Теорема о невозможности в задаче пропорционального представительства[1]

Карпов А.В.

Статья посвящена исследованию процедур пропорционального представительства как модели рационального выбора и построению новой аксиоматики в терминах рационального выбора. В первой части работы описаны основные процедуры пропорционального представительства: методы наибольшего остатка, методы делителей, метод квоты, а также порядковые методы, включая правило передачи голосов. В статье представлена классическая аксиоматика систем пропорционального представительства, созданная М. Балински и П. Янгом, и исследованы существующие методы на предмет соответствия этим аксиомам. В основной части работы предложена новая аксиоматика методов пропорционального представительства, построенная на основе теории рационального выбора, проведен анализ описанных методов пропорционального представительства на основе новой системы аксиом и доказана теорема о невозможности существования метода, удовлетворяющего минимальному набору аксиом, а именно свойствам монотонности и нейтральности.

Ключевые слова: системы пропорционального представительства; аксиоматика; теорема о невозможности.

Введение

Проблема пропорционального представительства встречается при формировании органов, принимающих решения – парламентов, комитетов, советов директоров, – в которых необходимо отразить точки зрения разных, иногда конфликтующих сторон. Выбор конкретного решения этой задачи определяет, произойдет ли какое-либо изначальное искажение представительства сторон, что влияет на то, какие решения будет в дальнейшем принимать сам орган. Поэтому изучению систем пропорционального представительства нужно уделить первоочередное внимание.

---

[1] Работа частично поддержана Научным фондом Государственного университета – Высшей школы экономики (грант № 08-04-0008). Автор выражает признательность Ф.Т. Алескерову, без поддержки которого работа не была бы написана, и благодарит В.И. Вольского и М.И. Левина за ценные замечания.

Карпов А.В. – аспирант Государственного университета – Высшей школы экономики (далее ГУ ВШЭ), преподаватель кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ ВШЭ.

Статья поступила в Редакцию в октябре 2009 г.

Развитие систем пропорционального представительства происходило в двух направлениях. Во-первых, по конституции США, Палата представителей формируется пропорционально численности штатов по последней переписи, причем метод не был четко зафиксирован, он несколько раз изменялся. До возникновения парадокса штата Алабама (рассмотрен в работе), при котором штат потерял одного представителя в Палате, выбору процедуры распределения не придавали большого значения, и проблема распределения рассматривалась как чисто арифметическая задача нахождения наилучшего целочисленного решения. После этого задаче пропорционального распределения стали уделять большее внимание.

В Европе изначально существовало большое разнообразие методов, используемых для распределения мест в парламентах [14]. Рассматривалась задача распределения мест между партийными списками. Эта задача математически может быть представлена, так же как и американская, если все информация о предпочтениях избирателей будет сведена к одной, наиболее предпочитаемой альтернативе. Уже в начале XX в. встала задача сравнения методов и выявления требований к процедуре распределения.

Так как большинство методов и в США, и в Европе были кардинальными, то анализ производился на уровне арифметических сравнений точности процедур, предпочтения в этом случае не играли никакой роли. Тщательный анализ систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора до настоящего времени не производился.

Построение такой аксиоматики систем пропорционального представительства, которая включала бы их описание в терминах рационального выбора, является современным развитием моделей описания систем пропорционального представительства.

Основы теории коллективного выбора посвящены методам агрегирования индивидуальных предпочтений. Основной результат теории коллективного выбора, показывающий невозможность построения агрегированных предпочтений общества, заключен в теореме К. Эрроу [2]. У систем пропорционального представительства совершенно другой метод агрегирования, и поэтому они не рассматривались в этом контексте. Задача данной работы провести анализ систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора.

В разделе 1 дана постановка задачи пропорционального представительства. В разделах 2, 3, 4, 5 работы описаны основные группы процедур пропорционального представительства: методы наибольшего остатка, методы делителей, метод квоты и порядковые методы соответственно. В разделе 6 представлена классическая аксиоматика кардинальных методов. В заключительном разделе работы разработана аксиоматика систем пропорционального представительства в терминах коллективного выбора, а также доказана невозможность построения метода, удовлетворяющего минимальному набору аксиом рационального выбора.

1. Постановка задачи пропорционального представительства в терминах рационального выбора

Выборный орган избирается путем голосования за партии (партийные списки). Каждый избиратель из множества N ($|N| = n$) характеризуется предпочтениями, представимыми линейным порядком P на множестве партий A ($|A| = k$). Некоторое правило должно определить представительство каждой партии при заполнении S мест в парламенте

(1) $$F : P^n \to A^S.$$

Итоговый выбор является множеством из S альтернатив, будем считать, что $S > |A| = k$.

Множество участников, для которых альтернатива x является более предпочтительной, чем альтернатива y, обозначается как

(2) $$V(x, y, \vec{P}) = \{i \in N \mid (x, y) \in P_i\}.$$

Процедура пропорционального представительства характеризуется функцией выбора

(3) $$C(\vec{P}, A, S) = \{y \mid y \in F(\vec{P}, A, S)\},$$

результатом которой является множество из S альтернатив, в котором партия x_j повторяется s_j раз. Иногда удобно характеризовать выбор как вектор $(s_1, s_2, ..., s_k)$, где s_j – количество мест у партии j, их сумма будет также равна S. Соответственно вектором $(v_1, v_2, ..., v_k)$ будет обозначаться распределение голосов, отданных за партии; их сумма равна n.

Суть систем пропорционального представительства в распределении мест в парламенте между конкурирующими партиями в наибольшем соответствии с предпочтениями избирателей. Различные методы можно разделить по используемой информации о предпочтениях на кардинальные, в которых каждый избиратель характеризуется лучшим в его предпочтениях кандидатом, и порядковые, в которых учитывается вся информация о предпочтениях (линейный порядок).

В силу простоты процедуры голосования наибольшее распространение получили кардинальные методы, являющиеся функциями от числа первых в предпочтениях наилучших альтернатив:

(4) $$F : Z^n \to A^S,$$

где

(5) $$Z = \{a \mid \forall y \in A \ aP_i y, i \in N\}.$$

Среди кардинальных методов наиболее распространены две группы процедур: методы наибольшего остатка и методы делителей [13].

2. Методы наибольших остатков

В зависимости от общего количества голосов и мест метод определяет квоту, необходимую для получения одного места. На первом шаге определяется точное число мест каждой партии, на втором распределяются целые числа мест у каждой партии, на третьем оставшиеся свободными места распределяются по наибольшим остаткам.

2.1. Метод квоты Хара[2]

Квота определяется как количество голосов, приходящееся на одно место в парламенте

$$q_H(n,k) = \frac{n}{k}. \tag{6}$$

Рассмотрим пример применения квоты Хара при распределении 8 мест. Квота в данном примере будет равна

$$q_H(n,k) = \frac{100000}{8} = 12500.$$

Для получения точного числа мест число голосов делится на квоту. Далее происходит распределение целого числа мест. Нераспределенные места достаются партиям с наибольшими остатками. Рассчитать результат от применения различных процедур пропорционального представительства можно с помощью программы BAZI, созданной в Университете Аугсбурга, Германия (подробное описание данной программы можно найти в [16]).

Таблица 1.

Распределение мест при использовании квоты Хара

Партия	Число голосов	Точное число мест	Целое число мест	Дополнительные места	Распределение мест
A	40500	3,24	3	0	3
B	30000	2,4	2	0	2
C	18000	1,44	1	1	2
D	11500	0,92	0	1	1
Сумма	100000	8	6	2	8

По наибольшим остаткам в данном примере распределяются 2 места, которые достаются партиям C и D с остатками 0,92 и 0,44 места соответственно.

Квота Хара является одним из самых простых методов и широко используется на практике, в частности она применяется при распределении мест в Государственной Думе Российской Федерации.

2.2. Метод квоты Друпа

Квота определяется как минимальное количество голосов, гарантирующее место в парламенте. Действительно, при распределении одного места достаточно иметь половину голосов плюс один голос, при борьбе за два места партия, получившая больше трети голосов, должна иметь хотя бы одно место при любом распределении голосов между остальными партиями. В общем случае квота определяется как

[2] В литературе также встречаются переводы: квота Хэра или квота Хэйра.

(7) $$q_D(n,k) = \left\lfloor \frac{n}{k+1} \right\rfloor + 1.$$

Рассмотрим пример применения метода квоты Друпа при распределении 8 мест. Логика распределения мест сохраняется такой же, как и в предыдущем примере.

Таблица 2.

Распределение мест при использовании квоты Друпа

Партия	Число голосов	Дробное число мест	Целое число мест	Дополнительные места	Распределение мест
A	40500	3,64	3	0	3
B	30000	2,70	2	1	3
C	18000	1,62	1	0	1
D	11500	1,03	1	0	1
Сумма	100000	9,00	7	1	8

Квота при этом равна

$$q_D(n,k) = \left\lfloor \frac{100000}{9} \right\rfloor + 1 = 11112.$$

Метод, использующий квоту Друпа, дает большую сумму дробного числа и в среднем распределяет меньше мест по наибольшим остаткам, что является одним из преимуществ данного метода.

2.3. Другие методы наибольших остатков

Другие квоты еще меньше, чем квота Друпа, поэтому в среднем распределяют еще меньше мест по наибольшим остаткам. Наиболее известные из них являются следующие.

Квота Империали

(8) $$q_I(n,k) = \frac{n}{k+2},$$

усиленная квота Империали

(9) $$q_{RI}(n,k) = \frac{n}{k+3}.$$

Метод наибольших остатков чувствителен к небольшому изменению числа голосов, числа мест для распределения. Известен парадокс штата Алабама, произошедший в конце XIX в., когда штат потерял одно место в палате представителей, несмотря на общее увеличение количества мест в Палате представителей. Было показано, что подобный эффект мог произойти и с другими штатами, если увеличение размера палаты происходило в другое время или в другом масштабе.

Проиллюстрируем данный парадокс на примере. Распределим методом квоты Хара 9 мест при том же распределении голосов. Квота в данном примере будет равна

$$q_H(n,k) = \frac{100000}{9} = 11111.$$

Квота практически равна квоте Друпа при распределении 8 мест, но теперь необходимо распределить 2 дополнительных места, которые, естественно, достанутся не тем партиям, которые получили мандаты при распределении 8 мест при использовании квоты Хара.

Таблица 3.

Распределение мест при использовании квоты Хара. Парадокс штата Алабама

Партия	Число голосов	Точное число мест	Целое число мест	Дополнительные места	Распределение мест
A	40500	3,64	3	1	4
B	30000	2,70	2	1	4
C	18000	1,62	1	0	1
D	11500	1,03	1	0	1
Сумма	100000	9,00	7	1	9

Партия С, ранее имевшая 2 места, при увеличении общего количества мест потеряла 1 место в парламенте, хотя, казалось бы, что каждая партия должна, по крайней мере, сохранить ранее полученные места.

Это оказалось политически неприемлемым, поэтому методы наибольших остатков в США больше не использовались, на смену им пришли методы делителей. Также было показано, что подобные проблемы могут возникнуть при изменении распределения вследствие роста населения штата и даже роста его доли в населении страны.

3. Методы делителей

Методы делителей возникли в качестве альтернативы методам наибольшего остатка. Они исключают парадоксальные ситуации при распределении мест по наибольшим остаткам, с учетом соответствующего подбора квоты.

3.1. Метод Д'Ондта

Нужно найти такую квоту, чтобы при распределении целой части от точного числа мест партии суммарно получить общее количество мест в парламенте.

Применение метода состоит в последовательном делении количества голосов (v) на соответствующие делители

$$d_D(k_i) = k_i + 1, \qquad (10)$$

где k – количество полученных партией мест.

Рассмотрим пример распределения 6 мест, иллюстрирующий применение этого метода.

Таблица 4.

Распределение мест при использовании метода Д’Ондта

Партия	Число голосов	v/1	v/2	v/3	Распределение мест
A	40500	40500(1)	20250(3)	13500(6)	3
B	30000	30000(2)	15000(5)	10000	2
C	18000	18000(4)	9000	6000	1
D	11500	11500	5750	3833,33	0
Сумма	100000				6

Места распределяются последовательно по наибольшим значениям в таблице (ранги указаны в скобках). Первое место получает партия A, имея 40500 голосов на одно место, второе – B при 30000 голосах на место, третье – C и так далее. В итоге партия A получила 3 места, или 13500 голоса в расчете на каждый мандат. Партия D с 11500 голосами осталась без мест.

Таким образом, если выбрать квоту между 11500 и 13500, например 12000, то при распределении целой части от точного числа мест партии суммарно можно получить в точности 6 мест.

Таблица 5.

Метода Д’Ондта

Партия	Число голосов	Точное число мест	Целое число мест
A	40500	3,38	3
B	30000	2,50	2
C	18000	1,50	1
D	11500	0,96	0
Сумма	100000		6

Этот метод склонен распределять большее количество мест крупным партиям и, при прочих равных условиях, делает более выгодным образование объединений партий. Это единственный метод, который является монотонным по количеству голосов и способствует созданию коалиций.

3.2. Метод Сент-Лаге

Нужно найти такую квоту, чтобы при распределении округленного по обычным математическим правилам до ближайшего целого значения точного числа мест партии суммарно получить общее количество мест в парламенте.

Применение метода состоит в последовательном делении количества голосов на соответствующие делители

$$d_D(k_i) = k_i + 0,5, \qquad (11)$$

где k – количество полученных партией мест. Обычно для удобства делят не на последовательность 0,5, 1,5, 2,5, ..., а на 1, 3, 5, ..., что эквивалентно. В реальных избирательных системах, например в Норвегии и Швеции, также используют модифицированный метод Сент-Лаге, при котором ряд делителей начинается с 1,4, 3, 5..., что защищает парламент от прохождения мало популярных, возможно, экстремистских партий.

Рассмотрим пример распределения 6 мест, иллюстрирующий применение этого метода.

Таблица 6.

Распределение мест при использовании метода Сент-Лаге

Партия	Число голосов	v/1	v/3	v/5	Распределение мест
A	40500	40500(1)	13500(4)	8100	2
B	30000	30000(2)	10000(6)	6000	2
C	18000	18000(3)	6000	3600	1
D	11500	11500(5)	3833,33	2300	1
Сумма	100000				6

Распределение мест происходит последовательно, аналогично методу Д'Ондта. В данном примере квота будет находиться в границах между 16200 (8100 × 2) и 20000 (10000 × 2), например 18000.

Таблица 7.

Метод Сент-Лаге

Партия	Число голосов	Точное число мест	Целое число мест
A	40500	2,25	2
B	30000	1,67	2
C	18000	1,00	1
D	11500	0,64	1
Сумма	100000		6

При округлении с помощью обычных арифметических правил до ближайшего целого получим в сумме 6 мест.

Этот метод в среднем не дает преимущества ни малым, ни крупным партиям и не стимулирует процессы объединения и раскола. Кроме того, из всех методов делителей он реже всего нарушает свойство близости к квоте. Балински и Янг [11] рекомендуют этот метод для практического применения.

3.3. Другие методы делителей

Любая возрастающая последовательность, k-й элемент которой находится между числами k и $k+1$, может быть использована для применения метода делителей. Так как места распределяются последовательно, то ситуация с парадоксом штата Алабама возникнуть не может. Эти методы исключают возможность появления и некоторых других парадоксов, поэтому методы делителей сейчас более распространены. Основной недостаток этих методов состоит в том, что итоговое распределение может отличаться от точного числа мест, рассчитанного по квоте Хара, более чем на единицу.

Среди наиболее известных из предложенных методов стоит выделить следующие:

датская система

(12) $$d_{DS}(k_i) = k_i + 1/3,$$

среднее геометрическое

(13) $$d_{GM}(k_i) = \sqrt{k_i\left(k_i+1\right)},$$

среднее гармоническое

(14) $$d_{HM}(k_i) = 2k_i\left(k_i+1\right)/\left(2k_i+1\right),$$

наименьший делитель

(15) $$d_{SD}(k_i) = k_i.$$

Метод Д'Ондта удовлетворят свойству близости квоте снизу (не нарушает нижней границы), а метод наименьшего делителя удовлетворят свойству близости квоте сверху (не нарушает верхней границы). Стоит отметить, что частота нарушения свойства близости к квоте у других методов сильно различается. Наилучшим в этом смысле является метод Сент-Лаге.

Альтернативой, которая лишена многих недостатков методов наибольшего остатка и методов делителей, является метод квоты, разработанный Балински и Янгом [7].

4. Метод квоты

Метод квоты − итеративный метод, распределяющий места последовательно.

1. $C(\vec{P}, A, 0) = \varnothing$.

2. Пусть $C(\vec{P}, A, S)$ − распределение S мест, тогда $S+1$ место достанется партии j, у которой $\tilde{v}_j/(s_j+1) \geq \tilde{v}_i/(s_i+1)$ $\forall i$. Тогда для $C(\vec{P}, A, S+1)$ $s'_j = s_j + 1$ и $s'_j = s_i$ для $i \neq j$.

Балински и Янг доказали, что метод квоты удовлетворяет свойствам близости к квоте и монотонности по числу мест. Они описали класс рекурсивных методов, удовлетворяющих свойствам близости к квоте и монотонности по числу мест.

4.1. Обобщенный метод квоты

Пусть $L(\vec{P}, A, S+1)$ – множество партий, для которых добавление одного места не нарушит нижнюю границу свойства близости к квоте, $U(\vec{P}, A, S+1)$ – соответственно верхнюю границу свойства близости к квоте, тогда процедура описывается следующим образом.

1. $C(\vec{P}, A, 0) = \varnothing$.

2. Пусть $C(\vec{P}, A, S)$ – распределение S мест, тогда $S + 1$ место достанется партии $j \in L(\vec{P}, A, S+1) \cap U(\vec{P}, A, S+1)$ и $s'_j = s_i$ для $i \neq j$.

Стоит отметить, что множество $L(\vec{P}, A, S+1) \cap U(\vec{P}, A, S+1)$ никогда не пусто. Среди данных методов выделяют квоту Д'Ондта, квоту Сент-Лаге и другие. Их различие состоит в том, каким принципом руководствоваться при выборе партии, которой достанется дополнительное место.

5. Порядковые методы

Порядковые методы в отличие от кардинальных используют всю информацию о предпочтениях избирателей. Из-за сложности процедур эти методы практически не применяют в реальных выборах. Основная проблема не в подсчете, а в сложности их понимания избирателями.

5.1. Компромисс большинства

Этот метод использует всю информацию о предпочтениях. Определим множество наилучших альтернатив для i-го индивида.

(16) $$f(P_i, q) = \left\{ y \middle| card(D_i(y)) \leq q \right\}$$

для $q \leq |A| - 1$, где $D_i(y) = \left\{ x \middle| \forall y \in A \ xP_i y \right\}$.

При $q = 0$ множество $f(P_i, 0)$ является множеством недоминируемых элементов, т.е. первых в предпочтениях элементов, которые используется в кардинальных методах. Правило выбора определяется следующим образом.

(17) $$F(\vec{P}, A, q^j) = \bigcup_{|I| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \bigcap_{i \in I} f(P_i, q^j),$$

где $j \in \{1, \ldots, r\}$, $q^1 = 0$, $q^{j+1} = q^j + 1$.

Итоговый выбор

(18) $$C(\vec{P}, A) = \left\{ y \middle| y \in F(\vec{P}, A, q^s) \text{ и } y = \arg \max_{x \in F(\vec{P}, A, q^s)} n(y, x) \right\},$$

где $q^s = \min q^j$ такое, что $F(\vec{P}, A, q^j) \neq \varnothing$; $n(y, x)$ – число избирателей, которые предпочитают yPx.

Этот метод является обобщением процедур типа q-Парето, разобранных в исследованиях [3, 4, 5].

5.2. Правило передачи голосов

Это метод пропорционального представительства, который не является списочным голосованием. Избиратели голосуют за кандидатов, многие из которых пройдут в парламент. Русскоязычный термин (эквивалент англоязычного «single transferable vote») введен в работе [1].

Избиратели указывают на бюллетенях свои предпочтения, причем необязательно ранжировать всех кандидатов, нужно отметить только тех из них, которых действительно желают видеть в парламенте.

Проиллюстрируем метод примером из работы [15]: 100 избирателей принимают участие в выборах 3-х представителей из 7 возможных кандидатов. Предпочтения групп избирателей, указанные в бюллетенях, следующие:

$p \succ q \succ r$ 15 избирателей,
$p \succ r \succ q$ 15 избирателей,
$q \succ r \succ p$ 8 избирателей,
$r \succ p \succ q$ 3 избирателя,
$s \succ t$ 20 избирателей,
$t \succ s$ 9 избирателей,
u 17 избирателей,
v 13 избирателей.

Для прохождения в парламент необходимо набрать количество голосов, равное квоте Друпа

$$q = [100/(3+1)] + 1 = 26.$$

При этом голоса будут переходить от одного кандидата к другому по мере выявления победителей и проигравших.

Таблица 8.

Распределение мест при использовании правила передачи голосов

Кандидат	Подсчет					
	первый	второй	третий	четвертый	пятый	шестой
P	30	−4 = 26	26	26	26	26
Q	8	+2 = 10	+5 = 15	15	15	15
R	3	+2 = 5	−5 = 0	0	0	0
S	20	20	20	+9 = 29	−3 = 26	26
T	9	9	9	−9 = 0	0	0
U	17	17	17	17	17	17
V	13	13	13	13	13	−13 = 0
Непередаваемые голоса	–	–	–	–	+3 = 3	+13 =16

В данном примере кандидат P набрал наибольшее количество первых альтернатив (30 голосов), что на 4 больше, чем необходимо по квоте. Эти 4 голоса передаются следующему по предпочтениям кандидату, в данном случае кандидатам Q и R. Так как кандидатов, набравших квоту, больше нет, то на следующем шаге находится кандидат с наименьшим числом голосов, а именно, кандидат R (с 5 голосами), и его голоса передаются другим кандидатам (следующий по предпочтениям избирателей – кандидат Q). Далее голоса переходят от кандидата T к кандидату S, который набирает необходимую квоту, и остаток его голосов попадает в категорию непередаваемых голосов, так как избиратели не указали в бюллетенях следующую по предпочтениям альтернативу. На последнем шаге исключается кандидат V, чьи голоса также попадают в категорию непередаваемых. В итоге побеждают кандидаты P, S и U, причем кандидат U, в отличие от остальных, так и не набрал квоту.

Правило передачи голосов, являясь системой пропорционального представительства, имеет много общего с мажоритарной системой выборов. Оно дает возможность широкого представительства кандидатам, представляющим территории.

Преимуществом данного метода также является предоставление большей свободы избирателям. Они не обязаны ограничиваться одним выбором, а могут проголосовать за нескольких кандидатов, в том числе и от разных партий. При этом голоса не перейдут к нежелательным кандидатам, так как избиратели их не отмечают. Таким образом, метод открывает возможность дать представительство неорганизованным группам, кроме того, метод значительно уменьшает проблемы, связанные с определением границ и размеров избирательных округов (джерримандеринг).

Технические рекомендации по применению и описание реального использования метода на выборах в начале XX в. можно найти в [14]. В США начала века в отсутствие европейской системы списочного голосования система единого передаваемого голоса являлась синонимом пропорционального представительства.

Недостатками применения метода являются сложность подсчета голосов и некоторая случайность при выборе бюллетеней, которые должны передаваться. В начале века их действительно брали случайным образом и перекладывали в ящики с бюллетенями других кандидатов. Таким образом, процесс подсчета в некоторых случаях исчислялся неделями. При современной компьютерной обработке процесс убыстряется, но все равно будет намного дольше подсчета голосов при обычном голосовании.

Этот метод может привести к следующему эффекту. Если большинство избирателей голосуют за кандидата от партии A, а на вторoе место ставят кандидатов других партий, то при обычном голосовании за партии (партийные списки) эта партия A получила бы большинство, но при системе единого передаваемого голоса большинство эта партия уже не получит. Это не позволяет партиям с единственным или несколькими популярными политиками провести за собой еще нескольких, никому не известных кандидатов. Система стимулирует политическую конкуренцию.

6. Классический аксиоматический подход

Наиболее обширные исследования систем пропорционального представительства проводились в США. Это связано с двухсотлетней историей применения различных методов распределения мест в палате представителей пропорционально численности населения штатов.

Несмотря на то, что Балински и Янг [7, 8, 9, 10, 11] рассматривали численности штатов, мы перепишем свойства в терминах числа голосов и по возможности расширим их формулировкой с наличием предпочтений у избирателей.

Свойства.

1. Симметричность.

Распределение мест не зависит от каких-либо характеристик партий кроме того, как за них голосуют избиратели.

2. Однородность.

Распределение мест не изменится при пропорциональном увеличении числа голосов.

3. Пропорциональность.

Если проблема распределения мест имеет точное решение в целых числах, то оно должно быть распределением.

4. Полнота.

Для каждого распределения существует сходящаяся последовательность долей голосов, дающая то же распределение мест.

5. Попарная справедливость.

Для каждой пары партий i и j невозможно уменьшить сумму

$$\left|v_i - s_i\right| + \left|v_j - s_j\right|,$$

перемещая одно место от одной партии к другой. Единственный метод, удовлетворяющий этому свойству, – метод квоты Хара, который минимизирует суммарное отклонение по всем партиям.

6. Стабильность.

Метод стабилен, если при объединении двух партий x и y их представительность отличается не более чем на одно место.

$$s_x + s_y - 1 \le s_{x\cup y} \le s_x + s_y + 1. \tag{19}$$

Для метода делителей существует следующий критерий, по которому можно определить стабильность метода. Метод делителей с делителями, удовлетворяющими условию

$$d(s_x + s_y) \le d(s_x) + d(s_y) \le d(s_x + s_y + 1), \tag{20}$$

является стабильным [8].

7. Монотонность по числу мест.

Пусть s_x – число мест при S мест к распределению, s'_x – при $S + 1$ место, тогда $\forall x\ s'_x \ge s_x$ или в других терминах

$$C\left(\vec{P}, A, S\right) \subset C\left(\vec{P}, A, S+1\right). \tag{21}$$

8. Монотонность по числу голосов.

Если у i-й партии число голосов возросло, при этом у остальных партий осталось неизменным, то представительство этой партии не должно уменьшиться.

9. Близость к квоте.

Число мест не должно отличатся от квоты более чем на одно место. Это свойство иногда удобно разделяют по отсутствию нарушения верхней и нижней границы близости к квоте.

10. Согласованность.

$\forall t,\ 2 \le t \le k$ должно выполняться

$$C\left(\vec{P}', A, \sum_{i=1}^{t} s_i\right) \subset C\left(\vec{P}, A, S\right), \tag{22}$$

где s_i – количество мест у партий при распределении без ограничения; $\vec{P}$ характеризуется только первыми альтернативами, таким образом, $\vec{P}'$ отражает только тех избирателей, в чьих первых альтернативах стояла одна из первых t партий.

11. Сбалансированность.

Представительность партий с одинаковым набором голосов не должно отличаться более чем на одно место.

Таблица 9.

Свойства систем пропорционального представительства

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Квота Хара	+	+	+	+	+	+	–	–	+	–	+
Квота Друпа	+	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+
Другие методы наибольших остатков	+	+	+	+	–	+	–	–	–	–	+
Метод Д'Ондта	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
Метод Сент-Лаге	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
Датская система	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
Среднее геометрическое	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
Среднее гармоническое	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
Наименьший делитель	+	+	+	+	–	+	+	+	–	+	+
Другие методы делителей	+	+	+	+	–	+/–	+	+	–	+	+
Метод квоты	+	+	+	+	–	+	+	–	+	+	+

Эти свойства разработаны для анализа кардинальных методов, поэтому порядковые методы в данной части работы не рассмотрены. Соответствие методов делителей шестому свойству зависит от выполнения условия (20).

Теорема 1 (о невозможности) [Балински, Янг, 1982].

При $k \geq 4$, $S \geq k+3$ не существует частного метода (partial method[3]), одновременно удовлетворяющего свойствам монотонности по числу голосов и близости к квоте.

Доказательство.

Рассмотрим вектор точных квот $\tilde{v} = (5+\varepsilon, 2/3, 2/3, 2/3-\varepsilon, b_5, \ldots, b_k)$, где $b_5, \ldots, b_k$ – натуральные числа, их сумма равна $S-7$ и $\varepsilon > 0$. Пусть $\vec{s}$ – некоторое распределение мест, тогда $s_1 \geq 5$ и $s_2 + s_3 + s_4 = S - 5 - (S-7) = 2$. По монотонности получим, что $s_4 = 0$.

Теперь рассмотрим другое распределение точных квот

$$\tilde{v}' = (4-\varepsilon, 2-\varepsilon/2, 1/2+\varepsilon/2, 1/2+\varepsilon, b_5, \ldots, b_k).$$

Пусть $\vec{s}'$ – некоторое распределение мест. По свойству близости к квоте $s_1' \leq 4$, $s_2' \leq 2$, $s_i' = b_i$ для $i \geq 5$. Тогда либо партия 3, либо партия 4 должны иметь одно место. По монотонности по числу голосов это – партия 4.

Таким образом, $s_4' > s_4$, $s_1' < s_1$, по монотонности по числу голосов должно выполняться $\tilde{v}_1' / \tilde{v}_4' < \tilde{v}_1' / \tilde{v}_4'$, т.е. $(4-\varepsilon)/(1/2+\varepsilon) < (5+\varepsilon)/(2/3-\varepsilon)$ или $\varepsilon > 1/61$, что не выполняется для достаточно малых ε. ■

Заметим, что при ослаблении условий с требования монотонности по числу голосов до монотонности по числу мест такой метод находится, это – метод квоты.

7. Свойства систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора

Опишем аксиоматику систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора. Часть свойств будут повторять аксиоматику систем пропорционального представительства, только в другой терминологии [6], часть свойств расширены, некоторые трансформированы из классической теории выбора [3, 4, 5].

Свойства.

1. Независимость от посторонних альтернатив.

Для любого разбиения альтернатив на $(J \cup \bar{J}) = A$ выбор останется неизменным

$$C(\vec{P}, J, \sum_{j \in J} s_j) \cup C(\vec{P}, \bar{J}, \sum_{j \in \bar{J}} s_j) = C(\vec{P}, A, S). \tag{23}$$

Это свойство напоминает свойство согласованности, но значительно отличается от него тем, что при разбиении изменяются первые альтернативы избирателей.

Такие свойства, как анонимность, нейтральность, единогласие, монотонность и ненавязанность [2, 12] являются модификацией условий из теоремы Эрроу о невозможности.

2. Единогласие.

Если $V(x, y, \vec{P}) = N$, то $s_x \geq s_y$.

[3] Метод, принимающий число партий и число мест как заданные параметры и оперирующий только числом голосов.

3. Монотонность.

Если $V(x,y,\vec{P}) \subset V(x,y,\vec{P}')$, то $s_x \le s'_x$, $s_y \ge s'_y$.

4. Ненавязанность.

$$\forall C \in A^S \exists \vec{P} : C = C\left(\vec{P}, A, S\right).$$

5. Анонимность.

Выбор не зависит от индекса участника i в профиле $\vec{P}$.

6. Нейтральность.

Выбор основывается только на предпочтениях и не зависит от других характеристик партий. В классической аксиоматике систем пропорционального представительства это свойство называется симметричностью.

7. Условие отбрасывания.

Если исключить партии, не получившие места, то распределение не должно измениться.

8. Согласие модифицированное.

$\forall X', X'' \in 2^A$ из $X = X' \cup X''$ следует $C\left(\vec{P}, X', S\right) \cup C\left(\vec{P}, X'', S\right) \supseteq C\left(\vec{P}, X, S\right)$.

Таблица 10.

Свойства систем пропорционального представительства в терминах рационального выбора

	1	2	3	4	5	6	7	8
Квота Хара	–	+	–	+	+	+	–	–
Квота Друпа	–	+	–	+	+	+	–	–
Другие методы наибольших остатков	–	+	–	+	+	+	–	–
Метод Д'Ондта	–	+	–	+	+	+	–	+
Метод Сент-Лаге	–	+	–	+	+	+	+	+
Датская система	–	+	–	+	+	+	–	+
Среднее геометрическое	–	+	–	+	+	+	+	+
Среднее гармоническое	–	+	–	+	+	+	+	+
Наименьший делитель	–	+	–	+	+	+	+	+
Другие методы делителей	–	+	–	+	+	+	+/–	+
Метод квоты	–	+	–	+	+	+	+	+
Правило передачи голосов	–	+	–	+	+	+	+	+

Выполнение седьмого свойства для методов делителей зависит от значения первого делителя. Если он равен нулю, т.е. хотя бы по одному месту достается каждой партии, то свойство выполняется, в противном случае методы делителей этому свойству не удовлетворяют. Выполнение восьмого свойства во многом зависит от свойства монотонности по числу голосов. Классическое свойство согласия практически теряет смысл, так как оно невыполнимо для традиционных методов пропорционального представительства.

Лемма 1.

Пусть $V(x,y,\vec{P}) \subset V(t,z,\vec{P}) \quad x,y,t,z \in A$, выполняется монотонность, нейтральность, тогда $s_t \geq s_x$ и $s_y \geq s_z$.

Доказательство.

Рассмотрим профиль $\vec{P}'$, в котором альтернативы x, y стоят на месте альтернатив t, z соответственно, тогда

$$V(x,y,\vec{P}) \subset V(x,y,\vec{P}').$$

Из свойства монотонности следует, что

$$s_x \leq s'_x \text{ и } s_y \geq s'_y.$$

Согласно нейтральности представительство должно сохраниться независимо от названий альтернатив, тогда

$$s_t = s'_x \text{ и } s_z = s'_y.$$

Из этого следует, что

$$s_x \leq s_t \text{ и } s_y \geq s_z. \blacksquare$$

Лемма 2 (о двух альтернативах).

Если число альтернатив равно 2 и процедура удовлетворяет свойствам монотонности, анонимности, нейтральности, то при

$$card(V(x,y,\vec{P}')) > n/2 \quad x,y \in A$$

будет выполняться $s_x \geq s_y$.

Доказательство.

В силу выполнения анонимности и нейтральности выбор s_x зависит только от $card(V(x,y,\vec{P}))$ и общего количества мест к распределению для альтернатив x, y. По монотонности s_x не убывает по $card(V(x,y,\vec{P}'))$ при различных $\vec{P}'$. При

$$card(V(x,y,\vec{P})) > N/2$$

из

$$card(V(x,y,\vec{P}')) > card(V(y,x,\vec{P}'))$$

следует $s_x \geq s_y$. $\blacksquare$

Если число распределяемых мест нечетно, а голоса разделились поровну, то процедура может дать множество решений. Если число мест четно, а голоса разделились поровну, то процедура, удовлетворяющая свойствам монотонности, анонимности, нейтральности, распределит места поровну.

Из Леммы 2 можно получить следующие следствия.

Следствие 1.

Если процедура удовлетворяет свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности, то победитель Кондорсе получит наибольшее число мест.

Доказательство.

Так как свойство независимости от посторонних альтернатив выполнено, то для определения соотношения между s_x и s_y, где $y \neq x$, достаточно рассмотреть

$$C(\vec{P}, \{x, y\}, s_x + s_y).$$

Это позволяет воспользоваться результатами Леммы 2. Если альтернатива x является победителем Кондорсе, то

$$\forall y \in A, y \neq x \quad card(V(x, y, \vec{P})) > n/2,$$

из чего следует, что $s_x \geq s_y$. Победитель Кондорсе набирает наибольшее количество мест. ■

Следствие 2.

Если процедура удовлетворяет свойствам независимости от посторонних альтернатив, монотонности, анонимности, нейтральности и ненавязанности, то из

$$V(x, y, \vec{P}) = N \quad x, y \in A$$

следует $s_y = 0$.

Доказательство.

В силу свойства независимости от посторонних альтернатив распределение мест между любыми двумя альтернативами зависит только от $V(x, y, \vec{P})$, $x, y \in A$. По анонимности и нейтральности выбор s_x может зависеть только от $card(V(x, y, \vec{P}))$ и общего количества мест к распределению для альтернатив x, y.

Так как процедура является ненавязанной, то должен существовать профиль, при котором все места достанутся партии x. Если при некотором профиле предпочтений партия x получает все, а партия y ничего, то по монотонности это распределение сохранится и при профиле, где

$$V(x, y, P') = N. ■$$

Теорема 2 (о невозможности).

Для $n \geq 3$ и $k \geq 3$ не существует процедур, одновременно удовлетворяющих свойствам монотонности, нейтральности.

Доказательство.

Рассмотрим профиль для $n = 3$, $A = \{x, y, z\}$.

$$\begin{array}{c} x\ y\ z \\ y\ z\ x \\ z\ x\ y \end{array}$$

По лемме 1 из

$$V(x, z, \vec{P}) \subset V(y, z, \vec{P})$$

следует

$$s_y \geq s_x \text{ и } s_z \geq s_z.$$

Аналогично получим

$$s_z \geq s_y \text{ и } s_x \geq s_z.$$

Таким образом,

$$s_z \geq s_y \geq s_x \geq s_z,$$

что приводит к

$$s_z = s_y = s_x.$$

Это условие невыполнимо при S, не кратном 3. ■

Полученный результат является аналогом теоремы о невозможности Эрроу, которая была доказана для мажоритарных процедур агрегирования. Проблему возникающей данного типа невозможности можно описать следующим образом. Если структура политических предпочтений общества изменяется, то не существует системы пропорционального представительства, использование которой могло бы адекватно отразить это изменение. Например, популярность социалистических идеалов в обществе может падать, а представительность партий, разделяющих эту идеологию, может не уменьшаться. Другим примером является распределение мест в совете директоров пропорционально голосующим акциям. Использование одной и той же процедуры также неизбежно исказит представительство по сравнению с реальными изменениями в структуре собственников голосующих акций.

Как и в случае с теоремой Эрроу, напрашиваются разные пути получения положительного решения задачи. Одним из таких путей является использование вероятностных методов распределения мест. Однако это не самый удачный способ решения проблемы из-за возникновения неопределенности (партия получает место с некоторой вероятностью), что недопустимо в реальных системах пропорционального представительства. Другим возможным решением проблемы невозможности является ослабление аксиом, что, по аналогии с эрроувскими моделями [4], приведет к расширению и, возможно, описанию новых классов процедур пропорционального представительства.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алескеров Ф.Т., Ортешук П.* Выборы. Голосование. Партии. М., 1995.
2. *Эрроу К.Дж.* Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: ГУ ВШЭ, 2004.
3. *Aizerman M., Aleskerov F.* Theory of Choice. Elsevier: North-Holland, 1995.
4. *Aleskerov F.* Categories of Arrovian Voting Schemes // Handbook of Economics 19, Handbook of Social Choice and Welfare. Vol. 1 / K. Arrow, A. Sen, K. Suzumura (ed.). Elsevier Science B.V., 2002. P. 95–129.
5. *Aleskerov F., Cinar Y.* «Q-Pareto Scalar» Two-stage Extremization Model and its Reducibility to one Stage Model // Theory and Decision. 2008. Vol. 65. P. 325–338.
6. *Balinski M., Ramirez V.* Parametric Methods of Apportionment, Rounding and Production // Mathematical Social Studies. 1999. Vol. 37. P. 107–122.
7. *Balinski M., Young P.* Apportionment Schemes and the Quota Method // The American Mathematical Monthly. 1977. Vol. 84. № 6. P. 450–455.
8. *Balinski M., Young P.* Stability, Coalitions and Schism in Proportional Representation Systems // The American Political Science Review. 1978. Vol. 72. P. 848–858.
9. *Balinski M., Young P.* The Jefferson Method of Apportionment // SIAM Review. 1978. Vol. 20. № 2. P. 278–284.
10. *Balinski M., Young P.* Criteria for Proportional Representation // Operations Research. 1979. Vol. 27. № 1. P. 80–95.
11. *Balinski M., Young P.* Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote. New Haven, CT: Yale University Press, 1982.
12. *Geanakoplos J.* Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem: Cowles Foundation Discussion Paper. 1123RRRR. 2004.
13. *Grilli di Cortona P., Manzi C., Pennisi A., Ricca F., Simeone B.* Evaluation and Optimization of Electoral Systems. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
14. *Hoag C.G., Hallett G.H.* Proportional Representation. N.Y.: The Macmillan Company, 1926.
15. *Lijphart A.* Electoral Systems and Party Systems. A Study of Twenty-Seven Democracies 1945–1990. Oxford University Press, 1994.
16. *Maier S., Pukelsheim F.* Bazi: A Free Computer Program for Proportional Representation Apportionment: Preprint Institut für Mathematik. Universität Augsburg. № 042/2007–11. December 2007.