доходностей параметры подобной модели, как правило, оказываются таковы, что  $f_{t-1}(r_t) > 0$  всюду и проблем с отрицательностью не возникает.

Таблица 9.

**Оценки параметров моделей  
на основе распределения Грама – Шарлье**

|            | S&P 500, DAX  |  | S&P 500, Hang Seng                           |  | DAX, Hang Seng                                     |  |
|------------|---|--|--|--|--|--|
| $c$        | <b>0,050</b><br>(0,015)<br><b>0,052</b><br>(0,020)  |  | <b>0,051</b><br>(0,016)<br>0,046<br>(0,024)  |  | <b>0,048</b><br>(0,024)<br><b>0,061</b><br>(0,026) |  |
| $Q$        | 0,011<br>(0,018)<br><b>0,418</b><br>(0,025)         | 0,006<br>(0,013)<br><b>-0,137</b><br>(0,018) | 0,008<br>(0,018)<br><b>0,474</b><br>(0,027)  | -0,007<br>(0,010)<br>-0,006<br>(0,020)       | 0,011<br>(0,017)<br><b>0,157</b><br>(0,018)        | 0,001<br>(0,013)<br>0,003<br>(0,018)         |
| $\Omega$   | <b>0,064</b><br>(0,021)<br><b>-0,065</b><br>(0,030) | 0<br>-<br><b>0,080</b><br>(0,031)            | <b>0,041</b><br>(0,015)<br>0,057<br>(0,152)  | 0<br>-<br><b>0,213</b><br>(0,084)            | <b>0,141</b><br>(0,028)<br><b>0,184</b><br>(0,073) | 0<br>-<br><b>0,150</b><br>(0,030)            |
| $A$        | <b>0,186</b><br>(0,029)<br>-0,047<br>(0,031)        | -0,023<br>(0,019)<br><b>0,194</b><br>(0,028) | <b>0,151</b><br>(0,019)<br>-0,038<br>(0,040) | 0,006<br>(0,020)<br><b>0,269</b><br>(0,088)  | <b>0,192</b><br>(0,041)<br>-0,013<br>(0,036)       | 0,025<br>(0,015)<br><b>0,267</b><br>(0,040)  |
| $B$        | <b>0,981</b><br>(0,007)<br><b>0,018</b><br>(0,006)  | 0,004<br>(0,004)<br><b>0,975</b><br>(0,006)  | <b>0,989</b><br>(0,003)<br>0,012<br>(0,008)  | -0,003<br>(0,008)<br><b>0,954</b><br>(0,034) | <b>0,980</b><br>(0,009)<br>0,003<br>(0,008)        | -0,011<br>(0,006)<br><b>0,955</b><br>(0,015) |
| $D_{3,11}$ | -0,097<br>(0,063)                                   |  | -0,065<br>(0,064)                            |  | -0,131<br>(0,067)                                  |  |
| $D_{3,12}$ | 0,030<br>(0,030)                                    |  | -0,056<br>(0,031)                            |  | <b>-0,071</b><br>(0,033)                           |  |
| $D_{3,14}$ | -0,040<br>(0,031)                                   |  | 0,066<br>(0,034)                             |  | 0,033<br>(0,032)                                   |  |
| $D_{3,24}$ | -0,096<br>(0,059)                                   |  | -0,056<br>(0,064)                            |  | 0,017<br>(0,057)                                   |  |
| $D_{4,11}$ | <b>4,052</b><br>(0,145)                             |  | <b>4,064</b><br>(0,147)                      |  | <b>4,010</b><br>(0,210)                            |  |
| $D_{4,12}$ | <b>0,172</b><br>(0,068)                             |  | -0,008<br>(0,073)                            |  | 0,014<br>(0,076)                                   |  |
| $D_{4,14}$ | <b>1,223</b><br>(0,058)                             |  | <b>1,205</b><br>(0,059)                      |  | <b>1,329</b><br>(0,059)                            |  |
| $D_{4,24}$ | 0,072<br>(0,075)                                    |  | 0,132<br>(0,073)                             |  | 0,107<br>(0,063)                                   |  |
| $D_{4,44}$ | <b>3,835</b><br>(0,143)                             |  | <b>4,041</b><br>(0,157)                      |  | <b>3,923</b><br>(0,131)                            |  |

Примечания. Оценки получены методом максимального квазиправдоподобия.

В скобках приведены стандартные ошибки.

Жирным шрифтом показана значимость на 5-процентном уровне.

Во-вторых, вектор условных ожиданий и условная ковариационная матрица оказываются ровно такими, какие требуются от модели. При этом динамика  $\mu_t$  и  $H_t$  по-прежнему задается формулами (1) и (2) соответственно. В-третьих, матрицы параметров  $D_3$  и  $D_4$  являются матрицами центрированных нормированных третьих и четвертых моментов соответственно. Матрица  $D_3$  определяет асимметрию распределения, а матрица  $D_4$  контролирует вероятностную массу в центре распределения и, соответственно, «вес» многомерных хвостов.

Имеем  $\varepsilon_t = r_t - \mu_t$ , поэтому логарифм условной функции плотности распределения  $r_t$  в модели на основе распределения Грама - Шарлье запишется в виде

$$(8) \quad \ln f_{t-1}(r_t) = -\ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |H_t| - \frac{1}{2} \varepsilon_t' H_t^{-1} \varepsilon_t + \\ + \ln \left\{ 1 + \frac{1}{3!} \text{tr} \left\{ D_3 \left[ \left( P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' - 3I_2 \right) \otimes P_t^{-1} \varepsilon_t \right] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} \text{tr} \left\{ \left[ D_4 - 3 \text{vec}(I_2) \text{vec}(I_2)' \right] \left[ \text{vec} \left( P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' - I_2 \right) \text{vec} \left( P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' - I_2 \right)' - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - 4I_2 \otimes \left( P_t^{-1} \varepsilon_t \varepsilon_t' (P_t^{-1})' \right) + 2I_4 \right] \right\} \right\}.$$

Распределение Грама - Шарлье, так же как и обобщенное распределение ошибки, сводится к нормальному распределению при некоторых значениях параметров. А именно, положив  $D_3 = \mathbb{O}$  и  $D_4 = 3 \text{vec}(I_2) \text{vec}(I_2)'$ , получаем  $(r_t | I_{t-1}) \sim N_2(\mu_t, H_t)$ .

В табл. 9 приведены примеры оценок параметров моделей с распределением Грама - Шарлье методом максимального квазиправдоподобия, основанном на функции (8).

#### 4. Сравнение моделей на основе KLIC-теста

В этом разделе описывается метод сравнения двух конкурирующих моделей условной функции плотности распределения. Рассматриваемые в работе модели являются не вложенными, и для их сравнения может быть использован информационный критерий Кульбака - Лейблера. Сравнение двух функций плотности проводится в форме теста на основе этого информационного критерия (далее - KLIC-теста). Подробная методология KLIC-теста, а также проблемы, возникающие при его проведении, рассмотрены в работе [25]. В данном разделе KLIC-тест описан в контексте моделирования условной функции плотности вектора доходностей  $r_t$ .

Пусть имеются две конкурирующие условные функции плотности для вектора доходностей  $f_{t-1}(r_t | \theta)$  и  $g_{t-1}(r_t | \phi)$ . Чтобы выбрать из них лучшую с точки зрения качества подгонки внутри выборки или предсказательной способности вне ее (при предсказании условной функции плотности в целом), проводится следующий тест.

Нулевая гипотеза состоит в эквивалентности моделей функции плотности:

$$H_0 : f_{t-1}(r_t | \theta) \sim g_{t-1}(r_t | \phi).$$

Формально эквивалентность моделей функции плотности определяется как равенство нулю расстояния Кульбака – Лейблера<sup>9</sup> между ними:

$$E \left[ \log \frac{f_{t-1}(r_t | \theta_*)}{g_{t-1}(r_t | \phi_*)} \right] = 0,$$

где  $\theta_*$  и  $\phi_*$  – это псевдоистинные значения параметров для двух рассматриваемых моделей функции плотности.

Имеются две альтернативные гипотезы, соответствующие случаям, когда одна модель предпочтительнее другой:

$$H_f : f_{t-1}(r_t | \theta) \succ g_{t-1}(r_t | \phi),$$

$$H_g : g_{t-1}(r_t | \phi) \succ f_{t-1}(r_t | \theta).$$

Обозначим через  $\omega_*$  дисперсию логарифмической разности рассматриваемых функций плотности:

$$\omega_* = \text{Var} \left( \log \frac{f_{t-1}(r_t | \theta_*)}{g_{t-1}(r_t | \phi_*)} \right).$$

Эту дисперсию можно состоятельно оценить следующим образом:

$$\hat{\omega}_* = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \left( \log \frac{f_{t-1}(r_t | \hat{\theta})}{g_{t-1}(r_t | \hat{\phi})} \right)^2 - \left( \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \log \frac{f_{t-1}(r_t | \hat{\theta})}{g_{t-1}(r_t | \hat{\phi})} \right)^2,$$

где  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\phi}$  – оценки параметров двух моделей функции плотности методом максимального квазиправдоподобия.

<sup>9</sup> Данное понятие было впервые рассмотрено в работе [17], где вместо слова «расстояние» применяется словосочетание «средняя информация». Термин «расстояние Кульбака – Лейблера» вошел в употребление позже.

Далее, обозначим через  $LR$  сумму выборочных логарифмических разностей рассматриваемых функций плотности:

$$LR = \sum_{t=2}^T \log \frac{f_{t-1}(r_t | \hat{\theta})}{g_{t-1}(r_t | \hat{\phi})}.$$

KLIC-тест основан на следующих асимптотических результатах в предположении о верности каждой из гипотез:

$$KLIC = \frac{LR}{\sqrt{T\hat{\omega}_*}} \xrightarrow[H_0]{d} N(0,1), \quad \xrightarrow[H_f]{p} +\infty, \quad \xrightarrow[H_g]{p} -\infty.$$

Данный тест может быть проведен как внутри выборки, на которой оцениваются модели (для сравнения качества подгонки), так и вне ее (для сравнения предсказательной способности при предсказании условной функции плотности в целом).

Потенциальная проблема данного подхода к сравнению моделей – возможность ситуации  $\omega_* = 0$ , когда KLIC-тест неприменим. Для проверки равенства  $\omega_* = 0$  следует проводить так называемое предварительное тестирование. Однако существующий на данный момент тест для проверки гипотезы  $\omega_* = 0$  использует статистику с нестандартным и непивотальным распределением, и для упрощения расчетов в данной работе предварительное тестирование не проводится.

Эмпирический критерий выбора между функциями плотности  $f$  и  $g$  на основе KLIC-теста выглядит следующим образом. Функция плотности  $g$  предпочтительнее функции плотности  $f$ , если  $KLIC < -1,96$ , и  $f$  предпочтительнее  $g$ , если  $KLIC > 1,96$ . Если же  $-1,96 < KLIC < 1,96$ , то функции плотности  $f$  и  $g$  признаются эквивалентными на 5-процентном уровне значимости.

На основе данного критерия было проведено попарное сравнение рассмотренных в работе моделей внутри и вне выборки, на которой они построены. При проведении теста внутри выборки  $T = 3261$  и величины  $\hat{\omega}_*$  и  $LR$  рассчитаны по первым 3261 наблюдению. При проведении теста вне выборки  $T = 1630$  и величины  $\hat{\omega}_*$  и  $LR$  рассчитаны по последним 1630 наблюдениям. При этом для внутривыборочного и вневыборочного KLIC-теста использованы одни и те же оценки параметров функций плотности, вычисленные на основе первых 3261 наблюдения. Из 6 временных рядов доходностей рассматриваемых фондовых индексов составлены 15 различных пар, и на каждой паре рядов сравнивается каждая пара моделей, рассмотренных в разделе 3.

Для рассматриваемой пары временных рядов доходностей назовем победой по KLIC-тесту Модели 1 над Моделью 2 такую ситуацию, когда Модель 1 превосходит Модель 2 согласно упомянутому эмпирическому критерию. Соответственно, поражением по KLIC-тесту Модели 1 перед Моделью 2 будем считать обратную ситуацию. По результатам KLIC-теста для каждой модели было подсчитано число ее побед над другими моделями внутри и вне выборки. На основе этого был определен рейтинг каждой модели по качест-

ву подгонки к данным и предсказательной способности при предсказании условной функции плотности в целом.

Модель на основе распределения Грама – Шарлье имеет наименьший рейтинг как по качеству подгонки, так и по предсказательной способности (одна победа из 15 внутри выборки против распределения GED, ноль побед по всем остальным тестам). Несмотря на большое число параметров и наличие асимметрии, эта модель уступает моделям с GED-распределением и  $t$ -распределением. Вероятная причина более низкого качества данной модели в том, что она представляет собой модификацию модели с нормальным распределением. Разложение истинной условной функции плотности в ряд Грама – Шарлье производится вокруг функции плотности нормального распределения. Поэтому обрывание ряда Грама – Шарлье на третьем члене дает функцию плотности, пусть и с новыми параметрами, но все еще достаточно похожую на функцию плотности нормального распределения. В результате модель с распределением Грама – Шарлье показывает низкое качество подгонки и предсказательную способность.

Модель с обобщенным распределением ошибки (GED) обходит модель с распределением Грама – Шарлье как по качеству подгонки (14 побед из 15), так и по предсказательной способности (15 побед из 15). Однако данная модель уступает модели на основе  $t$ -распределения со скалярным параметром степеней свободы (ноль побед внутри выборки, два случая эквивалентности и одна победа вне выборки). Условные функции плотности в моделях с распределением GED и  $t$ -распределением со скаляром степеней свободы имеют одинаковое число параметров и строятся по схожему принципу: в обеих есть скалярный параметр, контролирующий величину вероятностной массы в центре распределения ( $\nu = \nu_1 = \nu_2$  для  $t$ -распределения и  $\kappa$  для распределения GED). Поэтому данные модели качественно похожи и превосходство  $t$ -распределения со скаляром степеней свободы над распределением GED объясняется исключительно особенностями форм функций плотности данных распределений: для  $t$ -распределения форма оказывается более удачной при моделировании распределения рассматриваемых финансовых доходностей.

Наконец, модели на основе  $t$ -распределения со скаляром и вектором степеней свободы имеют наивысший рейтинг как по качеству подгонки, так и по предсказательной способности. Для модели со скалярным параметром степеней свободы были рассмотрены случаи от  $\nu_1 = \nu_2 = 2$  до  $\nu_1 = \nu_2 = 10$  с шагом 0,5. Среди этих случаев был выбран тот, в котором обеспечивалось наибольшее доминирование по KLIC-тесту модели с  $t$ -распределением над моделями с распределениями GED и Грама – Шарлье. Таковым оказался случай  $\nu_1 = \nu_2 = 4$ : внутри выборки в нем обеспечивается по 15 побед  $t$ -распределения над распределениями GED и Грама – Шарлье, а вне выборки – 12 побед над распределением GED и 15 побед над распределением Грама – Шарлье. По этой причине в качестве модели на основе  $t$ -распределения со скаляром степеней свободы взят именно случай  $\nu_1 = \nu_2 = 4$ .

Модели с векторным параметром степеней свободы строились путем некоторой корректировки вектора  $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ . При этом сумма степеней свободы сохранялась постоянной на

уровне 8. Таким путем были построены модели с  $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 3,9 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 4,1 \end{pmatrix}$ . Согласно

результатам KLIC-теста, модель с  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 3,9 \end{pmatrix}$  оказывается предпочтительнее модели

с  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$  одновременно внутри и вне выборки в 3 случаях из 15, а модель с

$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 4,1 \end{pmatrix}$  – в 5 случаях из 15. При этом случаи успеха  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,1 \\ 3,9 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,9 \\ 4,1 \end{pmatrix}$

приходятся на непересекающиеся наборы пар индексов.

Таким образом, для 8 из 15 пар рассмотренных фондовых индексов удалось найти модель на основе  $t$ -распределения с вектором степеней свободы, которая является более предпочтительной, чем модель со скаляром степеней свободы одновременно по качеству подгонки к данным и по предсказательной способности. Это показывает, что использование моделей не только с одинаковыми, но и с различными  $v_1$  и  $v_2$  для значительной части рядов позволяет получить более высокие результаты. Проведенные в данной работе расчеты подтверждают, что  $t$ -распределение с вектором степеней свободы может быть полезно при моделировании распределения финансовых доходностей на практике.

В результате, можно сделать следующие выводы. В работе было проведено сравнение некоторых двумерных моделей для логарифмических доходностей индексов крупнейших мировых фондовых рынков. Рассмотрены 4 спецификации условной функции плотности распределения доходностей:  $t$ -распределение с вектором и скаляром степеней свободы, обобщенное распределение ошибки и распределение Грама – Шарлье. С помощью теста, основанного на информационном критерии Кульбака – Лейблера, проведено попарное сравнение оцененных моделей. На основе попарных сравнений получен следующий рейтинг распределений по качеству подгонки модели внутри выборки и предсказательной способности: 1 –  $t$ -распределение со скалярным и векторным параметрами степеней свободы, 2 – обобщенное распределение ошибки, 3 – распределение Грама – Шарлье. Кроме того, показано, что  $t$ -распределение с векторным параметром степеней свободы, которое предложено в работе [3], а в настоящей работе впервые используется в задаче прогнозирования, чуть больше чем в половине рассмотренных случаев является более предпочтительным, чем классическое  $t$ -распределение со скаляром степеней свободы, как по качеству подгонки к данным, так и по предсказательной способности вне выборки.

\* \*

\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балаев А.И. Моделирование многомерных параметрических плотностей финансовых доходностей // Квантиль. 2011. 9. С. 1–22.
2. Балаев А.И. Моменты многомерного  $t$ -распределения с вектором степеней свободы, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции: препринт WP2/2012/03. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2012.

3. *Шведов А.С.* Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение: препринт WP2/2009/01. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009.
4. *Шведов А.С.* К байесовскому анализу матричной линейной модели состояние-наблюдение: препринт WP2/2012/01. М.: Изд. дом НИУ ВШЭ, 2012.
5. *Шведов А.С.* Робастная регрессия с применением  $t$ -распределения и EM-алгоритма // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2011. Т. 15. № 1. С. 68–87.
6. *Шведов А.С.*  $t$ -распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели: препринт WP2/2010/01. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2010.
7. *Azzalini A., Dalla Valle A.* The Multivariate Skew-normal Distribution // *Biometrika*. 1996. 83. P. 715–726.
8. *Branco M., Dey D.* A Class of Multivariate Skew-elliptical Distributions // *Journal of Multivariate Analysis*. 2001. 79. P. 99–113.
9. *Cherubini U., Lucinno E., Vecchiato W.* Copula Methods in Finance. Chichester: Wiley, 2004.
10. *Del Brio E., Niguez T., Perote J.* Multivariate Gram-Charlier Densities: Working Paper. 2008.
11. *Engle R., Kroner K.* Multivariate Simultaneous Generalized ARCH // *Econometric Theory*. 1995. 11. P. 122–150.
12. *Fernandez C., Osiewalski J., Steel M.* Modeling and Inference with  $v$ -spherical Distributions // *Journal of the American Statistical Association*. 1995. 90. P. 1331–1340.
13. *Fernandez C., Steel M.* Multivariate Student- $t$  Regression Models: Pitfalls and Inference // *Biometrika*. 1999. 86 (1). P. 153–167.
14. *Fiorentini G., Sentana E., Calzolari G.* Maximum Likelihood Estimation and Inference in Multivariate Conditionally Heteroscedastic Dynamic Regression Models with Student- $t$  Innovations // *Journal of Business and Economic Statistics*. 2003. 21. P. 532–546.
15. *Giller G.* A Generalized Error Distribution. Giller Investments Research Note 20031222/1, 2005.
16. *Hansen B.* Nonparametric Conditional Density Estimation: Working Paper. 2004.
17. *Kullback S., Leibler R.* On Information and Sufficiency // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1951. Vol. 22. № 1. P. 79–86.
18. *Liu C., Rubin D.* ML Estimation of the  $t$ -distribution Using EM and its Extensions, ECM and ECME // *Statistica Sinica*. 1995. 5. P. 19–39.
19. *Lucas A.* Robustness of the Student- $t$  Based M-estimator // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. 1997. 26 (5). P. 1165–1182.
20. *Mauleon I., Perote J.* Estimation of Multivariate Densities with Financial Data: The Performance of the Multivariate Edgeworth – Sargan Density. Proceedings of the 12<sup>th</sup> Australian Finance and Banking Conference. Sidney, 1999.
21. *Nadaraya E.* On Nonparametric Estimates of Density Functions and Regression Curves // *Theory of Applied Probability*. 1965. 10. P. 186–190.
22. *Samorodinsky G., Taqqu M.* Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. L.: Chapman & Hall, 1994.
23. *Silvennoinen A., Terasvirta T.* Multivariate GARCH Models: SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 669. 2008.
24. *Silverman B.* Density Estimation for Statistics and Data Analysis. L.: Chapman & Hall, 1986.
25. *Vuong Q.* Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-nested Hypotheses // *Econometrica*. 1989. 57. P. 307–333.
26. *Watson G.* Smooth Regression Analysis // *Sankhya*. 1964. 26. P. 359–372.

## Multivariate Financial Time Series Analysis: A Comparison of Approaches to Modeling Heavy Tails

**Balaev Alexey**

National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101990, Russian Federation.  
E-mail: a.balaev@gmail.com

In this paper we compare several well-known probabilistic models for returns on key global stock market indices along with a new probabilistic model based on  $t$ -distribution with vector of degrees of freedom. The models are compared in terms of in-sample fit and out-of-sample predictive ability for the whole conditional density function. The focus is on the effects produced by the shape of density function, especially multivariate heavy tails. We consider  $t$ -distribution with scalar and vector of degrees of freedom as well as modifications of multivariate normal distribution, which allow heavy tails: generalized error distribution and Gram – Charlier distribution. We conduct pairwise comparisons of estimated models using a test based on Kullback – Leibler information criterion. We then rank the models according to their quality of fit and predictive ability and discuss the possible reasons of superiority of this or that density specification over others.

**Key words:** multivariate distribution of returns; heavy tails; Kullback – Leibler information criterion.

\* \*  
\*

### References

Balaev A.I. (2011) Modelirovanie mnogomernykh parametricheskikh plotnostej finansovykh dohodnostej [Modeling Multivariate Parametric Densities of Financial Returns]. *Quantile*, 9, pp. 1–22.

Balaev A.I. (2012) *Momenty mnogomernogo  $t$ -raspredelenija s vektorom stepenej svobody, odnomernye marginal'nye funkicii plotnosti i harakteristicheskie funkicii* [Moments of the Multivariate  $t$ -distribution with Vector of Degrees of Freedom, the Univariate Marginal Density Functions and Characteristic Functions]. Working Paper WP2/2012/03, Moscow: HSE.

Shvedov A.S. (2009) *Beta-raspredelenie sluchajnoj matricy i ego primenenie v modeli sostojanie-nabljudenie* [Matrix Variable Beta Distribution with Application to State Space Models]. Working Paper WP2/2009/01, Moscow: HSE.

Shvedov A.S. (2012) *K bajesovskomu analizu matrichnoj linejnoj modeli sostojanie-nabljudenie* [Bayesian Analysis of the Linear Matrix-Variable State Space Model]. Working Paper WP2/2012/01, Moscow: HSE.

Shvedov A.S. (2011) Robastnaja regressija s primeneniem t-raspredelenija i EM-algoritma [Robust Regression Using the t-distribution and the EM Algorithm]. *HSE Economic Journal*, vol. 15, no 1, pp. 68–87.

Shvedov A.S. (2010) *T-raspredelenie sluchajnoj matricy i ego primenenie v regressionnoj modeli* [Matrix Variate t-distribution with Application to Regression Models]. Working Paper WP2/2010/01, Moscow: HSE.

Azzalini A., Dalla Valle A. (1996) The Multivariate Skew-normal Distribution. *Biometrika*, 83, pp. 715–726.

Branco M., Dey D. (2001) A Class of Multivariate Skew-elliptical Distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 79, P. 99–113.

Cherubini U., Lucinno E., Vecchiato W. (2004) *Copula Methods in Finance*, Chichester: Wiley.

Del Brio E., Niguez T., Perote J. (2008) *Multivariate Gram-Charlier Densities*. Working Paper.

Engle R., Kroner K. (1995) Multivariate Simultaneous Generalized ARCH. *Econometric Theory*, 11, pp. 122–150.

Fernandez C., Osiewalski J., Steel M. (1995) Modeling and Inference with V-spherical Distributions. *Journal of the American Statistical Association*, 90, pp. 1331–1340.

Fernandez C., Steel M. (1999) Multivariate Student-t Regression Models: Pitfalls and Inference. *Biometrika*, 86 (1), pp. 153–167.

Fiorentini G., Sentana E., Calzolari G. (2003) Maximum Likelihood Estimation and Inference in Multivariate Conditionally Heteroscedastic Dynamic Regression Models with Student-t Innovations. *Journal of Business and Economic Statistics*, 21, pp. 532–546.

Giller G. (2005) *A Generalized Error Distribution*. Giller Investments Research Note 20031222/1.

Hansen B. (2004) *Nonparametric Conditional Density Estimation*. Working Paper.

Kullback S., Leibler R. (1951) On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, vol. 22, no 1, pp. 79–86.

Liu C., Rubin D. (1995) ML Estimation of the t-distribution Using EM and its Extensions, ECM and ECME. *Statistica Sinica*, 5, pp. 19–39.

Lucas A. (1997) Robustness of the Student-t Based M-estimator. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 26 (5), pp. 1165–1182.

Mauleon I., Perote J. (1999) Estimation of Multivariate Densities with Financial Data: The Performance of the Multivariate Edgeworth – Sargan Density. Proceedings of the 12<sup>th</sup> Australian Finance and Banking Conference. Sydney.

Nadaraya E. (1965) On Nonparametric Estimates of Density Functions and Regression Curves. *Theory of Applied Probability*, 10, pp. 186–190.

Samorodinsky G., Taqqu M. (1994) *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, London: Chapman & Hall.

Silvennoinen A., Terasvirta T. (2008) *Multivariate GARCH Models*. SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance 669.

Silverman B. (1986) *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, London: Chapman & Hall.

Vuong Q. (1989) Likelihood Ratio Tests for Model Selection and Non-nested Hypotheses. *Econometrica*, 57, pp. 307–333.

Watson G. (1964) Smooth Regression Analysis. *Sankhya*, 26, pp. 359–372.