

УДК 336

DOI: 10.17323/1813-8691-2025-29-4-551-588

## Осцилляции макродинамики денег и долга

Смирнов А.Д.<sup>1</sup>

Моделируется взаимодействие денег и долга, которое рассматривается как линейный, инвариантный во времени процесс гомеостазиса, реализуемого финансовым клирингом. Модель макрофинансового осциллятора объясняет циклическое поведение агрегата кредиторов, компенсирующих ожидаемые потери, вызванные расширением совокупных заимствований. Эмпирически этот процесс может выражаться в аperiодических массовых распродажах долговых инструментов, известных как действия «bond vigilantes». На современной фазе глобальной финансиализации экономики такие реакции долгового рынка способны порождать серьезные стрессы и значительные социально-политические издержки.

Взаимосвязанные процессы осцилляций и ротации макрофинансовой системы раскрывают каузальные связи денег, займов, долгов и богатства. Эмиссия денег, и их трансформация в новые заимствования, моделируется импульсной функцией Дирака. Решение ОДУ осциллятора методом функции Грина позволяет вычислять реакции долгового рынка и траектории его динамики для различных монетарных и макропруденциальных воздействий. Это, в частности, помогает объяснению парадокса «неограниченной» денежной эмиссии, известного с XVI в.

Численная имитация модели достаточно точно воспроизвела реакцию глобального долга на денежную эмиссию в условиях грандиозного «провала рынка», спровоцированного пандемией «COVID-19». Дальнейшее изучение макрофинансовых осцилляций позволит рассчитывать объемы совокупного долга, гарантированно погашаемых денежной массой, когерентной стоимости товаров и услуг.

**Ключевые слова:** глобальный долг; денежная эмиссия; функция Дирака; финансовый клиринг.

---

<sup>1</sup> В основе статьи лежит доклад автора на XXV Ясинской (Апрельской) международной научной конференции, участником которой автор искренне благодарен за содержательную дискуссию и ценные замечания. Особую признательность автор выражает анонимному рецензенту статьи.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

**Смирнов Александр Дмитриевич** – заслуженный деятель науки РФ, д.э.н., профессор Научно-исследовательского университета Высшей школы экономики. E-mail: adsmir@hse.ru

Статья поступила: 25.08.2025/Статья принята: 06.11.2025.

**Для цитирования:** Смирнов А.Д. Осцилляции макроэкономики денег и долга. *Экономический журнал ВШЭ*. 2025; 29(4): 551–588.

**For citation:** Smirnov A.D. Oscillations of Money and Debt Dynamics. *HSE Economic Journal*. 2025; 29(4): 551–588. (In Russ.)

You can always afford to kill a creditor,  
but no one ever kills a debtor.  
Graham Greene, “*The Comedians*”

## 1. Введение: гомеостазис, деньги и долги

Гипотеза цикличности – одна из наиболее исследуемых в экономической теории [Britannica]. Интерес экономистов к этой проблеме более чем оправдан, поскольку установление периодичности процесса существенно повышает точность предсказаний, следовательно, и надежность управления. Между тем разработка осцилляторов в экономике и финансах далеко не приоритетное направление исследований.

### 1.1. Краткая предыстория проблемы

Пионерная работа по экономическим осцилляторам принадлежит Рагнару Фришу [Frish, 1933]. Этот известный экономист убедительно раскрыл необходимость исследования природы экономических колебаний, используя, в том числе, теорию волн, разработанную в физике, электротехнике и передаче сигналов.

Осцилляторы тесно связаны с решениями дифференциальных уравнений, которые давно применяются в экономике. Так, Е. Домар исследовал процессы экономического роста с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка [Domar, 1957], а уравнения второго порядка лежат в основе модели экономического «акселератора», разработанной П. Самуэлсоном. Решение этих уравнений наряду с описанием основ теории колебаний излагаются во многих учебных пособиях по экономике и финансам [Allen, 1955; Chiang, 1984; Cherny, 2009]. Следует отметить широкое применение в финансах рядов и преобразований Фурье, методов спектрального анализа экономических временных рядов [Granger, Hatanaka, 1964], а также интересные эксперименты с моделями квантовых осцилляторов [Ye, Huang, 2008].

Особое место в исследовании цикличности экономики принадлежит Ирвингу Фишеру [Fisher, 1933]. Его статья «Теория долга и дефляции великих депрессий» содержит указания на совокупную задолженность (debt) и покупательную способность денег (the purchasing power of the monetary unit) как на важнейшие факторы макрофинансового цикла.

Точность научного предвидения И. Фишера стала очевидной спустя почти столетие с момента публикации его работы. За это время глобальная финансовая интеграция, ускорившаяся примерно с 70-х годов прошлого столетия, практически завершила интеграцию реальных и финансовых рынков. Номинальная стоимость глобального долга на начало 2025 г. превысила 324 трлн долл. при мировом ВВП порядка 110 трлн долл. [IIF, 2025]. Современные центральные банки функционируют как основные регуляторы экономики,

а требование погашения долга стало одним из важнейших императивов развития социально-экономической системы.

### 1.2. Джеймс Тобин о денежном стандарте

Производство и потребление, сбережения и инвестиции, заимствования и платежи в погашение долга балансируются веками, хотя и далеко не идеально, через потрясения, коррекции и кризисы. Реальная экономика, представляя комбинацию и рекомбинацию разнообразных ресурсов, товаров и услуг, требует единой меры, которая реализуется посредством денег в масштабах, соответствующих объемам экономических операций. Балансирование реального и монетарного аспектов воспроизводства, иначе, денег и финансовых активов со стоимостью ресурсов, товаров и услуг, поддерживается различными механизмами финансового гомеостаза. Они изучаются со времен Конфуция и Аристотеля (экономика и хрематистика по Аристотелю), но сложность процессов такова, что даже сейчас балансирование экономики – скорее искусство, чем результат применения точных методов.

Термин «гомеостазис» в энциклопедическом эссе Дж. Тобина «Деньги» не использовался, но его трактовка феномена денег в точности следовала данному определению [Tobin, 1987]. Он полагал, что установление материального стандарта монетарной единицы, или «commodity money», частным случаем которого является «золотой» стандарт, является естественным, но весьма непростым, способом поддержания сбалансированности реального и монетарного аспектов производства, иначе, гомеостаза. Однако такой подход, по его мнению, связан не только с трудностями расчетов, а с необходимостью поддержания стандарта монетарной политикой, которая будет неизбежно вызывать резкие колебания реального производства. Альтернатива, как следует из анализа Тобина, заключается в балансировании финансов. Соглашаясь с его выводом, добавим, что такой способ достижения равновесия монетарной и реальной сторон экономики эффективен для процессов гомеостатического характера.

Категория «производных» (derivative) денег требует специального обсуждения. Она трактуется Тобином как «обещание» выплачивать «базовые» деньги и включает «...банковские депозиты, и все другие долги, частные и общественные, деноминированные в долларах, которые должны быть выплачены в оговоренные сроки, либо завтра, либо 30 лет спустя» [Tobin, 1987, p. 772]. Такое определение «производных денег» охватывает широкий класс «исходных» финансовых инструментов (financial underlyings), элиминируя проблему взаимодействия денег и долгов.

Истолкование финансовых активов как «производных» денег, в определенном контексте, не вызывает возражений. Однако деньги и «обещание» денег – это «две большие разницы», как раньше говорили в Одессе. Не углубляясь в дискуссию о правомерности этих категорий, подчеркнем, что в модели финансового осциллятора «обещание» платежей определяется как долговой инструмент, а деньги (money proper) представляют «мгновенно исполненный» долг [Смирнов, 2023, 2024].

Десятилетние облигации не являются средством платежа, с другой стороны, депозиты коммерческих банков формируют «львиную долю» платежных средств. Но если все финансовые инструменты полагать «производными» деньгами, то простой расчет приводит к многократному, и неоправданному, увеличению денежной массы. Например, для «длин-

ной» ставки процента  $r = 0,1$  и времени до погашения  $T = 10$  лет денежная масса в 100 трлн долл. увеличивается почти до 272 трлн долл.,  $100 \exp[0,1 \cdot 10] = 271,83$ .

Деньги реальны: в данный момент или они у вас есть, или их нет, хотя во времени покупательная способность денежной единицы может меняться. Деньги трансформируются в «обещание» платежей, если они зависят не только от текущего времени, но и от времени до погашения некоторого финансового, т.е. долгового, инструмента. Обуславливая выплаты, обещания независимы от наличных денег и органически включают неопределенность.

Экономический смысл банкноты, а особенно, представителя цифровых денег, состоит в том, что деньги есть «мгновенно погашенный» долг. В отличие от текущей рыночной (приведенной) стоимости долга  $B(t, T)$ , деньги (money proper) являются функцией одного аргумента, т.е. выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow t} B(t, T) = B(t, t) = M(t) \quad \forall t \leq T,$$

где  $t$  – фактическое время, а  $T$  – время до погашения долга. Это свойство денег объясняет, почему они служат мерой приведенной (present), номинальной (face) и «вмененной» (notional) стоимости всех рыночных ресурсов и долгов.

### 1.3. Гомеостазис и финансовый клиринг

Финансовый клиринг, тестируя экономическую состоятельность платежей, столетиями поддерживает гомеостазис, обеспечивая, в конечном счете, согласованность монетарного и вещественного аспектов функционирования рынка. Процедуры клиринга осуществляются во времени, длительность и периодичность которых имеют важнейшее значение<sup>2</sup>.

На заре банковского дела клиринг, как таковой, не существовал, и обязательства банкиров (вчерашних менял и золотых дел мастеров), даже потеряв, по разным причинам, свою стоимость, т.е. обеспечение ресурсами, могли длительное время находиться в экономическом обороте. Так, сенат средневековой Венецианской республики был вынужден неоднократно принимать законы, запрещавшие при покупке меди, железа, свинца и т.д. расплачиваться банковскими обязательствами, поскольку их истинная ценность не могла быть установлена до финального платежа [Dunbar, 1892].

Человечество деньги не потребляет, тем более, невозможно потребление долгов. Являясь важнейшей компонентой общественного и личного богатства, деньги не формируют конечную цель экономической эволюции<sup>3</sup>, но их взаимодействие с долгами, связы-

<sup>2</sup> Суть финансового клиринга состоит в подтверждении экономической состоятельности платежей. Для различных видов платежей, рынков, биржевых или банковских систем конкретные характеристики и процедуры финансового посредничества, реализующие клиринг, весьма сложны и разнообразны. В сфере международных валютных расчетов многие положения многостороннего клиринга были развиты в известной статье Е. Шумахера [Schumacher, 1943] и концепции *bancor* Дж. М. Кейнса. Протоколы *general ledger* и *blockchain* современных цифровых денег, гарантирующих экономическую состоятельность платежей, также могут рассматриваться как реализация процессов клирингового характера.

<sup>3</sup> Погоня за деньгами, наряду с ростовщичеством, являются, без сомнения, социальными аберрациями, которые в данной работе не рассматриваются.

вая прошлое, настоящее и будущее социально-экономической системы, образует ядро сопряженных процессов производства, потребления, инвестиций, издержек и доходов. Это взаимодействие лежит в основе сложнейшего тестирования экономической состоятельности периодических платежей («обещаний» денег в будущем), которое происходит в различных социально-экономических формациях. Эти процессы в данной статье рассматриваются в контексте моделирования динамики макродолга как линейного, инвариантного во времени, гомеостатического процесса.

Деньги являются «мгновенно исполненным» долгом, а долг есть «обещание» денежных выплат в будущем. Долг – единственный товар, который на определенных условиях выкупается впоследствии его продавцом, что и предопределяет периодический характер его динамики. Во всех социально-экономических формациях деньги измеряют стоимость товаров и активов, а инвестиции в будущее финансируются, в основном, долгами. Деньги трансформируются в товары и новые долги, а затем, через продажи и погашение, снова конвертируются в деньги, образуя макрофинансовые циклы. В предположении линейности и инвариантности во времени эти циклы моделируются макрофинансовым осциллятором, колебания которого имеют вынужденный и подавленный характер [Smirnov, 2025].

#### 1.4. Предмет настоящего исследования

Модель макрофинансового осциллятора, обобщая стандартное уравнение амортизируемого долга, объясняет поведение агрегата кредиторов, компенсирующих ожидаемые потери, вызванные расширением совокупных заимствований. Модель раскрывает циклическое взаимодействие денег и долгов, соответствующее процедурам монетарного клиринга и способствующее достижению экономической сбалансированности.

Циклическая динамика стоимости долга реализуется во взаимосвязанных процессах осцилляций и ротации макрофинансовой системы. Различные фазы долгового цикла, включая критические явления резонанса, или финансового кризиса, представлены изменениями амплитуды и частоты колебаний макрофинансового осциллятора. Нарушения условий финансового клиринга, или «провалы рынка» (market failures), имеют негативные последствия, такие как скачки недоверия кредиторов к надежности долгов и взрывные распродажи государственных обязательств.

Решение дифференциального уравнения макрофинансового осциллятора методом вычисления функции Грина раскрывает каузальные связи денег, займов, долгов и богатства. Эмиссия денег и их трансформация в новые заимствования моделируются импульсной функцией Дирака. Монетарный импульс, вызывая фундаментальную реакцию долгового рынка, представленную функцией Грина, позволяет вычислять траектории финансовой системы для различных, необязательно периодических, монетарных и макропруденциальных воздействий. Это, в частности, объясняет парадокс «неограниченной» денежной эмиссии, который известен с XVI в.

Численная имитация макрофинансового осциллятора достаточно точно воспроизвела реакцию глобального долгового рынка на беспрецедентную денежную эмиссию, спровоцированную пандемией «COVID-19». Дальнейшее развитие модели и ее экспериментальная апробация позволят вычислять объемы совокупного долга, гарантированно погашаемого денежной массой, когерентной стоимости товаров и услуг.

## 2. Амортизация долга и циклы заимствований

Периодический характер взаимодействия денег и долга становится очевидным при обобщении стандартной модели амортизируемого долга. Эта модель широко используется в финансовой теории и практике, поэтому лишь коротко напомним ее основные характеристики.

### 2.1. Модель амортизируемого долга

Модель амортизируемого долга представлена обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) первого порядка, которое соответствует балансу активов и пассивов заемщика, либо кредитора, за предельно короткое время  $dt$ :

$$(1) \quad dx(t) + c(t)dt = rx(t)dt, \quad x(0) = x_0; \quad 0 \leq t \leq T,$$

где  $x(t)$  – стоимость долга;  $dx(t)$  – изменения стоимости долга за предельно короткий период времени;  $c(t)$  – текущие платежи и  $r = \text{const}$  – ставка доходности (yield) инструмента. Решение уравнения (1) объясняет погашение конкретного долгового инструмента (микродолга) в течение заданного периода времени  $T$ :

$$(2) \quad x(t) = x_0 \exp[rt] - \int_0^t c(z) \exp[-r(z-t)] dz.$$

Если динамика амортизируемого долга следует равенству (2), то стоимость микродолга за указанный период погашается, подтверждая экономическую состоятельность денежных платежей, соответствуя, в определенном смысле, процессу макрофинансового клиринга. Для постоянных величин периодических выплат,  $c(t) = c = \text{const}$ , решение (2) упрощается:

$$(3) \quad x(t) = x_0 \exp[rt] - \frac{c}{r} (\exp[rt] - 1),$$

а в конце периода,  $t = T$ , стоимость полностью амортизируемого долга становится равной нулю,  $x(T) = 0$ .

Каждый индивидуальный долг обязательно погашается за конечный период времени, но в макроэкономической системе погашение долгов сопровождается новыми заимствованиями. Уверенность кредиторов в возврате оговоренных контрактом средств сохраняется, если погашаются долги с общим параметром «взвешенного ожидаемого периода погашения» (weighted average maturity, WAM), масса которых доминирует в общем объеме макродолга. Следовательно, погашение каждого отдельного микродолга, даже на сотни миллиардов долларов, образует лишь элемент полного цикла взаимной трансформации денег, товаров, заимствований и долга.

Идея кругооборота долга, займов, товарных запасов и денег давно используется в финансовой практике, особенно при исчислении величин денежных потоков (cash flows)

и изменений «рабочего капитала» (working capital) в модели конверсионного цикла денег (cash conversion cycle, CCC). Схема трансформации товарных запасов (inventory) в дебиторскую задолженность (accounts receivable, AR), а затем в наличность (cash) и кредиторскую задолженность (accounts payable, AP) представлена на рис. 1. Этот финансовый цикл состоит из четырех фаз (различных состояний системы).

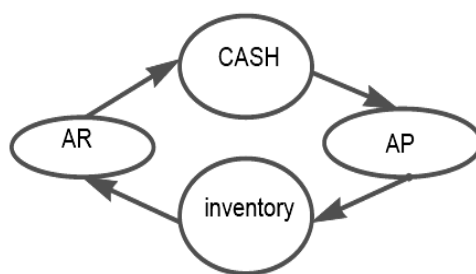


Рис. 1. Финансовый цикл в модели CCC

Отсутствие сомнений в микрофинансовых циклах подобного типа естественно предполагает и существование их макрофинансового аналога. При этом следует иметь в виду, что если за период времени  $T > 0$  микродолг погашается полностью, то выплата макродолга сопровождается формированием новой задолженности, которая по объемам, как правило, не меньше предыдущей. При некоторых, весьма нежестких, предположениях модель амортизируемого долга способна воспроизводить все четыре фазы макрофинансового цикла.

## 2.2. Индекс долга и финансовые стрессы

В макромодели индекс  $b(t)$  представлен простой конструкцией уклонений фактических заимствований  $B$  от равновесных, т.е. полностью погашаемых, объемов долга  $B^*$ :

$$(4a) \quad b = (B - B^*) / (B_{\max} - B^*); \quad b \in [0, 1] \text{ и}$$

$$(4б) \quad b = (B - B^*) / (B^* - B_{\min}); \quad b \in [0, -1].$$

Индекс уклонений долга от равновесия (4) отражает важнейшее свойство макрозаимствований, абсолютный объем которых может быть больше или меньше равновесных объемов, но не может быть полностью погашен<sup>4</sup>. Абсолютные объемы макродолга не

<sup>4</sup> Дж. К. Гелбрейт отметил чрезвычайно интересный факт финансовой истории [Galbraith, 1975]. Оказывается, сокращение задолженности федерального правительства после гражданской войны в США существенно усложнило эмиссию долларов национальными банками, которая, согласно National Bank Act (1863), обеспечивалась исключительно казначейскими обязательствами. В таких условиях амортизация долга стала фактором, не способствовавшим, а затруднявшим экономическое развитие страны. Следует иметь в виду, что эмиссия цифровых стабильных валют (stablecoins)

равны нулю,  $B \neq 0$ , но нулевое значение индекса уклонений макродолга от равновесия  $b(t)$  можно истолковать как отсутствие финансовых напряжений.

Формула (4а) интерпретируется как интенсивность финансового стресса, который достигает максимального значения (+1). Соответственно, формула (4б) характеризует зону «финансового спокойствия», в которой напряжения невелики и носят локальный характер. Таким образом, значение индекса (-1) интерпретируется как отсутствие стресса, вызванное крайне низким спросом на долги, главным образом, из-за экономической депрессии.

Приведенное выше истолкование индекса долга по смыслу аналогично интерпретации индекса «финансового стресса» OFR FSI (рис. 2), разрабатываемого с 2010 г. для коллективного органа стабилизации финансовой системы США [Office of Financial Research]. Следует, однако, иметь в виду, что индекс OFR FSI – конструкция ненаблюдаемая, класса «take it or leave it», которая не отражает причинно-следственные связи долга и денег. Вместе с тем экономическая трактовка этого индекса может быть использована в каузальном контексте детерминированной модели цикла деньги/макродолг.

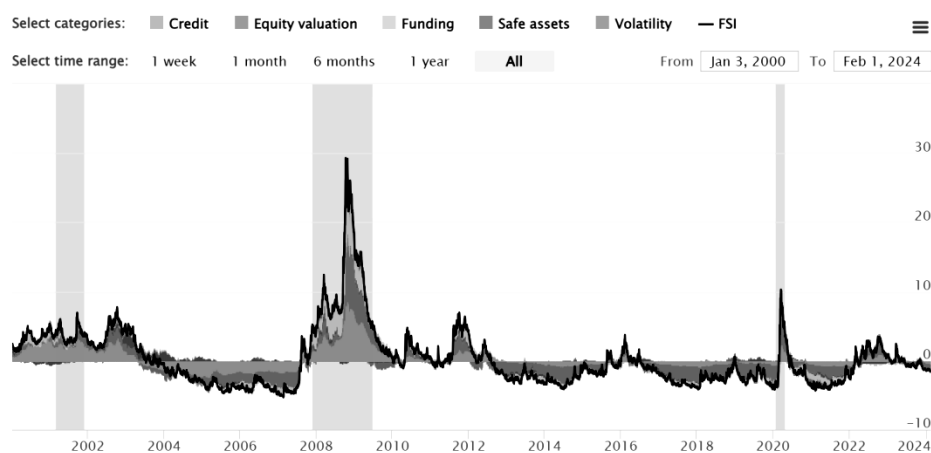


Рис. 2. Индекс OFR FSI

Источник: Office of Financial Research.

### 2.3. Терминальное уравнение амортизации долга

Индекс уклонений макродолга  $b(t)$  с единичным первоначальным объемом,  $b(0) = 1$ , и постоянными выплатами следует уравнению:

$$(3') \quad b(t) = \exp[rt] - \frac{c}{r} (\exp[rt] - 1).$$

связана с современным рынком государственных облигаций США вполне аналогично [Yadav, Malone, 2025].

Для полностью погашаемого за некоторый период  $T > 0$ , т.е. равновесного, долга индекс уклонений, удовлетворяя терминальному условию, становится равным нулю:

$$(5) \quad b(T) = \exp[rT] - \frac{c}{r}(\exp[rT] - 1) = 0.$$

Без ущерба для общности рассуждений можно полагать, что полная амортизация долга происходит на момент удвоения индекса, иначе, выполняется равенство

$$(6) \quad \exp[rT] = \frac{c}{r} = 2.$$

Это условие, в свою очередь, означает, что на временном интервале  $0 \leq t \leq T$  функция амортизации макрофинансового долга (7) принимает простой вид<sup>5</sup>:

$$(7) \quad b(t) = 2 - \exp[rt].$$

В частности, из условия (6) следует, что для полностью погашаемого долга произведение ставки доходности на период погашения равно константе:

$$(8) \quad rT = \ln 2 \cong 0,69,$$

которая используется в известном «финансовом правиле 0,7». Добавим, что совместное решение уравнений (8) и  $\omega T = (2\pi/T) \cdot T = 2\pi$  приводит к важному соотношению «длинной» ставки доходности  $r$  и угловой частоты  $\omega$ :

$$r = (\ln 2 / 2\pi)\omega.$$

Из этого соотношения следует, что примерно 6-летний период погашения глобальных долговых обязательств соответствует единичной угловой частоте  $\omega \cong 1$ .

#### 2.4. Эмпирический анализ государственного долга

Взаимосвязанные характеристики – период погашения,  $T > 0$ , ставка доходности,  $r > 0$  и ставка периодических платежей,  $0 \leq c < 1$ , – позволяют использовать уравнение амортизированного долга (5) в экономическом анализе долговой динамики.

В апреле 2025 г. ставка доходности по 30-летним казначейским облигациям США достигла 5% годовых, а выплаты процентов по государственным обязательствам составили примерно 6% ВВП этой страны. Таким образом, согласно равенству (8), средневзве-

<sup>5</sup> Индекс  $b(t) = \left(1 - \frac{c}{r}\right)\exp[rt] + \frac{c}{r}$ , как общее решение ОДУ уклонений долга от равновесия, при  $(c/r) = 2$  становится равным  $b(t) = 2 - \exp[rt]$ . Экономически важно подчеркнуть, что это строго следует из условия полного погашения долга в точке времени  $t = T$ .

шенный период погашения государственного долга  $T > 0$  (weighted average maturity, WAM) должен равняться примерно 14-ти годам ( $0,05 \times T = 0,69$ ). Однако на конец 2023 г. этот индикатор для сегмента казначейских обязательств оценивался в 6,3 года [Bloomberg, 2023].

Рассогласованность теоретического и эмпирического значений капитализации макрофинансового рынка, которая отражена в финансовом неравенстве

$$c/r = 0,06/0,05 = 1,2 < \exp[\ln 2] = 2,$$

означает невозможность гарантированного погашения за период в 14 лет удвоенной стоимости долга. Таким образом, предупреждения таких профессионалов американского финансового рынка, как Р. Далио [Dalio, 2025], Дж. Даймон и М. Блумберг, о грозящих этой стране долговых дисбалансах, имеют под собой весьма серьезные основания.

## 2.5. Периодическое «расширение» функции амортизируемого долга

На четырех интервалах периода времени  $T > 0$  изменения функции амортизируемого долга (7) в пределах  $[-1,1]$  образуют различные фазы макрофинансового цикла. Они показаны в первой строке табл. 1.

Таблица 1.

Макрофинансовый цикл

T1: $(2 - \exp[rt])$ $t = 0; t = \ln 2/r$	T2: $-(2 - \exp[rt])$ $t = \ln 2/r; t = 0$	T3: $-(2 - \exp[rt])$ $t = 0; t = \ln 2/r$	T4: $(2 - \exp[rt])$ $t = \ln 2/r; t = 0$
Q1: $\cos[t]$ $t = 0; t = \pi/2$	Q2: $\cos[t]$ $t = \pi/2; t = \pi$	Q3: $\cos[t]$ $t = \pi; t = 3\pi/2$	Q4: $\cos[t]$ $t = 3\pi/2; t = 2\pi$
[1,0]	[0,-1]	[-1,0]	[0,1]

Для угловой частоты  $\omega = 1$  последовательность фрагментов функции (7) качественно идентична синусоиде

$$(9) \quad b(t) = \cos(\omega t),$$

где  $\omega = 2\pi/T$  ( $rad/year$ ) – угловая частота долгового процесса, а  $T$  – период погашения долга. Синусоида (9), значения которой изменяются в пределах  $\pm 1$ , стандартизирует макрофинансовый цикл длиной окружности  $[0, 2\pi]$  и воспроизводит четыре фазы состояний долгового рынка, представленного индексом  $b(t)$ .

Состояния рынка долга на рис. 3 даны синусоидой MacroDebt Index,  $b(t)$ . Положительные значения синусоиды снижаются с максимального уровня макрофинансового стресса (+1) до нуля, который соответствует полностью погашаемому долгу. В области отрицательных значений индекс (9) демонстрирует стабильность макрофинансовой системы.

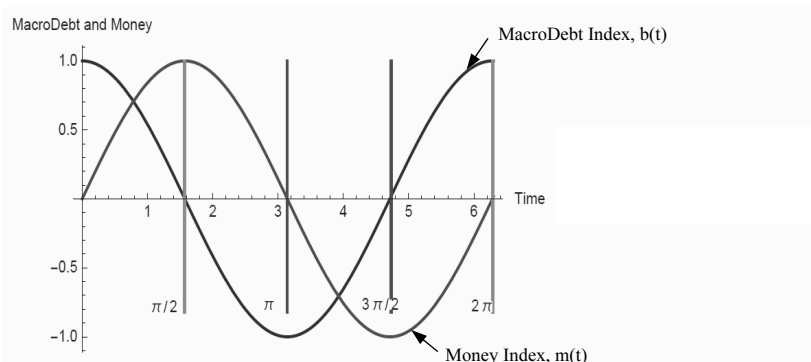


Рис. 3. Циклы денег и макродолга

Углы наклона (производные) синусоиды (9) измеряют поведение макрофинансовой системы, т.е. изменения состояний макродолга, или макрофинансовую «политику». Значения производной синусоиды изменяется от нулевых значений в критических точках  $\pm 1$  до максимальных величин в точках равновесия, где макродолг с периодом амортизации  $T > 0$  полностью погашается. Экономический анализ состояний макрофинансовой системы, их изменений, а также другой синусоиды, Money Index,  $m(t)$ , будет дан в разделе 3.5.

Заслуживает внимания явное сходство синусоиды (9) с траекторией финансового цикла, рассчитанного экспертами Банка международных расчетов [Borio et al., 2018], которые использовали совершенно иные экономические соображения, а также эмпирические данные о поведении американской экономики. На рис. 4 видно, что явно выраженный синусоидальный характер макрофинансовый цикл принимает примерно с середины 80-х годов, т.е. на современной фазе глобального процесса финансовализации экономики.

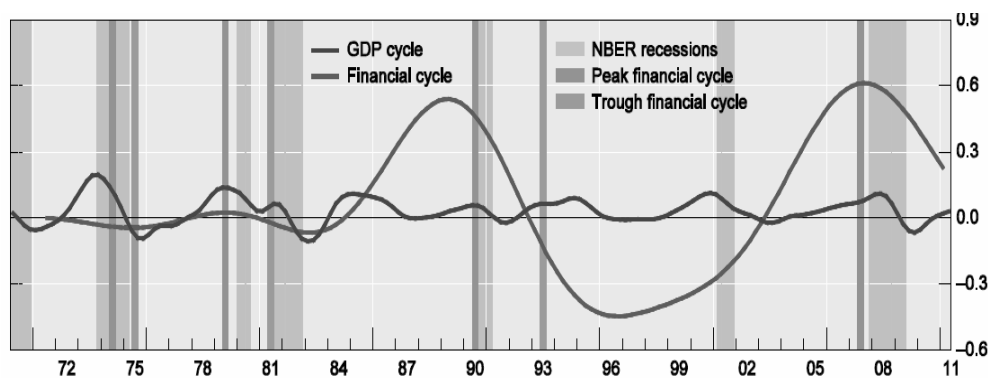


Рис. 4. Финансовый цикл по расчетам BIS

Источник: Borio, 2018.

Процедура установления цикличности накопления и погашения долга, его трансформации в деньги (и наоборот), зафиксированная в первой строке табл. 1, достаточно

громоздка. Вместе с тем синусоидальность совокупности «зеркальных отражений» функции (7) позволяет представить макрофинансовый цикл компактно, как решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, объясняющего поведение инвесторов, компенсирующих ожидаемые потери стоимости растущего долга.

### 3. Модель макрофинансового цикла

Финансовая теория активно изучает феномен «разводнения» стоимости растущего долга (the debt dilution process). Он хорошо известен финансистам и моделируется, как правило, в терминах увеличения вероятности долгового дефолта. Методологически это совершенно оправданно, но уравнения первого порядка не позволяют в полной мере раскрыть циклический характер долгового процесса<sup>6</sup>.

В кратком изложении «разводнение» стоимости растущего долга состоит в следующем. Увеличение заимствований, с точки зрения кредиторов, – необходимое условие прибыльности их бизнеса, но оно справедливо лишь в определенных пределах. Когда спрос на заимствования растет слишком быстро, то увеличение обязательств сопровождается скепсисом кредиторов, утрачивающих уверенность в своевременном возврате заемных средств и процентов за их использование. В таких ситуациях кредиторы стремятся компенсировать ожидаемые потери, занижая, по мере возможности, текущую стоимость приобретаемых долгов.

Особое значение для финансовых циклов имеют периоды внезапных и значительных изменений ожидаемых потерь, которые возникают, как правило, под влиянием событий экзогенного характера, таких как кардинальные изменения монетарной и фискальной политики, различные социально-экономические потрясения, вооруженные конфликты и природные катастрофы. Реакция кредиторов и инвесторов на подобные события убедительно объясняется в рамках гипотезы «bond vigilantes», предложенной Э. Ярдени в 80-х годах [Yardeni, 2018].

Согласно этой концепции, негативно реагируя на перечисленные выше экзогенные события, владельцы долговых инструментов приступают к их массовой продаже, за которой следует резкое падение стоимости активов, рост финансовых напряжений и ухудшение общей экономической конъюнктуры. Только за последние годы подобные действия бдительных «мстителей облигаций» (bond vigilantes) несколько раз обрушили рынки государственных долговых обязательств. Это привело к падению британского правительства осенью 2022 г., а в апреле 2025 г. заставило президента США Д. Трампа отложить сроки введения новых импортных пошлин.

#### 3.1. Ожидаемые потери кредиторов и ОДУ2

В детерминированном контексте размеры потенциальных потерь кредиторов, связанных с возможным дефолтом заемщиков, следуют векторно-матричной системе:

---

<sup>6</sup> Анализ финансовых циклов с помощью осцилляторов первого порядка [Strogatz, 1994] вполне возможен, но моделирование долгового процесса как осциллятора второго порядка представляется более общим и обоснованным подходом.

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{b} &= -m(t) \\ \dot{m} &= kb(t); k > 0, \end{aligned}$$

где  $k$  – параметр занижения рыночной цены макродолга. Экономический смысл этой системы следующий. Производная индекса долга по времени

$$(11) \quad \dot{b} = -m$$

есть определение «скорости» макродолга. Деньги, поступающие на долговой рынок, представлены функцией  $m = m(t)$ , знак минус которой констатирует конвертацию денежной эмиссии в новые долги. Если инвесторы рассчитывают ожидаемые потери на единицу роста стоимости долга,  $dm/db$ , то вторая производная

$$(12) \quad \ddot{b} = -\dot{m} = -\frac{dm}{db} \frac{db}{dt} = m \frac{(-dm)}{db}.$$

показывает величину ожидаемых потерь кредиторов,  $(-dm)/db$ , на единицу увеличения заимствований.

Например, если приращение долга составляет 10% (за год) и каждый процентный пункт приращения долга приносит кредиторам потери в два процентных пункта, то их ожидаемые потери составят 30 базисных пунктов:  $0,1 \times (-0,02) = -0,003$ . Понятно, что при оборотах долгового рынка в триллионы долларов такими потерями пренебрегать никто не будет.

Векторно-матричная система денег и долга (10) эквивалентна следующему ОДУ2:

$$(13) \quad \ddot{b} + kb(t) = 0,$$

где  $k$  – параметр снижения рыночной стоимости долга, определяемый условиями данного рынка. Указанная эквивалентность означает, что уравнение (13) моделирует действия рациональных кредиторов, которые они осуществляют в процессе «разводнения стоимости растущего долга».

Действительное решение уравнения (13) для общего случая комплексно-сопряженных корней:

$$(14) \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-k} = \pm j\omega,$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимое число, может быть записано в синусоидах:

$$(15) \quad b(t) = B \cos(\omega t) + M \sin(\omega t),$$

где константы  $B, M$  определяются начальным положением макрофинансовой системы.

Альтернативно, решение уравнения (13) имеет вид

$$(16) \quad b(t) = R \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $R = (b^2 + m^2)^{0,5}$  – радиус состояния макрофинансовой системы, а  $\varphi = \arctan 2(m/b)$  является углом начального положения системы. Параметр  $\omega = 2\pi/T$  является частотой синусоиды (16), причем из решения (13), предполагающего равенство

$$(-k + \omega^2)R \cos(\omega t + \varphi) = 0,$$

следует, что  $\omega^2 = k$ . По сути, ОДУ (13) воспроизводит полный макрофинансовый цикл, который компактно и адекватно моделируется двумя синусоидами, имеющими экономическую интерпретацию денег и долга соответственно.

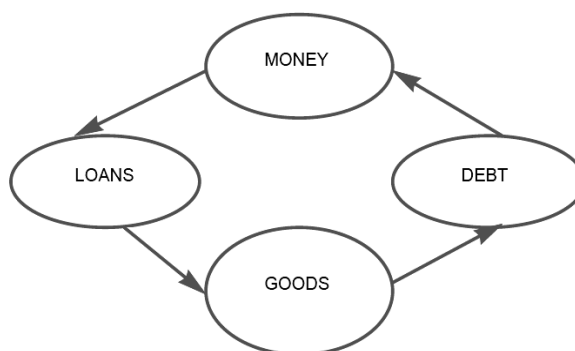


Рис. 5. Макрофинансовый цикл

Фазы макрофинансового цикла, представленные на рис. 5, аналогичны циклу ССС с поправкой на измерение угла ротации против часовой стрелки. Эти фазы стилизуют процессы конвертации долга в деньги, их превращения в займы и производственные инвестиции, последующей продажи товаров, преимущественно в кредит, которая формирует долги, погашаемые в следующем цикле.

Макрофинансовый цикл в нескольких принципиальных моментах обобщает стандартную модель амортизируемого долга. Рассмотрим эти моменты подробнее.

### 3.2. Взаимодействие денег и долга

Помимо долга в модели осциллятора появляется переменная, которая, по экономическому смыслу, интерпретируется как индекс денег  $m = m(t)$ , поскольку именно деньги, в разных формах, в том числе и виртуальной, в течение тысячелетий взаимодействуют с долгами<sup>7</sup>. Индекс денег,  $m = m(t)$ , так же как и индекс долга, в модели представлен

<sup>7</sup> Появление дополнительной координаты состояния системы не следует приуменьшать, поскольку оно резко расширяет возможности экономического анализа. Несколько упрощая, можно сказать, что если для  $n = 10$  число возможных состояний одной координаты не меняется,  $1^{10} = 1$ , то для двух координат число допустимых состояний равно  $2^{10} = 1024$ .

уклонениями фактических значений денежной массы, например, агрегата M2 («широких» денег) от их равновесного объема  $M^*$ :

$$(17a) \quad m = (m - M^*) / (m_{\max} - M^*); \quad m \in [0, 1] \text{ и}$$

$$(17b) \quad m = (M - M^*) / (M^* - M_{\min}); \quad m \in [0, -1].$$

Равновесной денежной массой следует считать количество денег, которое не вызывает роста или падения цен, что аналогично расчетам «естественной» ставки процента К. Викселла. Экономически очевидно, что эта величина не может быть равной нулю.

Экономический долг  $b(t)$  представляет «обещание» (promise) денежных выплат в будущем и измеряется деньгами  $m(t)$  как «мгновенно исполненным» долгом. Единая денежная природа индексов денег и долга отражается известным соотношением синусоид:

$$\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2).$$

Взаимодействие денег и долга является анизотропным процессом ротации и осцилляций долга в отличие от одномерного изотропного процесса его роста или амортизации.

### 3.3. Состояния макрофинансовой системы

В модели осциллятора макрофинансовые состояния представлены комплексной переменной  $z(t)$ :

$$(18) \quad z(t) = b(t) + j m(t) = R(t)(\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)) = R(t) \exp[j \theta(t)].$$

Первое равенство (18) говорит о том, что в декартовой системе координат на плоскости  $\{b, m\}$  состояние макрофинансового рынка есть фазовый вектор (фазор)  $z(t)$ , параметризованный временем. Даже в виртуальной форме деньги, конечно же, вполне реальны – или они у вас есть, либо их нет. Но обещание денег в будущем гарантировано быть не может. Поэтому в первом равенстве формулы (18) долг («журавль в небе») отличается от денег («синицы в руках»), что фиксируется посредством «мнимого» числа  $j = \sqrt{-1}$ .

В полярной системе координат фазор (18) представлен вторым равенством, где  $R(t)$  – амплитуда и  $\theta = \omega t$  – фаза процесса. Третье равенство показывает состояние макрофинансовой системы  $z(t)$  согласно знаменитой формуле Эйлера. Экспоненциальная функция с комплексным показателем степени, для  $R(t) = 1$ ,

$$(19) \quad z(t) = \exp[j \omega t]$$

геометрически есть окружность, или спираль постоянного радиуса, которая представлена на рис. 6. В общем виде спираль имеет непостоянный радиус, а ее сечения в трех

ортогональных плоскостях (долги, время), (деньги, время) и (долги, деньги) воспроизводят процессы осцилляции и ротации макрофинансовых индикаторов.

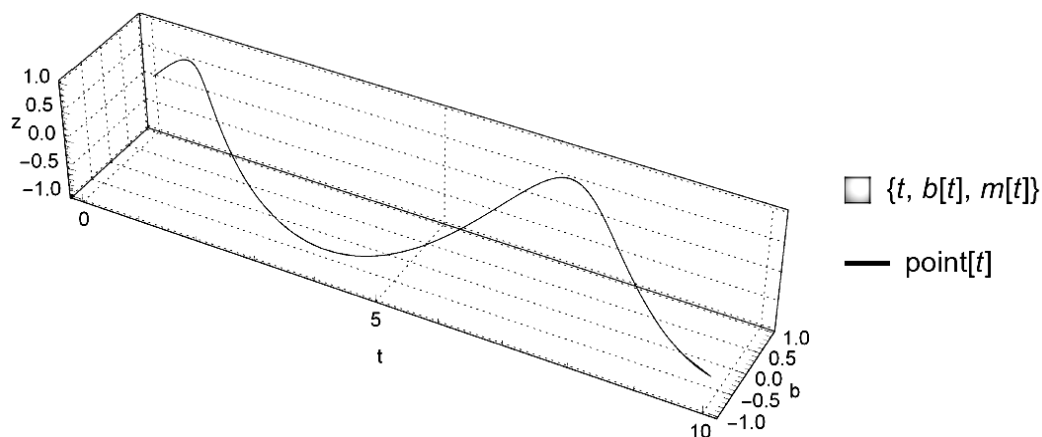


Рис. 6. Динамика состояний макрофинансовой системы

Макроэкономистам уместно напомнить о хорошо документированных многовековых периодах исчисления платежей в виртуальных, иначе «мнимых», денежных единицах. «Мнимость» платежа могла быть следствием как отсутствия эффективного клиринга на ранних этапах развития банковского дела, так и обеспечения виртуальными долгами двухуровневой банковской системы, которая функционирует с конца XVII в. и эмитирует деньги *ex nihilo*.

Мнимость определенной части богатства очевидна, хотя несомненна экономическая реальность как денег, так и долга. Их реальный, действительный характер подтверждается альтернативным представлением ротации, поскольку комплексные числа могут быть записаны в форме кососимметрических матриц специального вида<sup>8</sup> [Alonso, 2025; Hunding University, 2025].

Плоскость комплексных чисел имеет два стандартных базисных вектора  $(1,0)$  и  $(0,1)$ , которые характеризуют различные положения вектора (фазора)  $z$  состояния системы:

$$(20) \quad z = b + jm \mapsto \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>8</sup> Сказанное эквивалентно утверждению о том, что различные компоненты баланса активов и обязательств любой фирмы, т.е. деньги, дебиторскую и кредиторскую задолженность, привести к одному, денежному, измерителю либо невозможно, либо связано со значительными издержками. Поэтому осуществление взаимозачета (debt compression) различных долгов является весьма непростым видом финансового бизнеса, который в Европе сосредоточен, в основном, в швейцарском Цюрихе.

Макрофинансовый цикл, или ротация, поэтому может быть представлен альтернативно либо операциями с комплексными числами  $z$ , либо матрицами действительных чисел  $J$  и  $Z$ :

$$j = \sqrt{-1} \mapsto J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } z = b + jm \mapsto Z = \begin{pmatrix} b & -m \\ m & b \end{pmatrix},$$

$$z = b + jm \mapsto Z = b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Экономическое содержание категорий денег и долга, требующее их обязательного различения как компонент состояния макрофинансовой системы, позволяет изучать поведение рациональных кредиторов с помощью векторно-матричного уравнения:

$$(21) \quad \begin{pmatrix} \dot{b} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix},$$

которое альтернативно характеризует динамику долга и денег (13). Добавим, что экспоненциальная матрица  $\exp[tA] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$  решения системы деньги/долг (21) может

быть приведена к ротационной матрице  $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$  [Yashinski, 2021], которая соответствует гипотезе периодичности процесса погашения долга.

### 3.4. Ротация и клиринг макрофинансовой системы

По мере поступления новой ликвидности интерференция заимствований и погашения долга реализуется как ротация фазора макросистемы, что эквивалентно осцилляциям индексов денег  $m(t)$  и долга  $b(t)$ . Экономический феномен ротации, отсутствующий в стандартном уравнении амортизации долга, является важной характеристикой модели макрофинансового цикла.

Легко показать<sup>9</sup>, что циклическая орбита динамики долга (13), которая параметризована временем  $t$ , формирует замкнутую эллиптическую траекторию и представлена уравнением

$$(22) \quad m^2 + kb^2 = C,$$

и, для  $k = 1$ , представлена окружностью на рис. 7, где состояния макрофинансовой системы показаны на осях координат, а направления их изменений – стрелками.

<sup>9</sup> Следует продифференцировать равенство (22) в предположении ненулевой производной  $db/dt \neq 0$ .

Экономические различия денег и долга очевидны в процессе ротации. В частности, для фазора макрофинансовой системы  $z_1 = b + jm$  состояния, связанные умножением на мнимое число  $j$ , образуют в четырех квадрантах последовательность комплексных чисел:

$$(23) \quad \begin{aligned} z_1 &= b + jm; \\ z_2 &= -m + jb; \\ z_3 &= -b - jm; \\ z_4 &= m - jb; \\ z_5 &\equiv z_1 = b + jm. \end{aligned}$$

Если разные макроэкономические состояния порождены фазором с одинаковым, например, единичным, радиусом, то умножение на мнимое число, уподобляясь операции клиринга, сохраняет их величину. Полный цикл ротации,  $j^4(b + jm) = b + jm$ , констатирует экономическую состоятельность платежей, хотя приведенная выше простая последовательность состояний, конечно же, не моделирует поведение, в буквальном смысле, таких гигантских и сложных клиринговых систем как *CHIPS* или *LCH Clearnet*. Добавим, что макрофинансовые состояния, как сказано в предыдущем разделе, могут быть представлены альтернативно последовательностью соответствующих матриц действительных чисел.

### 3.5. Поведение макрофинансовой системы

Ротация связывает важнейшие макрофинансовые переменные: долг, займы, деньги и товары, взаимодействие которых образует полный цикл. В первом и третьем квадрантах (рис. 7) производные индексов долга и денег, показанные стрелками, соответствуют сочетаниям знаков  $(-, +)$  и  $(+, -)$ , а во втором и четвертом квадрантах представлены комбинациями  $(-, -)$  и  $(+, +)$ . Такие сочетания, поддерживая процесс ротации, отражают инерционность поведения системы, а их нарушения порождают финансовые стрессы разной интенсивности.

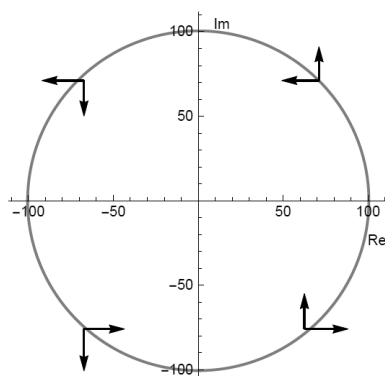


Рис. 7. Ротация макрофинансовой системы

Сценарии поведения макрофинансовой системы определяются системой уравнений (10), которая дополняется условиями:

$$(24) \quad \begin{cases} b = 0; \dot{b}(0) = \max \end{cases} \Rightarrow \dot{m} \pm \\ \begin{cases} m = 0; \dot{m}(0) = \max \end{cases} \Rightarrow \dot{b} \pm.$$

Согласно условиям (24), индексы уклонений долга и денег от равновесия имеют максимальную скорость в точках равновесия и нулевую – в экстремальных точках, где направления (экономические политики) меняют свой знак. Последовательность состояний макрофинансовой системы представлена в табл. 2.

Таблица 2.

Поведение макрофинансовой системы

	Q1	Q2	Q3	Q4
Состояния	$S < I; M > M^*$	$S > I; M > M^*$	$S > I; M < M^*$	$S < I; M < M^*$
Действия	$\dot{b} < 0; \dot{m} > 0$	$\dot{b} < 0; \dot{m} < 0$	$\dot{b} > 0; \dot{m} < 0$	$\dot{b} > 0; \dot{m} > 0$

Избыток (нехватка) долгов соответствует макроэкономическим неравенствам сбережений и инвестиций, а избыток (нехватка) денег измеряется относительно их «нейтральных» в долгосрочном периоде объемов. Соответствующие «политики» (скорости изменения состояний) представлены в третьей строке таблицы.

Таблица 2 позволяет формировать различные сценарии развития экономики, которые, с некоторыми коррективами, вполне аналогичны сценариям, изложенным в знаменитой статье И. Фишера [Fisher, 1933]. Содержательная аналогичность его сценариев и динамики индексов уклонений долга  $b(t)$  и денег  $m(t)$  в модели макрофинансового осциллятора – прямое следствие того, что чрезмерная задолженность и дефляция указаны И. Фишером как основные факторы, порождающие экономические осцилляции (п. 19 его статьи).

#### 4. Модель макрофинансового осциллятора

Увеличение совокупной задолженности, происходящее во взаимосвязи с ростом реальной экономики, является непреложным фактом экономической действительности, хотя заимствования могут сокращаться по ряду причин, включая «рыночные фрикции», отказы от возмещения задолженности и «компрессию» долгов. Во все больших размерах государственные долги покупаются центральными банками, которые эмитируют деньги *ex nihilo*, обеспечивающие резервы коммерческих банков и денежные депозиты бизнеса и населения. В современных условиях общественные заимствования доминируют в сравнении с коммерческими долгами, что, в частности, объясняет ведущую роль казначейства и центрального банка в решении вопросов стабилизации финансовой системы.

#### 4.1. Неоднородное ОДУ макрофинансового осциллятора

В экономическом контексте, изложенном выше, модель макрофинансового осциллятора представлена неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$(25) \quad \frac{d^2 b}{dt^2} + 2\beta \frac{db}{dt} + \omega^2 b(t) = h(t), \quad b(0) = 1; \quad \dot{b}(0) = -r,$$

или, если использовать оператор дифференцирования  $\partial$ , в более компактном виде:

$$(26) \quad \partial b(t) = h(t); \quad \partial = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega^2.$$

Уравнение (25) обобщает модель (13), учитывая процессы компрессии (взаимозачета) долгов,  $\beta \neq 0$ , и особую роль сегмента коротких финансовых обязательств,  $h(t) \neq 0$ , на котором действуют центральный банк и казначейство. Индекс уклонений долга от равновесных значений  $b(t)$  представляет действительную часть комплексной функции состояния макрофинансовой системы  $z(t)$ . Его динамика формируется как суперпозиция роста объемов долга и ожидаемых потерь инвесторов, вызванных эмиссией ликвидности и увеличением частных и государственных заимствований.

Левая часть уравнения (25) объясняет финансирование долга, обусловленное ожиданиями инвесторов (кредиторов) возможных потерь из-за роста заимствований и воздействия различных рыночных фрикций. При отсутствии притока новых денег рынок долга «сжимается» по мере погашения траншей, причем степень сжатия усиливается компрессией (взаимозачетом) различных долгов. Важнейшим проявлением компрессии является покупка долгов центральным банком, которые перемещаются на его баланс и, тем самым, «уходят» с рынка. Колебания стоимости долга (debt outstanding) носят вынужденный, или «подавленный», характер, который отражается в модели фактором  $\beta \frac{db}{dt}$ ,

пропорциональным скорости роста макродолга. Величина параметра  $\beta$  определяется конкретными условиями рынка заимствований.

Правая часть уравнения (25) характеризует процессы эмиссии денег и их конвертации в новые долги. Это – драйвер  $h(t)$  макрофинансовой системы, который моделирует поведение рынков краткосрочных обязательств (money market), репо, narrow banking, private credit markets, stablecoins, etc. Драйвер, или функция входных воздействий,  $h(t)$  агрегирует характеристики монетарной, фискальной и макропруденциальной политики и определяет «вынужденный» характер колебаний системы. Данный сегмент денег мирового рынка составлял в 2023 г. примерно 20–25 трлн долл. На рис. 8 виден значительный рост стоимости активов фондов взаимного инвестирования США, которые совершают операции с краткосрочными финансовыми обязательствами.



**Рис. 8.** Рост активов ММФ США

Решение ОДУ макрофинансового осциллятора зависит от драйвера макрофинансовой системы. Оно может быть найдено, например, применением преобразования Фурье, которое превращает дифференциальное уравнение (26) в алгебраическое:

$$(27) \quad (-v^2 + 2\beta vj + \omega^2)\hat{b}(v) = \hat{h}(v),$$

где  $\hat{h}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp[-jvt] dt$  есть спектральное распределение индекса уклонений долга от равновесия и  $v$  – частота колебаний нового долга, необязательно связанная с частотой невынужденных колебаний рынка.

Применение обратного преобразования Фурье к алгебраическому равенству (27) восстанавливает траекторию индекса макродолга:

$$(28) \quad b(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}(v) \exp[-jvt]}{(-v^2 + 2\beta vj + \omega^2)} dv,$$

но вычисление спектрального распределения  $\hat{h}(v)$  для макрофинансового драйвера произвольного вида может быть непростой задачей.

#### 4.2. О представлении долгового рынка рядом Фурье

В предположении дискретности частот (периодов погашения отдельных долгов) драйвер  $h(t)$  рынка макродолга может быть аппроксимирован рядом Фурье:

$$(29) \quad h(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos[vnt] + \beta_n \sin[vnt]); \quad v = \frac{2\pi}{T},$$

где коэффициенты  $\alpha_n, \beta_n$  находятся по известным правилам [Hautman, 2011]. В комплексной форме,

$$(30) \quad h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[j \frac{2\pi}{T} nt\right] h_n,$$

этот ряд представляет конгломерат сегментов различных долгов, упорядоченных согласно нумерации частот,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В каждом сегменте погашаются и накапливаются долги соответствующих периодов, например, ипотеки (mortgages), «длинных» и «средних» облигаций, индивидуальных и консолидированных займов.

В краткосрочном периоде ипотека практически не связана с движением краткосрочных инструментов «рынка денег» (money market), а инвесторы в муниципальные облигации не торгуют казначейскими обязательствами. Независимость сегментов финансового рынка позволяет его интерпретировать согласно гипотезе «wheels on wheels», истоки которой эксперты относят к геоцентричной системе Птолемея [Miller, 2018]. Каждый сегмент долгового рынка (рис. 9) уподобляется спирали определенного радиуса, или «колесику», вращающемуся с определенной скоростью вдоль (накопление долга) или против часовой стрелки (погашение долга). Радиусы таких спиралей соответствуют относительной важности каждого вида долга.

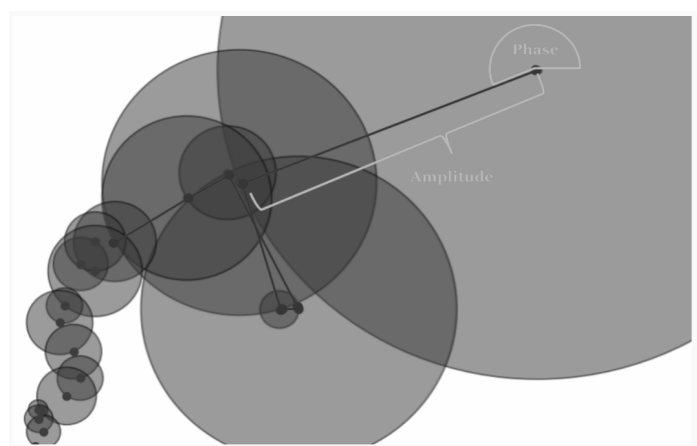


Рис. 9. Структура макродолга и ряд Фурье

Источник: Miller, 2018.

#### 4.3. Интерпретация финансового клиринга

На макроуровне, в силу гигантских, на сотни триллионов долларов, объемов обращающихся финансовых инструментов, фрагментация долгового рынка «исчезает», а предположение о непрерывности частот приводит к представлению драйвера  $h(t)$  как бесконечно большой суммы (интеграла) элементарных взаимодействий денег и долгов:

$$(31) \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(v) \exp[jvt] dv.$$

Это – обратное преобразование Фурье, в котором спектральные распределения  $\hat{h}(v)$ ,

$$(32) \quad \hat{h}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp[-jvt] dt,$$

соответствуют вкладу каждой частоты в представление драйвера  $h(t)$  макрофинансового осциллятора. Спирали  $\exp[\pm jvt]$ , входящие в выражения (31) и (32) макрофинансового драйвера, являются взаимно-ортогональными функциями [Chong, 2025].

Для дискретного долгового рынка соответствующий расчет переменной Кронекера  $\delta_{mn}$  может быть истолкован как процедура финансового клиринга, в которой дельта Кронекера служит своеобразным фильтром состоятельности финансовой сделки (экономического сигнала). Каждый долг погашается деньгами, обеспеченными финансовыми и материальными ресурсами, если  $m = n$ . В противном случае деньги не имеют полного (в конечном счете материального) обеспечения и клиринг не осуществляется. Таким образом, чисто финансовые сравнения (сопоставления) клиринга в конечном счете сводятся к проверке обеспеченности денежной массы.

В непрерывном процессе дельта Кронекера имеет своим аналогом импульсную функцию Дирака [Relteln, 2011], которая моделирует «мгновенную» эмиссию денег коммерческими банками. Рассмотрим этот процесс подробнее.

## 5. Реакция долгового рынка на денежный импульс

Динамика макродолга определяется многими факторами, в том числе монетарной, фискальной и макропруденциальной политикой. Эффекты их воздействия на рынок заимствований, как текущие, так и накопленные за весь период проведения определенной политики, могут быть вычислены применением преобразования Фурье к драйверу специального вида, представленному импульсной функцией (распределением) Дирака. Тем самым создание денег банковской системой уподобляется процессу, который должен удовлетворять условиям финансового клиринга, а конвертация эмитированных денег в новые долги формирует «фундаментальную» реакцию макрофинансовой системы на мгновенный денежный импульс.

### 5.1. Создание новых денег

Клиринг требует исполнения платежей, включая банковские обязательства, возникающие в процессе эмиссии денег. Мистерия создания денег коммерческими банками, которая происходит при формировании и выдаче займов (кредитов) клиентам, изучается, по крайней мере, со времен Томмазо Контарини. Этот венецианский сенатор заметил, как «росчерком пера» банкиры обогащают своих друзей<sup>10</sup>, и указал на необходимость объ-

<sup>10</sup> Сенат Венецианской республики отреагировал на требование надежности банковских обязательств, сформулированное Контарини, учреждением в 1584 г. первого государственного банка – *Banco di Rialto*, впоследствии Банка Венеции [Dunbar, 1892].

активной проверки состоятельности финансовых обязательств, т.е. клиринга. Финансовый кризис 2007–2008 гг. восстановил и обострил интерес к проблеме создания денег и экономических последствий этого процесса.

Современные процессы эмиссии денег коммерческими банками обстоятельно раскрыты в ряде работ, например: [McLeay et al, 2012; Cliffe, Brosens, 2018]. Деньги создаются не отдельными банками, а банковской системой в целом, причем «львиная» доля денежной массы, обращающейся на реальных и финансовых рынках, состоит из депозитов коммерческих банков. В принципе, суверенный центральный банк может создавать деньги *ex nihilo* неограниченно и неопределенно долго, но коммерческие банки обязаны безоговорочно финансировать свои займы имеющимися у них средствами [Tobin, 1963]. Поэтому парадокс создания денег *ex nihilo* коммерческими банками, на самом деле, мнимый, поскольку, эмитируя деньги, они «не учитывают» имеющиеся у них депозиты лишь «на мгновение», до траты заемщиком полученных средств.

Одновременное применение прямого и обратного преобразований Фурье к драйверу макрофинансовой системы оставляет его неизменным:

$$(33) \quad \begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jvt] \hat{h}(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jv(t-t')] dv \right\} dt' = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t') \delta(t-t') dt'. \end{aligned}$$

Выражение в фигурных скобках в равенстве (33)

$$(34) \quad \delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jv(t-t')] dv$$

является одним из определений дельта-функции Дирака, или «мгновенного» импульса, в данном случае монетарного. Эта «обобщенная» функция (распределение) есть бесконечность в точке  $t'$ , равна нулю вне ее, и удовлетворяет условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') dt = 1$  [Salih, 2015]<sup>11</sup>.

Экспоненциальные функции с комплексными показателями степени ортогональны, а значит, функция мгновенного импульса адекватно отражает процессы создания денег банковской системой и их конвертации в новые долги. Удовлетворяя требованиям финансового клиринга, «проверка соответствия» предложения и спроса на сегменте рынка денег, представленная функцией Дирака, является, по сути, формализацией замечания Т. Контарини<sup>12</sup>.

<sup>11</sup> Интеграл в фигурных скобках в равенстве (33) не сходится, поэтому функция Дирака определяется как предельное соотношение:  $\delta(t-t') = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[jv(t-t')] \exp[-\gamma v^2] dv$ , которое является преобразованием Фурье Гауссова волнового пакета [Chong, 2025].

<sup>12</sup> По экономическому смыслу, в некоторой денежной системе банкноты конвертируются «в себя», поскольку, после отказа от золотого стандарта системообразующий банк обязан представить

В эпоху цифровых денег эмиссия денег в объемах, неограниченных лишь на мгновение, приобретает буквальный смысл. Такая процедура полностью исключает длительные периоды обращения необеспеченных обязательств, в том числе банковских билетов. В определенном смысле, поэтому, можно утверждать, что процесс финансиализации экономики завершается, когда создание новых денег, их конвертация в новые долги и клиринг происходят импульсно, или мгновенно.

## 5.2. Реакция долгового рынка на монетарный импульс

Гипотеза (мгновенного) монетарного импульса позволяет применить для решения ОДУ макрофинансового осциллятора (26) метод функции Грина. Этот метод широко применяется в исследованиях различных физических проблем, теории сигналов и спектральных разложений [Колоколов, Лебедев, 2018]. Его суть состоит в том, что решение уравнения (26) находится сначала для драйвера специального вида, а затем для заданного драйвера  $h(t)$ .

Формирование долговых обязательств, согласно методу функции Грина, предстает как двухэтапный процесс. Сначала долговой рынок реагирует на (мгновенный) импульс создания денег, а затем реакция долгового рынка обобщается, учитывая воздействие входного сигнала за весь период проведения определенной макропруденциальной политики. Реакция макрофинансовой системы раскрывает, тем самым, каузальность формирования совокупных долговых обязательств.

На первом этапе для инвариантной во времени макрофинансовой системы функция Грина,  $G(t, t') = G(t - t')$ , полагается решением дифференциального уравнения осциллятора, драйвером которого является импульсная функция Дирака  $\delta(t - t')$ :

$$(35) \quad \partial G(t, t') = \delta(t - t').$$

Преобразование Фурье «мгновенного импульса», в силу свойства «фильтрации» дельта-функции, приводит к ее представлению как ротационной спирали долга:

$$(36) \quad \widehat{\delta}(v, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') \exp[-jvt] dt = \exp[-jvt'],$$

где  $v$  – частота драйвера осциллятора, а  $t'$  – момент входного импульса, т.е. начала проведения некоторой монетарной и макропруденциальной политики. Соответственно, обратное преобразование Фурье равенства

$$(37) \quad (-v^2 + 2\beta vj + \omega^2) \widehat{G}(v, t) = \exp[-jvt']$$

---

предъявителю лишь ее, в соответствующей деноминации. Иначе, утверждение о «мгновенном» исполнении банком своего долгового обязательства эквивалентно утверждению о ликвидности данного денежного знака, равной единице. Аналогичное интегральное свойство дельта-функции Дирака может служить аргументом в пользу ее использования в моделировании процесса создания денег.

позволяет вычислить функцию Грина  $G(t, t')$ :

$$(38) \quad G(t, t') = G(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\exp[jv(t-t')]}{(-v^2 + 2\beta vj + w^2)} dv.$$

Выражение (38), по экономическому смыслу, характеризует реакцию рынка денег/долга в реальном времени  $t$  на создание новых денег в момент  $t'$ . Эта, «фундаментальная», реакция долгового рынка является звеном каузальной цепи, наряду с эмиссией денег и их конверсии в новые долговые обязательства.

Интеграл  $G(t, t') = G(t - t')$  вычисляется методом «остатков полюсов», использование которого приводит к функции Грина в явном виде:

$$(39) \quad G(t - t') = \frac{\exp[-\beta(t-t')]}{2\Omega j} (\exp[j\Omega(t-t')] - \exp[-j\Omega(t-t')]) \Theta(t - t'),$$

где  $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ , а  $\Theta(t)$  – функция Хевисайда. С учетом формулы Эйлера действительная часть функции Грина

$$(40) \quad G(t - t') = \frac{1}{\Omega} \exp[-\beta(t-t')] (\sin[\Omega(t-t')]) \Theta(t - t')$$

объясняет реакцию рынка макродолга на эмиссию денег, представленную монетарным импульсом.

### 5.3. Кумулятивная реакция долгового рынка

Динамика макродолга определяется воздействиями драйвера на рынок заимствований, не только текущими, но и накопленными за весь период проведения определенной макропруденциальной политики. Реакция на (мгновенный) импульс создания новых денег, заданная функцией  $G(t - t')$ , позволяет исследовать поведение долгового рынка под воздействием необязательно периодического драйвера макрофинансовой системы.

В реальном времени динамика индекса уклонений долга от равновесия  $b_p(t)$  формируется как бюджетно-финансовая политика. На втором этапе решения ОДУ (26) она моделируется конволюцией (сверткой) функций  $h(t')$  и  $G(t - t')$  с учетом очевидного отсутствия реакции рынка до начала проведения с момента  $t'$  новой политики. Решение ОДУ осциллятора, согласно принципу каузальности, принимает следующий вид:

$$(41) \quad b_p(t) = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^t h(t') \exp[-\beta(t-t')] \sin[\Omega(t-t')] dt'.$$

С экономической точки зрения функция (41) представляет затухающие колебания индекса макродолга, вызванные эмиссией денег, т.е. кумулятивным воздействием драйвера системы (26) на долговой рынок.

#### 5.4. Осциллятор как модель финансового гомеостаза

Метод функции Грина для инвариантной во времени макрофинансовой системы,  $G(t, t') = G(t - t')$ , раскрывая взаимодействие денег и долга, приводит к решению дифференциального уравнения модели. Решение ОДУ осциллятора со специальным драйвером в виде дельта-функции Дирака,  $\partial G(t, t') = \delta(t - t')$ , показывает, что дополнительная единица денежной эмиссии формирует новое состояние финансов (денег и долга). Положение системы мгновенно не меняется, но, по мере превращения ликвидности в новые долги, скачкообразно, на единицу, меняется скорость изменения долга.

Обе части уравнения (34), предварительно умноженные на функцию  $h(t)$ , следуя вдоль координаты  $t'$  за монетарным импульсом, интегрируются:

$$(42) \quad \int \partial G(t, t') h(t') dt' = \int \delta(t - t') h(t') dt'.$$

В силу свойства фильтрации дельта-функции, правая часть равенства (42) восстанавливает драйвер системы  $h(t)$ . Левая часть равенства (42) корректирует реакцию долговой системы на монетарный импульс с учетом особенностей драйвера, т.е. макропрudenциальной политики. Заметим, что дифференцирование идет вдоль координаты времени  $t$  (реакции системы), тогда как интегрирование проводится вдоль координаты  $t'$  (действия импульса). Следовательно, соответствующие операторы в левой части равенства (42) коммутируют:

$$(43) \quad \partial \left\{ \int G(t, t') h(t') dt' \right\} = \int \delta(t - t') h(t') dt' = h(t).$$

Сказанное выше означает, что конволюция, представленная выражением в фигурных скобках равенства (43),

$$(44) \quad b_p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t') G(t, t') dt' = \int_{-\infty}^t h(t') G(t - t') dt',$$

воспроизводит исходное неоднородное уравнение модели макрофинансового осциллятора (26):

$$\partial b(t) = h(t)$$

и является его частным решением. Конволюция (44) характеризует кумулятивную реакцию долгового рынка на эмиссию денег и в явном виде представлена интегралом (41), в котором драйвер рынка необязательно периодический.

Модель макрофинансового осциллятора, по своему экономическому содержанию, реализует идею Дж. Тобина о поддержании экономического гомеостаза посредством балансирования финансов (денег и долгов). Это достигается благодаря тому, что эмиссия денег, как интеграл «мгновенного импульса»  $\int_{t'-\varepsilon}^{t'+\varepsilon} \delta(t-t') dt = 1$ , меняет скорость долга, но не меняет в данный момент положение системы.

Эмитированная денежная единица трансформируется в новый долг, создавая предпосылки изменения положения системы. Поскольку удовлетворяется уравнение  $\partial b(t) = h(t)$ , то финансы балансируются, выполняются условия клиринга и поддерживается экономический гомеостазис. Следовательно, балансируя деньги и долги, макрофинансовый осциллятор поддерживает динамическое равновесие вещественного и монетарного аспектов воспроизводства. Это, естественно, предполагает, что денежная эмиссия адекватна изменениям реального производства, а нестационарность, нелинейность и стохастичность процесса ассоциируются, прежде всего, с факторами социальной и вещественной природы.

## 6. Численная имитация модели

Реакция глобального долгового рынка на эмиссию ликвидности была исследована посредством имитации макрофинансового осциллятора, основные результаты которой представлены ниже.

### 6.1. Имитация «провала» долгового рынка в 2020 г.

В марте 2020 г. высокие объемы заимствований, под влиянием негативных сообщений о начале пандемии «COVID-19», вызвали падение спроса на долги и резкий, неожиданный отток денег с сегмента казначейских облигаций США. Этот рыночный шок оказался настолько значительным, что получил название «the dollar liquidity squeeze». Падение спроса было восстановлено не рынком, а массовой скупкой Федеральной резервной системой США государственных обязательств, примерно на 2 трлн долл., причем за очень короткий срок<sup>13</sup>.

На рис. 10 видно смещение вверх динамики индекса мирового долгового рынка (верхняя кривая) из-за гигантской эмиссии ликвидности, вызванной пандемией «COVID-19». Последующий разгон, с начала 2021 г., инфляции в США и ряде других стран выглядит вполне естественным и объяснимым продолжением этих монетарных процессов.

<sup>13</sup> Этот экономический шок изучается и моделируется весьма активно. Так, на симпозиуме в Jackson Hole были представлены большая имитационная модель экономических последствий пандемии «COVID-19» [Kozlowski et al., 2020], а также прогноз спроса и предложения долга США на 2100 г. [Auclert et al., 2025].

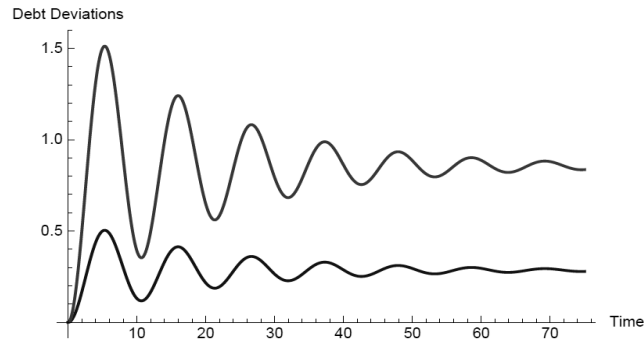


Рис. 10. Смещение динамики индекса мирового долга

Имитация модели соответствовала вычислению конволюции (44) осциллятора с неперiodическим драйвером

$$(45) \quad h(t) = h\Theta(t); h = 0, 1,$$

которая была преобразована, используя формулу Эйлера, в простое выражение:

$$(46) \quad b_p(t) = h \int_{-\infty}^t \Theta(t') G(t-t') dt' = \frac{h}{\Omega} \int_0^t \exp[-\beta(t-t')] \sin[\Omega(t-t')] dt'.$$

Вычисление интеграла (46) привело к индексу уклонений долга от равновесия

$$(47) \quad b_p(t) = \frac{h}{\beta^2 + \Omega^2} - \frac{h \exp[-\beta t]}{\Omega(\beta^2 + \Omega^2)} (\Omega \cos[\Omega t] + \beta \sin[\Omega t]),$$

который является частным решением ОДУ осциллятора (25). В динамике долга оно доминирует, поскольку условие  $b_h(t) = 0$  оправдано специфическим характером явления «острой нехватки долларов», которое имело только одного участника, способного эмитировать и выдавать долларовые кредиты<sup>14</sup>. Для данного варианта макрофинансового осциллятора, кстати, однородная компонента решения ОДУ (26)  $b_h(t)$  принципиально не меняет его общее решение:

$$(48) \quad b(t) = \frac{h}{\beta^2 + \Omega^2} - \frac{h \exp[-\beta t]}{\Omega(\beta^2 + \Omega^2)} ((\Omega + B) \cos[\Omega t] + (\beta + M) \sin[\Omega t]),$$

хотя константы  $B$  и  $M$ , определяемые начальными условиями глобального рынка долга, несколько изменили конкретные значения индекса.

<sup>14</sup> Имитация «замедленной» реакции долгового рынка на монетарный импульс, представленный драйвером в виде гиперболического тангенса  $h(t) = c \tanh(t)$ , воспроизвела примерно такие же результаты. Отличия свелись к более высоким значениям смещения состояния равновесия и амплитуды колебаний.

## 6.2. Сравнительный анализ результатов

Параметры имитации в табл. 3 рассчитаны по информации о состоянии глобальной макрофинансовой системы в 2019 г., предшествовавшем кризису «COVID-19».

Таблица 3.

Параметры модели

Ожидаемый период погашения макродолга, $T$	10 лет
Угловая частота (фаза), $\nu$	$0,63 \text{ rad / year}$
Параметр собственных колебаний рынка частота, $k$	0,36
«Длинная» ставка процента, $r$	10% <i>p.a.</i>
Равновесие рынка долга, $h / (\beta^2 + \Omega^2)$	0,28
Амплитуда колебаний, $h$	0,1
Параметр компрессии, $\beta$	0,05

Индекс глобального долга (47) в численном виде

$$(49) \quad b_p(t) = 0,28 - 0,06 \exp[-0,05t] (0,6 \cos[0,6t] + 0,05 \sin[0,6t])$$

воспроизвел события марта 2020 г., когда монетарный регулятор США приступил к масштабной эмиссии долларов для преодоления их острой нехватки на рынке казначейских облигаций. Импульсный характер эмиссии долларов США достаточно отчетливо виден на рис. 11.

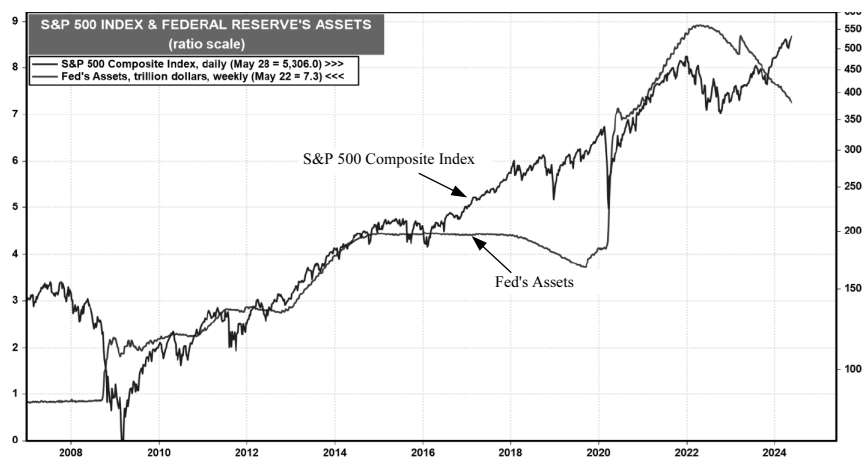


Рис. 11. Динамика долларовой ликвидности США

Источник: Yardeni Research.

Массированная «накачка» долларов вызвала колебания индексов денег и долга, амплитуда которых постепенно уменьшалась по мере приближения к состоянию нового равновесия на этом рынке, 0,28. График функции  $b_p(t)$  приведен на рис. 12 вместе со скоростью роста заимствований и ожидаемыми потерями инвесторов.



Рис. 12. Динамика индекса заимствований  $b_p(t)$

Перемещение системы на фазовой плоскости  $(b_p, \dot{b}_p)$  из отрицательной полуоси значений индекса  $b_p(t)$  в точку, лежащую справа от начала координат, показано на рис. 13. Это перемещение стало следствием резко усилившихся макрофинансовых стрессов, порожденных беспрецедентной эмиссией долларов.

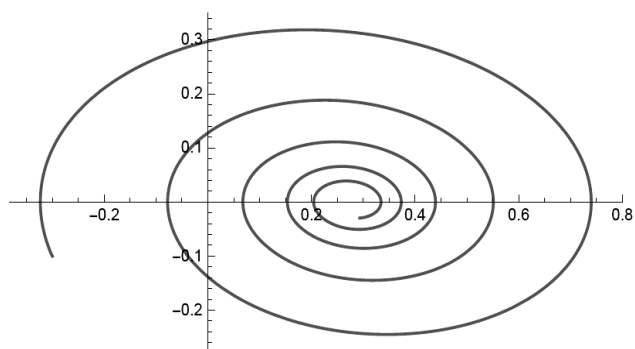


Рис. 13. Фазовый портрет индекса  $b_p(t)$

Эмиссия долларов, порядка 2 трлн., сопровождалась увеличением балансов крупнейших центральных банков мира, составившим за 2020 г. около 4 трлн., в пересчете на доллары. Солидарная монетарная политика ФРС, ЕЦБ и Банка Японии, а также других цент-

ральных банков, дала толчок рекордному росту глобального долга, который, по данным Института международных финансов, увеличился более чем на 24 трлн. долл. [ИФ, 2021].

Скачок объемов казначейских заимствований США хорошо виден на рис. 14 по итогам 2020 г. Рекордное увеличение глобальных заимствований, в ответ на гигантский монетарный импульс, предотвратило трансформацию финансового стресса в общеэкономическую катастрофу мировых масштабов.

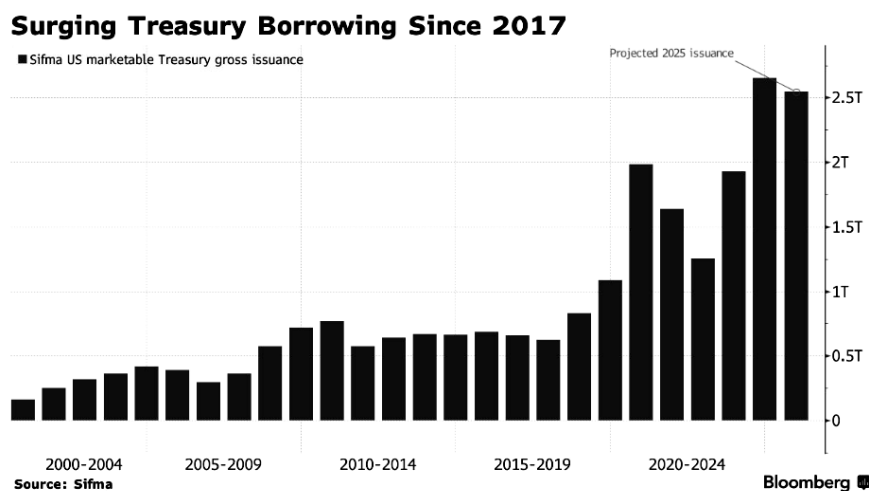


Рис. 14. Динамика заимствований США

Источник: Bloomberg.

Таким образом, имитация модели в ситуации грандиозного «провала рынка» (market failure) воспроизвела каузальную связь глобального долга и эмиссии денег, показав возможность изучения динамики сложной системы достаточно простыми аналитическими средствами.

## 7. Некоторые выводы

В основе модели макрофинансового осциллятора лежит гипотеза взаимодействия долга и денег, поддерживающего в форме финансового клиринга экономической гомеостазис. В сочетании с предположением о линейности и инвариантности этого процесса во времени данная гипотеза позволила составить и решить неоднородное ОДУ макрофинансовой динамики. Взаимодействие денег и долга, ротация и осцилляции компактно представлены комплексными переменными и, в конечном счете, действительными значениями индекса уклонений долга от состояния равновесия.

Имитация «провала рынка», имевшего место в марте 2020 г., подтвердила, что массовая распродажа долговых инструментов, действительно, породила серьезные стрессы и потрясения, за которыми последовало значительное увеличение долговой нагрузки на экономику. По нашему мнению, эти результаты не противоречат общеизвестным представлениям об экономике как о большой, сложной, нелинейной и стохастической системе, а образуют естественный этап ее более глубокого понимания.

Тезис о цикличности взаимодействия денег и долгов акцентирует значимость финансового клиринга, исполнение которого разрешает глубокое противоречие монетарного и реального развития экономики. Монетарный импульс, мгновенно меняя скорость долга, оказывается органически встроенным в процедуру финансового клиринга, подтверждая экономическую состоятельность новых платежей, несмотря на неизменность положения долгового рынка на момент эмиссии денег. Нарушения клиринга «провалами рынка», вызванными либо пандемией 2020 г., либо резким повышением США внешнеторговых тарифов в 2025 г., подтверждают необходимость их моделирования дифференциальными уравнениями второго, а не первого порядка.

Макрофинансовый осциллятор допускает использование драйверов системы, соответствующих различным конфигурациям рынка краткосрочных финансовых обязательств. Это вовлекает в анализ важные, доселе незаслуженно «незамечаемые», экономические характеристики. Например, модель предполагает расчеты согласованности ставок доходности, осредненных периодов погашения и частот совокупной задолженности. Феномен ротации денег и долга, меняя структуру и скорости погашения долга, не допускает его простого накопления, как в процессах первого порядка.

Можно добавить, что убедительное объяснение экономических условий, при которых решение ОДУ первого порядка является компонентой решения дифференциального уравнения второго порядка, может привести к весьма интересным расчетам динамики макродолга.

В завершение вернемся к различению категорий денег (*money proper*) и долгов (*promises*) как обещаний денежных выплат. В предложенной модели деньги, являясь «мгновенно» погашенным долгом, служат мерой стоимости товаров, как в вещественном пространстве, так и во времени. В отсутствие денег долг лишается содержательного смысла, тогда как обоснованные обещания денежных платежей формируют общий образ ожидаемого, но нереализованного, богатства. Разумеется, эти категории нуждаются в дальнейших исследованиях, уточнениях и конкретизации, необходимых для моделирования эволюции финансов и экономики.

Модель макрофинансового осциллятора отражает инерционность взаимодействий денег и долга. Ее экономическое обоснование вполне согласуется с современными представлениями о долговых контрактах как о займах виртуальных денег, которые выдавались еще во времена шумеро-аккадской цивилизации [Goetzmann, Rouwenhorst, 2005; Graeber, 2011]. Следовательно, хотя технологии цифровых денег, *blockchain* или *general ledger*, являются, безусловно, достижениями XXI в., но виртуальный доллар исчисляет цены товаров и активов во многом аналогично шекелю древней Месопотамии, только в технически несравненно более сложном формате и несопоставимых масштабах.

Взаимодействие денег и долгов, которое происходило, происходит, и будет происходить в различных социально-экономических формациях, образует ядро истории экономики и финансов, развивающейся по спирали. Моделируя эмиссию денег и их трансформацию в новые долги, макрофинансовый осциллятор способствует более глубокому пониманию процесса финансовизации экономики. Дальнейшее развитие модели открывает дорогу к исчислению объемов и структуры полностью погашаемой задолженности, следовательно, применению более эффективной макропруденциальной политики.

\* \*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Колоколов И.В., Лебедев В.В.* Избранные главы математической физики. М.: Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, 2020. (<https://www.chair.itp.ac.ru/mathlec10>)
- Смирнов А.Д.* Макрофинансы: сигмоидная динамика денег, долга и богатства // Экономический журнал ВШЭ. 2023. Т. 27. № 3. С. 317–363.
- Смирнов А.Д.* Цикличность динамики денег и долга // Экономический журнал ВШЭ. 2024. Т. 28. № 3. С. 363–411.
- Allen R.* *Mathematical Economics*. London: Macmillan, 1957.
- Alonso M.* *Complex Numbers As Matrices*. 2025. (<https://www.papers.ssrn.com>)
- Auclert A., Malmberg H., Rognlie M., Straub L.* The Race between Asset Supply and Asset Demand. Jackson Hole Symposium, 2025. (<https://www.kansascityfed.org/research/jackson-hole-economic-symposium/2025/>)
- Encyclopedia Britannica.* Business Cycle. (<https://www.britannica.com>)
- Bloomberg.* 2023. October 9. (<https://www.bloomberg.com/europe>)
- Bloomberg.* 2025. May 19. (<https://www.bloomberg.com/europe>)
- Borio C.* On Money, Debt, Trust and Central Banking // A keynote speech at Cato Institute. 2018. (<https://www.bis.org>)
- Chen S., Ganum P., Liu L., Martinez L., Martinez Peria S.* Debt Maturity and the Use of Short Term Debt. Evidence from Sovereigns and Firms. Washington: International Monetary Fund, Research Department, № 19/3, 2018.
- Cherny A.* *Mathematical Techniques in Finance*. 2<sup>nd</sup> ed. Princeton: Princeton University Press, 2009.
- Chiang A.* *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3<sup>rd</sup> ed. Singapore: McGraw Hill, 1984.
- Chong Y.D.* *Complex Methods for the Sciences*. LibreTexts, 2024. (<https://LibreTexts.org>)
- Cliffe M., Brosens T.* The Money Creation Paradox, ING. 2018. (<https://www.think.ing.com/uploads/reports/Money>)
- Dalio R.* Legendary Fund Manager Has Blunt Message on «Big Beautiful Bill». 2025. (<https://www.thestreet.com/economy/legendary-fund-manager-has-blunt-message>)
- Domar E.* *Essays in the Theory of Economic Growth*. New York: Oxford University Press, 1957.
- Dunbar C.* Bank of Venetia // *The Quarterly Journal of Economics*. 1892. Vol. 6. № 3. P. 308–335.
- Fisher I.* Debt Deflation Theory of Great Depressions // *Econometrica*. 1933. Vol. 1. № 4. P. 337–357.
- Frisch R.* Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics // *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*. London: Frank Cass and Co., 1933. P. 171–205.
- Galbraith J.K.* *Money: Whence It Came, Where It Went*. Boston: Houghton Mufflin, 1975.
- Goetzmann W., Rouwenhorst G.* *The Origins of Value: the Financial Innovations that Created Modern Capital Markets*. Oxford: Oxford University Press, 2005.
- Graeber D.* *Debt: The First 5000 Years*. New York: Melwill House, 2011.
- Granger C., Hatanaka M.* *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton: Princeton University Press, 1964.
- Hautmann F.* *Complex Numbers and Ordinary Differential Equations*. Oxford University, 2011. (<https://www.thphys.physics.ox.ac.uk/people>)
- Hundong Global University.* Matrix Model of Complex Numbers. (<https://www.hufocw.org/download/fil.PDF>)
- Institute of International Finance, IIF.* Global Debt: COVID Drives Debt Surge – Stabilization Ahead? 2021. February 17. (<https://www.iif.com/Product/Global-debt-Monitor>)
- Institute of International Finance, IIF.* Tariffs, Trade and Risks for Debt Markets. 2025. May 6. (<https://www.iif.com/Product/Global-debt-Monitor>)

- Kozlovski J., Veldkamp L., Venkatesveran V.* Scaring Body and Mind: The Long-term Belief-Scaring Effects of COVID-19. 2020. (<https://www.kansascityfed.org/research/jackson-hole>)
- McLeay M., Radia A., Thomas R.* Money in the Modern Economy: An Introduction // Quarterly Bulletin, Q1. 2014. Bank of England.
- Miller A.* A Tale of Math&Art. 2018. (<https://alexmilller.phd/posts>)
- Office of Financial Research.* (<https://www.financialresearch.gov/financial-stress-index>)
- Relteln P.* Lectures on Fourier Transforms and Laplace Transforms. 2011. (<https://cayley.academic.csusb.edu/transform/>)
- Salih A.* Delta Function and Heaviside Function, IIST. 2015. (<https://www.iist.ac.in/default/files/people/>)
- Schumacher E.F.* Multilateral Clearing // *Economica*. 1943. May. Vol. 10. № 38. P. 150–165.
- Smirnov A.D.* Macrofinancial Oscillator: Money and Debt Dynamics // XXV Yasin (April) International Conference. Honorary Speakers. Moscow, 2025. (<https://www.conf.hse.ru/2025/keynote/>)
- Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1994.
- Tobin J.* Commercial Banks as Creators of «Money» // Cowles Foundation Discussion Paper. 1963. № 159. (<http://cowles.yale.edu/sites/default/files/files/pub/d01/d0159.pdf>)
- Tobin J.* Money. The New Palgrave: A Dictionary of Economics. Palgrave Macmillan, 1987.
- Yadav Y., Malone B.* Stablecoins and the US Treasury Market. 2025. ([https://www.papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id](https://www.papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id))
- Yardeni E.* The Bond Vigilantes. 2018. (<https://archive.yardeni.com/exerpts>)
- Ye C., Huang J.* Non-classical Oscillator Model for Persistent Oscillations in Stock Market // *Physica A* 387. 2008. P. 1255–1263.
- Yashinski A.* Exponentials and Rotations. 2021. (<https://www.math.umd.edu>)

# Oscillations of Money and Debt Dynamics

Alexander Smirnov

National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: adsmir@hse.ru

The dynamics of money and debt are modelled as a time-invariant process of economic homeostasis sustained by financial clearing mechanisms. The macrofinancial oscillator model elucidates the behaviour of the aggregate creditor, who compensates for expected losses arising from the expansion of total borrowing. Aperiodic mass sell-offs of debt instruments, known in finance as the "bond vigilante" hypothesis, represent an empirical manifestation of this process. Such debt market reactions can induce significant stress and substantial costs, particularly in the contemporary phase of global economic financialization.

The cyclical dynamics of debt emerge from the interconnected processes of oscillation and rotation within the macrofinancial system. Causal relationships among money, loans, debt, and wealth are unveiled through the solution of the oscillator's ordinary differential equation (ODE) using the Green's function method. Money issuance and its subsequent transformation into new borrowings are modelled via the Dirac delta function. The monetary impulse elicits a fundamental debt market response, enabling the computation of financial system trajectories under diverse monetary and macroprudential conditions. This framework has notably resolved the paradox of "unlimited" money issuance, a phenomenon observed since the 16<sup>th</sup> century.

Numerical simulations of the macrofinancial oscillator have accurately replicated the global debt market's response to the money issuance spurred by the COVID-19 pandemic. Further refinement of the model will facilitate the calculation of the total debt volume that can be reliably redeemed by the money supply, consistent with the coherent value of goods and services.

**Key words:** global debt; money issuance; Dirac's function; financial clearing.

**JEL Classification:** B41, C65, E42, G10.

\* \*  
\*

## References

- Allen R. (1957) *Mathematical Economics*. London: Macmillan.  
Alonso M. (2025) *Complex Numbers As Matrices*. Available at: <https://www.papers.ssrn.com>

- Auclert A., Malmberg H., Rognlie M., Straub L. (2025) *The Race between Asset Supply and Asset Demand*. Jackson Hole Symposium. Available at: <https://www.kansascityfed.org/research/jackson-hole-economic-symposium/2025/>
- Encyclopedia Britannica. *Business Cycle*. Available at: <https://www.britannica.com>
- Bloomberg (2023) October 9. Available at: <https://www.bloomberg.com/europe>
- Bloomberg (2025) May 19. Available at: <https://www.bloomberg.com/europe>
- Borio C. (2018) *On Money, Debt, Trust and Central Banking*. A keynote speech at Cato Institute. Available at: <https://www.bis.org>
- Chen S., Ganum P., Liu L., Martinez L., Martinez Peria S. (2018) *Debt Maturity and the Use of Short Term Debt. Evidence from Sovereigns and Firms*. Washington: International Monetary Fund, Research Department, no. 19/3.
- Cherny A. (2009) *Mathematical Techniques in Finance*. 2<sup>nd</sup> ed. Princeton: Princeton University Press.
- Chiang A. (1984) *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3<sup>rd</sup> ed. Singapore: McGraw Hill.
- Chong Y.D. (2024) *Complex Methods for the Sciences*. LibreTexts. Available at: <https://LibreTexts.org>
- Cliffe M., Brosens T. (2018) *The Money Creation Paradox, ING*. Available at: <https://www.think.ing.com/uploads>reports>Money>
- Dalio R. (2025) *Legendary fund Manager Has Blunt Message on «Big Beautiful Bill»*. Available at: <https://www.thestreet.com/economy/legendary-fund-manager-has-blunt-message>
- Domar E. (1957) *Essays in the Theory of Economic Growth*. New York: Oxford University Press.
- Dunbar C. (1892) Bank of Venetia. *The Quarterly Journal of Economics*, 6, 3, pp. 308–335.
- Fisher I. (1933) Debt Deflation Theory of Great Depressions. *Econometrica*, 1, 4, pp. 337–357.
- Frisch R. (1933) Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics. *Economic Essays in Honour of Gustav Cassel*. London: Frank Cass and Co., pp. 171–205.
- Galbraith J.K. (1975) *Money: Whence It Came, Where It Went*. Boston: Houghton Mufflin.
- Goetzmann W., Rouwenhorst G. (2005) *The Origins of Value: the Financial Innovations that Created Modern Capital Markets*. Oxford: Oxford University Press.
- Graeber D. (2011) *Debt: The First 5000 Years*. New York: Melwill House.
- Granger C., Hatanaka M. (1964) *Spectral Analysis of Economic Time Series*. Princeton: Princeton University Press.
- Hautmann F. (2011) *Complex Numbers and Ordinary Differential Equations*. Oxford University. Available at: <https://www.thphys.physics.ox.ac.uk/people>
- Hundong Global University. *Matrix Model of Complex Numbers*. Available at: <https://www.hufocw.org>download>fil.PDF>
- Institute of International Finance, IIF (2021) *Global Debt: COVID Drives Debt Surge – Stabilization Ahead?* February 17. Available at: <https://www.iif.com>Product>Global-debt-Monitor>
- Institute of International Finance, IIF (2025) *Tariffs, Trade and Risks for Debt Markets*. May 6. Available at: <https://www.iif.com>Product>Global-debt-Monitor>
- Kolokolov I.V., Lebedev V.V. (2020) *The Selected Chapters of Mathematical Physics*. The Institute of Theoretical Physics n.a. Landau. (In Russ.) Available at: <https://www.chair.itp.ac.ru/mathlec10>
- Kozlovski J., Veldkamp L., Venkatesveran V. (2020) *Scaring Body and Mind: The Long-term Belief-Scaring Effects of COVID-19*. Available at: <https://www.kansascityfed.org>research>jackson-hole>
- McLeay M., Radia A., Thomas R. (2014) *Money in the Modern Economy: An Introduction*. Bank of England. *Quarterly Bulletin*, Q1.
- Miller A. (2018) *A Tale of Math&Art*. Available at: <https://alexmillier.phd>posts>
- Office of Financial Research. Available at: <https://www.financialresearch.gov/financial-stress-index>
- Relteln P. (2011) *Lectures on Fourier Transforms and Laplace Transforms*. Available at: <https://cayley.academic.csusb.edu>transform>>
- Salih A. (2015) *Delta Function and Heaviside Function*, IIST. Available at: <https://www.iist.ac.in>default>files>people>>
- Schumacher E.F. (1943) Multilateral Clearing. *Economica*, May, 10, 38, pp. 150–165.
- Smirnov A.D. (2023) Macrofinance: The Sigmoidal Dynamics of Money, Debt and Wealth. *HSE Economic Journal*, 27, 3, pp. 317–363. (In Russ.)

- Smirnov A.D. (2024) The Cyclicity of Money and Debt. *HSE Economic Journal*, 28, 3, pp. 363–411. (In Russ.)
- Smirnov A.D. (2025) *Macrofinancial Oscillator: Money and Debt Dynamics*. XXV Yasin (April) International Conference, Honorary Speakers. Moscow. (In Russ.) Available at: <https://www.conf.hse.ru/2025/keynote/>
- Strogatz S. (1994) *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Reading.
- Tobin J. (1963) *Commercial Banks As Creators of «Money»*. Cowles Foundation Discussion Paper. no. 159. Available at: <http://cowles.yale.edu/sites/default/files/files/pub/d01/d0159.pdf>
- Tobin J. (1987) *Money*. The New Palgrave: A Dictionary of Economics, Palgrave Macmillan.
- Yadav Y., Malone B. (2025) *Stablecoins and the US Treasury Market*. Available at: [https://www.papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id](https://www.papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id)
- Yardeni E. (2018) *The Bond Vigilantes*. Available at: <https://archive.yardeni.com/exerpts>
- Ye C., Huang J. (2008) Non-classical Oscillator Model for Persistent Oscillations in Stock Market. *Physica A* 387, pp. 1255–1263.
- Yashinski A. (2021) *Exponentials and Rotations*. Available at: <https://www.math.umd.edu>