ЛЕКЦИОННЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Лекции по моделям макроэкономики

Смирнов А.Д.

Журнал продолжает публикацию курса лекций по моделям макроэкономики, который на протяжении ряда лет читается профессором Смирновым А.Д. на первом курсе магистратуры Государственного университета Высшей школы экономики. Лекции могут использоваться студентами и аспирантами экономических факультетов университетов для изучения экономической теории, макроэкономического моделирования и проблем переходной экономики.

В долг не бери и взаймы не давай;
Легко и ссуду потерять и друга,
А займы тупят лезвее хозяйства.

В.Шекспир, «Гамлет, принц Датский».
(Пер. М. Лозинского)

Лекция 5. Динамика государственного долга и сеньоража

В данной лекции будут рассмотрены понятия и модели, необходимые для анализа процессов финансирования бюджетного дефицита и государственного долга. Они развивают ряд понятий, введенных в *лекциях 1 и 2,* и, в свою очередь, будут использованы для построения и анализа стохастических моделей долга. В порядке своеобразной полемики с *Полонием,* точка зрения которого на проблемы долга приведена выше и, кстати, разделялась многими экономистами, включая такие величины как *Д. Рикардо*, отметим, что его позиция может быть признана безусловно правильной только для стационарных состояний системы, описывающей динамику государственного долга. В общем случае рациональная точка зрения на проблему долга состоит в том, что брать взаймы выгодно, если, конечно, дают, причем последнее, т.е. доверие кредиторов, напрямую зависит от безукоризненного возврата долгов заемщиком.

Мировой опыт говорит о том, что своевременное и полное возвращение долгов является делом чести как для отдельных лиц, так и для государства, причем честность должника справедливо и хорошо вознаграждается рынком. Например, безупречный двухвековой опыт возврата долгов правительством Америки

Смирнов А.Д. - профессор, доктор экономических наук, действительный член Российской академии естественных наук; ГУ ВШЭ.

имел своим результатом создание ему практически неограниченных возможностей для сравнительно дешевых займов на свободном рынке. Доходность краткосрочных долговых обязательств казначейства США, так называемые *T-bills*, превратились в признанный эталон безрисковой доходности и служат мерой рыночной ставки процента для самой крупной экономики мира.

5.1. Рыночная ставка процента

Одним из важнейших инструментов макроэкономического анализа, который широко используется на современном рынке, как товаров так и денег, это ставка процента. Ставка процента, или доходность ценной бумаги, определяется рынком, где действуют частные инвесторы и кредиторы (сберегатели). Реальная эффективность инвестиций (внутренняя норма отдачи капиталовложений или *internal rate of return*) лежит в основе понятия рыночной ставки процента, но не тождественна ей.

Когда инвестор решает приобрести некоторый актив, т.е. благо, приносящее поток доходов в будущем, то его инвестиции тождественны сокращению текущего потребления. Инвестор откладывает определенную сумму денег от текущего потребления ради получения некоторого дохода в будущем, величина которого, вообще говоря, точно неизвестна в момент принятия решения. Рационально действующий инвестор поэтому требует компенсации издержек, которые он объективно несет за время, в течение которого его средства связаны в инвестициях. Эта компенсация включает возмещение возможных потерь дохода из-за инфляции, связывания средств в данном виде инвестиций, а также рисков, что объясняется неопределенностью будущего и, следовательно, влияет как на размеры и сроки ожидаемого дохода, так и на вероятность простого возврата вложенных средств. Владелец актива (эмитент ценной бумаги) должен быть готов компенсировать инвестору его время и риск, иначе никто не будет покупать данный актив.

Компенсация инвестора происходит как в форме дохода от инвестиций (процент с депозита, купонный доход с облигаций, дивиденды с акций, рентный доход от недвижимости и т.д.), так и через изменение стоимости приобретаемого актива (*capital gain or loss*). Здесь и в дальнейшем будем полагать r ставкой безрисковой доходности по депозиту в надежном коммерческом банке. Альтернативным представителем такой же безрисковой краткосрочной доходности служит доходность (дисконтная) государственных трехмесячных казначейских обязательств, *T-bills* или их аналогов. В дальнейшем будем отождествлять общую доходность инвестиций (доход и прирост капитальной стоимости, отнесенные на единицу первоначальной стоимости актива) с величиной рыночной ставки процента. Весьма распространенным «представителем» (*proxy*) рыночной ставки процента является величина доходности трехмесячных облигаций казначейства США, так называемых *T-bills*, которые являются высоколиквидным и практически безрисковым финансовым инструментом. Следовательно, экономический смысл ставки процента состоит в том, что она является ценой времени и риска.

Ставка процента отражает требования инвестора к доходности альтернативных вложений, не обязательно эффективности проектов в реальном секторе, а любого приобретения на финансовом рынке активов, приносящих доход. Иными словами, рынок гарантирует любому инвестору получение (без риска) дохода по ставке надежного коммерческого банка, которая полагается равной рыночной, т.е.

средней или типичной. Получение более высокого дохода, вообще говоря, также возможно, но связано с неопределенностью и риском. Последний компенсируется за счет более высокой доходности рискованных инвестиций по сравнению с рыночной (безрисковой) ставкой процента. Поэтому номинальная ставка процента или доходности r состоит из ряда компонент, которые отражают реальную эффективность вложений (*expected real interest rate*) $\hat{r}$, воздействие ожидаемой инфляции (*expected inflation rate*) π, влияние риска (*expected risk premium*) σ и времени связывания инвестиций (*expected liquidity premium*) l :

$$r = \hat{r} + \pi + \sigma + l\,.$$

Понятно, что инвестиции могут вкладываться на различные сроки, давать доход не только в конце периода инвестирования, но и с различной частотой, либо непрерывно. Если доход по облигациям начисляется только в конце периода, то такие облигации имеют нулевой купонный доход *(zero coupon or bullet bonds),* и они продаются с дисконтом. Это значит, что владелец актива получает доход в виде разности между номиналом и ценой приобретения (дисконтной) актива. С другой стороны, купонный доход выплачивается периодически, как правило, два раза в год, хотя теоретически может начисляться непрерывно.

Ценные бумаги, или как говорят, финансовые инструменты с периодом обращения (*time to maturity*) до года соответствуют инструментам «денежного рынка» (*money market instruments*). Когда срок действия финансовых инструментов превышает год, то они, т.е. облигации - частные и государственные, а также акции, считаются инструментами рынка капиталов (*capital market instruments*). Облигации, как правило, имеют фиксированные сроки погашения, но есть и бессрочные облигации - так называемые консоли (*consols*). Акции (*stocks or equities*) теоретически имеют бесконечный срок действия, поскольку корпорации по закону существуют неограниченно долго.

Современные финансовые рынки предлагают фантастическое разнообразие как основных (акции и облигации), так и производных *(financial derivatives)* финансовых инструментов. Рынок финансовых производных - форвардов и фьючерсов, простых и экзотических опционов, свопов и т.д. бурно развивается, причем различия между основными и производными активами все более стираются. Например, доходные облигации *(income bonds)* с возможностью конверсии в акции *(convertible bonds*) или выкупа эмитентом по заранее оговоренным цене и срокам *(bonds with call provisions),* обладают характеристиками и опционов *(options),* и акций, т.е. основных и производных финансовых инструментов. Компактное изложение механизмов работы современных финансовых рынков содержится, например, в [5].

5.2. Ставка процента и дисконтирование

Рыночная ставка процента, регулируя стоимость кредита, определяет и рыночные требования к величине доходности капиталовложений и спросу на них, $I = I(r)$. Объясним это на следующем простом примере. Предположим, что некоторая компания решает приобрести 4 единицы нового оборудования с разными вариантами его использования. Для приобретения каждой единицы она берет кредит в 50 млн. руб. по рыночной ставке 5% в месяц. Первая единица оборудования дает эффект в 10% (5 млн. руб.) к размерам кредита, вторая - 8%, третья - 5 и последняя - в 3% (1,5 млн. руб.) в месяц. Полагаем, для простоты, что для кредита временной интервал ограничивается месяцем, его размер не влияет на ставку, и что все расходы компании на приобретение оборудования покрываются за счет кредита. Из сказанного ясно, что в условиях данного примера для фирмы целесообразно приобретение только первых трех единиц оборудования, которые окупают взятый кредит по рыночной ставке процента. Следовательно, рыночный процент - это критерий эффективности осуществления инвестиций, что иллюстрируется на рис. 5.1. Повышение рыночной нормы процента (ставки банковского кредита в нашем примере), ужесточая требования к инвестиционным проектам, сокращает капиталовложения и наоборот.

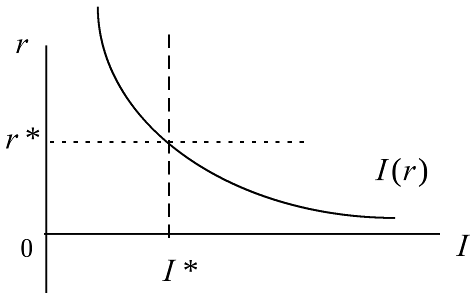

Рис. 5.1. Инвестиции и норма процента

Можно сказать, что рыночная норма (ставка) процента r - это величина, определяющая зависимость текущей цены (*present value*) V_t, финансового или реального актива и доходности последнего V_{t+1}.

Для дискретного детерминированного процесса изменения во времени стоимости актива имеет место следующая простая зависимость между текущей стоимостью актива $V = V_t$ (инвестиций или ценной бумаги), получаемым доходом V_{t+1} и (постоянной) рыночной или эффективной ставкой процента r:

$$(1+r)V_t = V_{t+1} \qquad (5.1)$$

Смысл этой формулы весьма прост: если известная сумма денег V_t отдается в долг (инвестируется в момент времени t), скажем, на один год под r процентов, которые начисляются однократно, например в конце года, то в момент $(t+1)$ она становится равной сумме в V_{t+1} рублей. Данная операция инвестирования имеет и другой, эквивалентный, смысл. Можно сказать, что в настоящий момент времени t инвестор «покупает» будущий доход V_{t+1}, если он известен, по текущей цене в V_t рублей при условии, что альтернативные вложения, например, покупка *T-bills* или приобретение денежного депозита в надежном банке, принесут ему такой же доход по рыночной (эффективной) ставке процента r. Сказанное выше дает возможность переписать формулу (5.1) в виде:

$$V_t = \frac{1}{1+r} V_{t+1},$$

которая имеет смысл для известной (ожидаемой) величины будущего дохода. Она устанавливает связь между известным и фиксированным будущим доходом $\overline{V}_{t+1}$, рыночной ставкой процента и текущей ценой актива V_t. Согласно этой формуле будущий доход дисконтируется, или приводится, при помощи рыночной ставки процента к величине текущей стоимости актива.

5.3. Условие арбитража и эффективный рынок

В теоретических исследованиях удобнее пользоваться не дискретными, а непрерывными моделями, которые, как правило, менее громоздки. Для непрерывного детерминированного процесса изменения стоимости актива $V(t)$ временной интервал полагается очень коротким (бесконечно малым) dt, в течение которого инвестор может выбирать между вложениями в данный актив и доходом по депозиту. Пусть приобретение данного актива (решение принимается в точке времени t) дает инвестору право на периодически получаемый, или купонный (*coupon yield*), доход $C(t)$, а также на получение дохода от прироста (бесконечно малого) капитальной стоимости актива (*capital gain or loss*) в конце рассматриваемого периода dV. Инвестор вложит средства в приобретение актива, если суммарная доходность от инвестиций, т.е. купонный доход и прирост стоимости актива, будет по крайней мере не меньше, чем доход, гарантированный данным состоянием рынка, например, от денежного депозита такого же размера в надежном коммерческом банке, $rV(t)dt$. Поскольку при этом практически всегда можно полагать выполненным условие ненасыщения, т.е. рациональный инвестор всегда предпочитает больший доход меньшему, то неравенство может быть заменено на равенство:

$$rV(t)dt = C(t)dt + dV \quad (5.2)$$

при известных купонном доходе $C(t)$ и рыночной ставке процента r. Уравнение (5.2), как говорят, отражает условие отсутствия арбитражной прибыли *(no arbitrage condition),* которое играет важную роль в современной макроэкономической и финансовой теории и полагается выполненными на эффективном рынке.

В левой части уравнения (5.2) стоит величина, которая определяет требования инвестора к доходности данного актива в соответствии с рыночной ставкой процента, справа - сумма текущего дохода (купонного дохода для облигации или дивиденда для акции) и роста капитальной стоимости актива за (бесконечно) малый период времени dt. Таким образом, инвестор выберет данный актив (инвестирует в него) в том случае, если она будет не выше и не ниже рыночной доходности любого другого актива по ставке рыночного процента $r > 0$. В противном случае возможен арбитраж, т.е. получение дополнительного дохода за счет простого перераспределения средств или ресурсов. В случае экономического равновесия такие возможности отсутствуют, поскольку выбор оптимален, а поэтому смысл уравнения (5.2) состоит в описании условий экономического равновесия или *no-arbitrage conditions*.

Отсутствие условий арбитража на эффективном рынке (5.2) можно показать на основе следующих рассуждений. Предположим противное, например, что доход от данных вложений (приобретения данного актива) выше рыночного, т.е. имеет место неравенство $rv(t)dt < [c(t)dt + dv]$. В этом случае рациональный инвестор будет занимать деньги в банке по рыночной ставке, в предположении существования такой возможности, и вкладывать их в данный актив, следовательно, зарабатывая на основе эксплуатации рыночного несовершенства. Однако даже если такая возможность и имеет место, то вряд ли она может существовать достаточно долго, поскольку в условиях свободной конкуренции (*EMH*) увеличение заявок на займы заставит банки поднять процент, а увеличение покупок данного актива повысит его цену, сократив тем самым его доходность. Можно полагать, что эти процессы будут проходить до тех пор, пока не восстановится равенство (5.2). Напротив, при неравенстве $rv(t)dt > [c(t)dt + dv]$ отсутствие спроса на данный вид инвестиций понизит их цену, следовательно, увеличит доходность, значит и привлекательность для инвесторов, тогда как обилие депозитов скорее всего повлечет за собой снижение банковского процента. И то, и другое снова будет иметь место до восстановления рыночного равновесия.

Таким образом, на эффективном рынке неограниченная конкуренция приводит к выравниванию «стандартной доходности» и рыночного процента. Отсутствие условий арбитража считается важнейшей характеристикой эффективного рынка, которая, выражаясь попросту, означает, что «бесплатных завтраков» рынок не дает, а любая возможность, предоставляемая рынком, обязательно имеет свою цену, которую надо платить. Гипотеза эффективного рынка (*effective market hypothesis EMH*), уже упоминавшаяся в *лекции 1*, предполагает наличие широкого разнообразия финансовых инструментов, полное и практически мгновенное распространение неискаженной информации и отсутствие барьеров для входа на рынок, причем каждый инвестор в состоянии теоретически мгновенно переработать всю наличную информацию[1]. Гипотеза эффективного рынка имеет чрезвычайно важное значение для современной теории финансов, а ее адаптация для макроэкономических процессов в значительной степени способствовала формулировке гипотезы рациональных ожиданий и моделям неоклассического равновесия.

5.4. Решение уравнение арбитража

Рассмотрим теперь условие отсутствия арбитража (5.2) с формальных позиций, т.е. как уравнение, решение которого необходимо найти. Пусть ставка доходности и купонный доход - известные функции времени, и уравнение (5.2) записано в виде:

$$\frac{dV}{dt} = r(t)V(t) - C(t). \tag{5.3}$$

Общее решение обыкновенного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка (5.3) может быть найдено *методом вариации произвольной постоянной* в виде:

$$V(t) = A(t)\exp\{R(t)\}, \tag{5.4}$$

где $A(t)$ - неизвестная постоянная, полагаемая функцией времени, а

[1] На финансовом рынке действуют как арбитражеры (*arbitrageurs*), так и спекулянты (*speculators*). И те, и другие стремятся получить прибыль, используя рыночные несовершенства, но действуя по-разному. Коротко говоря, спекулянты эксплуатируют несовершенства рынка, занимая короткие или длинные позиции (*short or long positions*) для разных периодов времени, тогда как арбитражеры - несовершенства рынка в текущий момент.

$$R(t)=\int_0^t r(\tau)d\tau .$$

Дифференцируя (5.4) и подставляя результат в (5.3), находим при заданных начальных условиях $V(0)=V_0$ общее решение уравнения арбитража в виде:

$$V(t)=\exp\{R(t)\}[V_0-\int_0^t C(\tau)\exp\{-R(\tau)\}d\tau]. \quad (5.5)$$

Найденное таким образом решение является как бы «впередсмотрящим»: стоимость актива в любой момент будущего определяется как изменение начальных условий (первоначальной стоимости актива) под влиянием ставки процента и купонных выплат. Экономический смысл решения достаточно прост и естественен: в будущем стоимость актива растет в соответствии со ставкой процента, причем размеры купонных выплат будущую стоимость актива уменьшают.

Однако для многих экономических процессов удобнее полагать известными значения процесса не в начальный момент времени, а в конечный $t=T$. Стоимость актива может быть заданной условиями контракта на некоторый конечный момент времени в будущем, например, как нарицательная стоимость долга (сумма, взятая взаймы вместе с процентами) $V(T)=V_T$ *(face value of a debt).* В этом случае решение (5.3) ищется как бы от конца, как «назадсмотрящее» при известном конечном значении процесса. Подстановкой $t'=T-t$ уравнение арбитража приводится к следующему виду:

$$\frac{dV}{dt'}=-r(t')V(t')+C(t'), \quad (5.6)$$

которое означает, что в течение (бесконечно малого) периода времени dt' нарицательная стоимость долга, которая в конце его равна величине V_T, уменьшится на величину $r(t')V(t')dt'$ при отсутствии арбитражной прибыли. Решение (5.6) ищется тем же способом вариации произвольной постоянной, который приводит к нахождению функции

$$V(t')=\exp\{-R(t')\}V_T+\int_0^{t'} C(\tau)\exp\{R(\tau-t')\}dt']. \quad (5.7)$$

В частности, при постоянных значениях купонного дохода $C(t')=C$ и ставки процента $r(t')=r$ получаем:

$$V(t')=[V_T-\frac{1}{r}C]\exp\{-rt'\}+\frac{1}{r}C.$$

Решение (5.7) говорит о том, что текущая рыночная стоимость долга представляет собой дисконтированную по ставке процента величину нарицательной стоимости долга, скорректированную на величину дисконтированной стоимости купонных выплат. Понятно, что решения (5.5) и (5.7) формально эквивалентны, однако требуют задания либо начальных (для «впередсмотрящего» решения), либо конечных (для «назадсмотрящего» решения) условий.

5.5. Стоимость активов с бесконечным сроком функционирования

В реальных условиях процент может начисляться в разные периоды, горизонт не ограничивается одним годом, а долговые обязательства могут выкупаться. Продолжая наш пример, предположим, что норма процента, которая в годовом исчислении составляет постоянную величину $r(t) = r = const$, начисляется непрерывно в течение неограниченного времени, начиная с момента $t \geq 0$. В этом случае рыночная стоимость $V(t)$ будет представлять дисконтированную, т.е. приведенную к настоящему моменту времени по рыночной ставке процента $r > 0$ стоимость потока будущих доходов $C(\tau)$ для всех $\tau \geq t$:

$$V(t) = \int_t^\infty \exp[-r(\tau - t)]C(\tau)d\tau . \tag{5.8}$$

Если несобственный интеграл (5.8) существует, то он представляет текущую или рыночную стоимость актива. Это - величина так называемой *present discounted value,* настоящей или приведенной к текущему моменту времени t стоимости актива $V(t)$. Понятие текущей или настоящей приведенной стоимости актива, которое легко обобщить и на вероятностные процессы, что будет сделано в последующих лекциях, играет исключительно важную роль как в теоретических моделях, так и экономической практике.

Продифференцировав выражение (5.8) по времени:

$$\dot{V}(t) \equiv \frac{dV}{dt} = r\exp(rt)\int_t^\infty C(\tau)\exp(-r\tau)d\tau - \exp(rt)c(t)\exp(-rt) = rV(t) - C(t) ,$$

получаем уравнение (5.3), откуда следует, что (5.8) является для него решением. Рассуждая более формально, можно сказать, что дифференциальное уравнение арбитража (5.3) при условии сходимости интеграла (5.8), например, для экономически типичной ситуации:

$$\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)\exp[-r(\tau - t)] = 0 ,$$

имеет своим решением функцию (5.8). Уравнение арбитража будет исследовано в разных аспектах в последующих лекциях при рассмотрении механизма взаимодействия инфляции, денег и долгов.

Пусть ожидаемый поток будущих доходов известен, тогда вычисляя интеграл (5.8) при фиксированном t, получаем:

$$V(t) = \frac{C(t)}{r} , \tag{5.9}$$

которое имеет естественный экономический смысл капитализированного по рыночному проценту $r > 0$ потока будущих доходов $C(t)$. Эта величина определяет текущую рыночную стоимость данного актива.

В частном случае - это текущая цена, например, стоимость "консоли" - облигации с бесконечным сроком действия. Очевидно, что цена консоли тем выше, чем ниже рыночная норма процента, и наоборот. Значит, если «консоль» (или акция, если дивиденды могут быть фиксированы бесконечно долго) приносит номинальный доход в 20 долл. ежегодно, то при ставке рыночного процента равной пяти, ее текущая цена будет равна 400 долл. Если рыночный процент падает до одного процента в год, то цена консоли возрастает до 2000 долл.

5.6. Уравнение динамики общественного долга

Рынок государственных ценных бумаг в условиях переходной экономики существенно отличается от соответствующего сегмента финансового рынка в странах свободной конкуренции. Конечно, и в том, и в другом случаях государство - монопольный эмитент своих долгов, но его способность осуществлять свое право монополиста в условиях развитого финансового рынка существенно ограничена несколькими факторами. Во-первых, доля государственного сегмента на рынке долгов, хотя и существенна, но вполне сопоставима с долей частных долгов. Во-вторых, емкость рынка акций примерно равна емкости рынка совокупных долгов, и понятно, что государство не может прямо воздействовать на формирование доходности акций. В третьих, практически невозможно изолировать внешнюю компоненту долгов, так как на современном дерегулированном финансовом рынке резиденты и нерезиденты действуют практически в равных, по крайней мере формально, условиях. В результате, факторы доходности формируются и определяются рынком совместно, и отличия в доходности акций, частных долгов и государственных, как внутренних, так и внешних, зависят лишь от различий между конкретными инструментами, особенностей налогообложения и рыночной стоимости риска. Государство в условиях развитого финансового рынка - пусть самый крупный, но все же один из многих продавцов ценных бумаг, и потому вынуждено конкурировать с другими продавцами долговых обязательств, акций, кредитов и закладных (*mortgages*), хотя и обладает рядом мощных рычагов повышения привлекательности своих ценных бумаг, недоступных частным эмитентам.

Резкая асимметрия финансового рынка в переходный период выражается в практически полном отсутствии рынка частных долгов и закладных, слабо развитых рынках кредитов и акций, а также в существенных ограничениях на деятельность нерезидентов[2)]. Доминирование сегмента государственных ценных бумаг имеет своим следствием ярко выраженный *рынок продавца*, в роли которого правительство диктует цену и/или доходность облигаций, определяя не только предложение, но и во многом воздействуя на формирование спроса на долги. Отмеченные особенности финансового рынка в переходный период лежат в основе модели поведения правительства и частных инвесторов на рынке государственных долгов, развиваемой в *данной и последующей лекциях*.

[2)] Если рынок закладных практически отсутствует, то рынок кредитов существует, правда, только как рынок краткосрочных инструментов.

Начнем исследование поставленной проблемы с анализа *детерминированной* ситуации финансирования государственного долга и бюджетного дефицита. Для простоты будем рассматривать двухкомпонентный финансовый рынок, не различая внутренний и внешний долг, хотя, конечно, формирование и обслуживание этих видов государственной задолженности существенно отличны. Не рассматривается также и существование частного долга, что, в свете вышесказанного, для российской экономики представляется вполне уместным допущением, учитывая доминирующую роль на финансовом рынке сегмента государственных долговых обязательств. Объем государственного долга будем рассматривать как облигации, гарантирующие получение безрискового дохода в течение теоретически бесконечного периода времени (*perpetuity*). Наконец, спрос на долги определим лишь в зависимости от их доходности, игнорируя возможность использования краткосрочных долгов как субститутов денег.

В *лекциях 1 и 2* рассматривалось стандартное уравнение[3] роста (внутреннего) общественного долга, или частного богатства. Это уравнение, где все переменные полагаются непрерывными и дифференцируемыми функциями времени, имеет в номинальных терминах следующий вид:

$$\dot{M} + \dot{B} = P(G - T) + RB \,, \tag{5.10}$$

где $\dot{M} \equiv \dfrac{d}{dt} M(t)$ - размер сеньоража или эмиссии денег в номинальном выражении;

$\dot{B} \equiv \dfrac{d}{dt} B(t)$ - размер дополнительного размещения на свободном рынке государственных долговых обязательств;

$P(G - T)$ - дефицит государственного бюджета в номинальном выражении;

G - бюджетные расходы в реальном выражении;

T - реальные налоги, не смещающие размеры выпуска;

RB - размер обслуживания государственного долга по ставке номинального процента $R > 0$.

Если ввести переменные для реальных значений денежных балансов $m = M / P$ и реальной стоимости долга $b = B / P$, также полагая их дифференцируемыми функциями времени, то уравнение (5.10) можно переписать в реальных терминах как

$$\dot{b} = rb - S + (G - T) \,, \tag{5.11}$$

где $S = \dot{M} / P$ - размер реального сеньоража;

$r = R - \pi$ - реальная безрисковая ставка процента по государственным долговым обязательствам;

$\pi \equiv \dot{P} / P$ - темп фактической инфляции.

[3] Потребности в финансировании текущего бюджетного дефицита и в обслуживании текущего долга могут обеспечиваться в краткосрочном периоде и продажами государственного имущества, которые мы не рассматриваем, учитывая их ограниченный характер.

Удобство анализа уравнения (5.11) состоит в возможности моделировать поведение и процесс принятия решений как государством, так и частными инвесторами. С одной стороны, государство предстает как монопольный «производитель», или эмитент, долговых обязательств - денег (долгов с отрицательной нормой реальной доходности, равной темпу инфляции) и облигаций (долгов в собственном смысле, с положительной нормой реальной доходности)[4]. С другой стороны, совокупность большого количества частных инвесторов конкурирует на финансовом рынке, формируя спрос на государственный долг через требования к общей доходности активов и сопоставляя купонную доходность и рост (снижение) капитальной стоимости активов.

Частные инвесторы формируют свои портфели из реальных денежных балансов и неденежных активов, в данном случае государственных облигаций, однако простой портфельный подход к данной ситуации неприменим, так как абсолютно нерационально приобретать активы с отрицательной доходностью. В общем случае, следовательно, необходимо объяснить потребность в «ликвидности», например, посредством включения переменной денег в функцию полезности типичных инвесторов. Соответствующие подходы достаточно хорошо разработаны в современной литературе, однако их использование потребовало бы значительно более общего анализа макроэкономических рынков. Между тем и непосредственное рассмотрение уравнения (5.11) раскрывает взаимозависимость фискальной и монетарной политик, что позволяет в рамках поставленной задачи выдвинуть несколько гипотез формирования богатства или финансирования бюджета.

5.7. Общие условия стабилизации государственного долга

Анализ уравнения (5.11) говорит, в частности, о том, что если монетарные инструменты не используются, $S=0$, то стабилизация государственного долга может быть обеспечена лишь при проведении последовательной, или сбалансированной, бюджетной политики *(sustainable government fiscal policy)*, которая характеризуется следующим условием:

$$b(t)+\int_t^{\infty} G(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau=\int_t^{\infty} T(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau . \qquad (5.12)$$

Для сходящихся несобственных интегралов, использованных в левой и правой частях уравнения (5.12), оно эквивалентно уравнению (5.11), утверждая вполне очевидную истину: выплата долгов и финансирование текущих правительственных расходов возможны лишь когда поток приведенной стоимости будущих налогов, по крайней мере, не меньше потока затрат[5]. Теоретические аспекты этой проблемы, в частности как проявления *Рикардианской эквивалентности* теку-

[4] Хотя фактически в отдельные периоды реальная доходность может быть отрицательной, эти ситуации здесь не рассматриваются. В любом случае, реальная норма доходности облигаций будет выше инфляции.

[5] Поскольку государство, также как и частный потребитель и инвестор, предпочитает больший доход меньшему доходу, то из соображений «ненасыщения» в уравнении (5.12) используется знак равенства.

щих затрат правительства и будущих налогов, детально исследованы *С.Турновским* [1].

Обратим, однако, внимание на то, что *допущение о возможности нулевого сеньоража* требует финансирования операционального дефицита, т.е. суммы текущего дефицита и обслуживания долга, целиком за счет размещения новых долгов на свободном рынке. Такая ситуация правдоподобна лишь при высокой кредитоспособности правительства, относительно небольших размерах его долгов и доли дефицита в ВВП страны. В более общих ситуациях, как нам кажется, государство не может пренебречь монетарными инструментами для финансирования своих расходов, по крайней мере, в части обслуживания накопленного долга. В переходный период государство попросту и не может этого сделать в силу как значительных масштабов финансирования дефицита, так и неразвитости финансового рынка и ограниченного доверия к своей политике.

Совместное использование эмиссии денег и долгов как источников финансирования дефицита приводит к двум важнейшим последствиям: *сеньораж становится, во-первых, основным источником формирования купонных выплат частным инвесторам и, во-вторых, средством регулирования величины долговых обязательств.* Последняя функция сеньоража вытекает из того, что при фиксированной ставке общей доходности облигаций большая купонная доходность означает меньшую величину роста капитальной стоимости активов, и наоборот.

Положим для определенности величину текущего бюджетного дефицита в реальном выражении положительной функцией времени. Если сеньораж не превышает размеры текущего дефицита бюджета, т.е. имеет место неравенство

$$S_N \equiv S-(G-T) \leq 0\,,$$

то, как показывает решение уравнения (5.11), государственный долг растет неограниченно. Такая ситуация объясняется тем, что государство размещает на свободном рынке дополнительные долги в размерах, равных или больших, чем весь объем необходимых выплат по долгу в данный момент времени, иными словами, существующие долги как бы «обеспечиваются» будущими долгами. В этом случае государство ведет так называемую игру Понци *(Ponzi-game condition),* иррациональность которой для $b(0)=b_0,\ r>0,\ S_N<0$ отражается в неустойчивости решения уравнения

$$\dot{b}=rb+S_N\,.$$

Рассматривая это уравнение с позиции частного инвестора, можно заключить, что игры Понци возможны, если инвестор согласен покупать активы (долги правительства), либо ожидая лишь роста их капитальной стоимости, либо соглашаясь иметь текущие убытки (отрицательный купонный доход)[6]. И первое, и второе утверждение плохо согласуются с действительностью, а поэтому ситуации,

---

[6] Ч.Понци - американский делец, который в 20-х годах собрал под обещания сверхвысоких доходов с одураченных людей свыше 15 млн. долларов, раскручивая финансовую аферу, которая в 90-е годы в России стала известна как «пирамида». Некоторые отличия между Америкой и Россией все же существуют: Понци был довольно быстро осужден и упрятан за решетку, где отсидел несколько лет, тогда как его российский последователь Мавроди стал депутатом Госдумы.

порождающие игры Понци, необходимо исключить. Иными словами, интерес с точки зрения макроэкономической политики представляют только устойчивые решения уравнения (5.11).

5.8. Устойчивое решение уравнения долга

Когда сеньораж больше реального текущего дефицита

(5.12) $$S_N \equiv S-(G-T)>0,$$

то объем размещения дополнительных долговых обязательств будет ниже величины обслуживания текущего долга. Поэтому получить устойчивое решение уравнения (5.11) при положительном значении нормы реальной доходности облигаций $r>0$ можно, только если размеры сеньоража превышают реальный дефицит бюджета. В этом случае общие размеры долговых обязательств могут регулироваться, в частности, посредством определенной монетарной политики. Например, размеры сеньоража могут устанавливаться на таком уровне, чтобы покрывать бюджетный дефицит и новые заимствования. При известном потоке будущего «чистого» сеньоража $S_N = S_N(t)$ и выполнении условия сходимости обыкновенное дифференциальное уравнение

(5.13) $$\dot{b} = rb - S_N$$

может быть записано в эквивалентной интегральной форме

(5.14) $$b(t,S)=\int_t^{\infty} S_N(\tau)\exp(-r(\tau-t))d\tau,$$

что легко проверяется дифференцированием, причем решение (5.14) параметрически зависит от функции $S_N(t)$. Решение (5.14) имеет глубокий экономический смысл, если несобственный интеграл в правой части (5.14) имеет смысл, т.е. является сходящимся. В этом случае он представляет собой дисконтированную по доходности $r>0$ к текущему моменту t стоимость будущего потока сеньоража. Иными словами, $b(t,S)$ - это рыночная стоимость государственного долга, которая конечна, несмотря на положительность параметра доходности. Следовательно, использование в экономических расчетах и принятии экономических решений на перспективу рыночной стоимости долга вполне оправдано и обосновано, поскольку отражает в каждый момент времени возможность эволюции, например, перепродажи долга в будущем. Это делает запись (5.14) чрезвычайно удобной в экономических расчетах и моделировании.

Для известной (фиксированной) функции сеньоража имеем $b(t,S)=b(t)$, и устойчивое решение (5.13) можно найти, подбирая *методом Сарджента-Уоллеса* соответствующую константу интегрирования. Нахождение решения состоит из двух этапов. Сначала методом вариации произвольной постоянной, использованным в *разделе 5.4*, находим общее решение неоднородного уравнения (5.13), дифференцируя функцию $b(t)=c(t)\exp(rt)$, что дает

$$b(t) = [A - \int_0^t S_N(\tau)\exp(-r\tau)d\tau]\exp(rt),$$

где A - произвольная константа интегрирования, которая подбирается так, чтобы выполнялось равенство

$$A = \lim_{t\to\infty} \int_0^t S_N(\tau)\exp(-r\tau)d\tau = \int_0^\infty S_N(\tau)\exp(-r\tau)d\tau.$$

Выполнение этого условия обеспечивает существование устойчивого решения для уравнения (5.13), поскольку гарантируется сходимость несобственного интеграла $\int_t^\infty S_N(\tau)\exp(-r(\tau-t))d\tau$.

Чрезвычайно важно иметь в виду, что уравнение (5.13) есть не что иное как *условие арбитража,* рассмотренное в разделе 5.3. С позиции частного инвестора оно формирует рыночные требования к доходности государственных долгов. С позиции правительства условие

$$rb = \dot{b} + S_N$$

утверждает, что потребность в обслуживании текущего долга определяет размеры как сеньоража, так и дополнительного размещения долгов на свободном рынке. Закрепление нормы доходности либо рынком, либо политикой *pegging interest rate* ограничивает привлекательность новых облигаций, следовательно, возможности государства размещать дополнительные долги. В таком случае естественно полагать, что правительство может занимать лишь в размере $0 < \alpha < r$, а следовательно, купонная доходность положительна: $\delta = r - \alpha > 0$. Случай нулевой купонной доходности следует исключить по соображениям недопустимости *игр Понци*, тогда как случай $r = \delta$ соответствует стационарной точке для (5.13).

Понятно, что правительство, как монопольный эмитент долговых обязательств, свою короткую позицию на рынке облигаций может обеспечить, лишь убедив частных инвесторов занять длинную позицию. С точки зрения частных инвесторов - владельцев реальных денежных балансов и реальных долгов государства безрисковая норма процента диктует общие рыночные требования инвесторов к доходности правительственных облигаций, тогда как сеньораж обеспечивает их текущие доходы, или купонные выплаты. При заданных величинах r и δ общая финансовая сбалансированность будет определяться величиной новых заимствований или изменения капитальной стоимости активов α, где $r = \delta + \alpha$.

Сказанное означает, в частности, что будущий поток растущего с постоянным темпом сеньоража фактически дисконтируется по ставке купонных выплат. Пусть в решении (5.14) купонные выплаты увеличиваются с постоянным темпом $S(\tau - t) = S(t)\exp[\alpha(\tau - t)]$, тогда для $\tau \geq t$ и каждого значения t имеет место:

$$b(t) = \int_t^\infty S_N(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau = S(t)\int_t^\infty \exp[-(r-\alpha)(\tau-t)]d\tau = S(t)/\delta,$$

откуда и следует справедливость соотношения $r=\delta+\alpha$, в частности, возможность представления долга как величины, пропорциональной сеньоражу.

Рассмотрим еще одно условие, которое позволит упростить модель, не нарушая, впрочем, ее экономической общности. Из упомянутых выше соображений следует, что реализация последовательной бюджетной политики (*consistent budget policy*) требует равенства между приведенной текущей стоимостью сеньоража и налогов, с одной стороны, и рыночной стоимостью долга и приведенной текущей стоимостью государственных расходов, с другой, т.е. равенства:

$$\int_t^{\infty}[S(\tau)+T(\tau)]\exp[-r(\tau-t)]d\tau=b(t)+\int_t^{\infty}G(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau .$$

Полагая, что дисконтированные стоимости потоков будущих налогов и бюджетных расходов равны друг другу, получаем, что рыночная стоимость долга - это приведенная текущая стоимость потока будущего сеньоража:

(5.15) $$b(t)=\int_t^{\infty}S(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau .$$

Условие (5.15) позволяет рассмотреть зависимость между сеньоражем и долгом и будет использоваться в дальнейшем, особенно для стохастической формулировки проблемы. Понятно, что величина (5.15) параметрически зависит от потока сеньоража, так что в общем случае имеет место

(5.16) $$b(t,S)=\int_t^{\infty}S(\tau)\exp[-r(\tau-t)]d\tau .$$

Для (5.16) стационарное состояние определяется как $b(t,S)=b(S)$ и равно

$$b(S)=\int_0^{\infty}S(\tau)\exp[-r\tau]d\tau .$$

При условии, что сеньораж увеличивается с постоянным темпом $\alpha>0$, которая связана с купонным доходом $\delta>0$ и безрисковой ставкой доходности облигаций $r>0$ соотношением $r=\alpha+\delta$, рыночная стоимость государственного долга в стационарном состоянии представляет величину:

$$b(S)=\frac{1}{r-\alpha}S \quad \text{или} \quad b(S)=\frac{1}{\delta}S ,$$

которая будет играть важную роль в стохастической модели динамики сеньоража.

5.9. Заимствования государства на свободном рынке и долг

Вернемся к проблеме финансирования государственного долга, используя теперь представления о ставке процента и стоимости долговых обязательств. В *лекциях 1 и 2* было установлено, что в экономике переходного периода на финансовом рынке доминирует сегмент государственных долгов, а государственный долг, помимо налогов, финансируется как эмиссией сеньоража, так и новыми заимствованиями государства на свободном рынке. Если по деньгам процент не выплачивается[7)], то заимствования на свободном рынке требуют выплат процента и возврата номинала (*face value*), а значит, приводят к увеличению общей величины долга. С одной стороны, новые заимствования увеличивают долг и его обслуживание, а, кроме того, в долгосрочном плане имеют инфляционные последствия, если сеньораж - один из источников финансирования долга. С другой стороны, долговые заимствования (*borrowings*) облегчают стоимость обслуживания долга, а значит, брать в долг - выгодно, при условии, конечно, что выплаты гарантированы и существует возможность брать в долг. На этом последнем обстоятельстве, которое обычно выпадает из поля зрения в анализе проблем динамики долга, остановимся подробнее.

Исторически точка зрения экономистов на проблему государственного долга эволюционировала, причем амплитуда колебаний в отношении к долгам включала как благоприятную позицию, так и полное отрицание рациональности последних. Точка зрения «классиков», начиная *с А. Смита*, на государственный долг была в целом негативной. *Д. Рикардо* призывал к немедленной выплате всех долгов, накопленных Англией в войнах с Наполеоном, и его бескомпромиссность в этом вопросе стоила ему парламентской карьеры. Правда, *Т.Р. Мальтус* эту позицию не разделял, хотя и находился в меньшинстве. Если говорить коротко, то государство, по мнению представителей «классической» школы, могло лишь в случаях крайней необходимости обращаться к рынку долгов, поскольку выплата последних, разумеется, безупречная, связывает ресурсы, необходимые для развития экономики.

В целом признавая справедливость данной точки зрения, следует отметить, что немедленная выплата долгов - действие явно нерациональное, приводящее к перенапряжению ресурсов государства и резкому падению благосостояния населения. Одним из самых убедительных аргументов в пользу такой точки зрения является опыт Румынии, которая в 80-е годы в кратчайшие сроки выплатила внешний долг ценой практически полного коллапса своей экономики. Ирония истории состоит в том, что *Н. Чаушеску* - тогдашний диктатор Румынии - осуществил, так сказать, буквально рекомендации *Д.Рикардо*, хотя подобно известному мольеровскому герою «не знал, что говорит прозой».

Тезис о выгодности долговых заимствований можно аргументировать с помощью простой детерминированной модели, которая в дальнейшем будет обобщена на стохастические процессы формирования и выплаты долга. Пусть величина номинала государственного долга равна F, а рыночная безрисковая ставка процента r постоянна, положительна и не зависит от величины долга. Полагаем, что рациональный эмитент, также как и владелец долгов, заинтересован в росте рыночной стоимости долга, что облегчает ему обслуживание долга и ослабляет ограничения по величине заимствований. Эмитент выплачивает полную стоимость но-

[7)] В *лекции 6* будет показано, что при тесной связи государственного долга и сеньоража по деньгам фактически выплачивается процент, который формирует привлекательность облигаций для инвестора. В известном смысле - это инфляционное финансирование, поскольку выплата процента по деньгам, как подчеркивается *Г. Кальво* [6], является одной из существенных характеристик экономики «высокой инфляции».

минала (сумму займа плюс процент), долги не списываются и правительство не занимается скупкой или перепродажей своих долгов[8].

Долг, который будет выплачен через период времени dt изменится по стоимости на $dB = -rBdt$, а значит имеет рыночную стоимость, т.е. стоимость приведенную к настоящему моменту, равную величине $B(t) = F\exp[-rt]$, где $B(0) = F$. Сказанное справедливо, если государство в течение периода dt не берет взаймы, и на долг не нарастают проценты[9]. В таком случае государство, как безупречный должник, имея возможность отложить на dt возвращение номинала, на самом деле теряет лишь рыночную стоимость долга. Для этого, конечно, должна существовать возможность выплаты долга в момент времени $t + dt$, например, досрочного выкупа облигаций (*call provisions*). Если, кроме того, норма дисконта настолько велика, что правительство может занимать на свободном рынке с темпом $\alpha > 0$, т.е.

$$dV = \alpha V dt ,$$

то в результате первоначальная сумма долга увеличится и составит к моменту времени t величину $\hat{V}(t) = F\exp(\alpha t)$. Эта величина дисконтируется по той же ставке r, а поэтому равна

$$V(t) = [F\exp(\alpha t)]\exp[-rt] = F\exp[-(r-\alpha)t].$$

Таким образом, для любого момента t в будущем номинальная стоимость «возвращаемого» долга составляет величину F, тогда как его рыночная стоимость составляет величину $B(t)$, если правительство больше не берет в долг, или $V(t)$, если оно берет новые займы на свободном рынке. Но новые займы могут быть возвращены позже, следовательно, в момент t эмитент долгов получает выигрыш, который возникает из-за возможности отложить возвращение долга и составляет[10]

[8] Данное требование существенно и сразу исключает ситуации скупки эмитентом своих долгов, стоимость которых «флотирует» на уровне более низком, чем номинал. Эта ситуация, предполагающая «игру на понижение» рыночной стоимости долга, эквивалентна существованию возможности возврата сумм меньших, чем позаимствованных, иными словами, списанию долгов *de facto*, по крайней мере.

[9] Строго говоря, сумма B, взятая в долг , через период времени (*time to maturity*) dt должна быть возвращена в размере $dB = rBdt$ и, значит, $B(t) = F\exp[rt]$. Поэтому, подчеркнем еще раз, в течение периода dt проценты на долг не начисляются, или, что то же самое, норма дисконта существенно выше ставки процента. Последнее может иметь место, если правительство как безупречный должник, занимающий к тому же и крупные суммы, обслуживает свой долг по ставке процента, которая существенно ниже рыночной.

[10] Для детерминированного процесса результат $[V(t) - B(t)]$ всегда равен издержкам $f(t)$. В *лекции 6* будет показано, что для стохастического процесса сеньоража и долга равенство имеет место только для точки оптимума $S = S^*$, а для всех $S < S^*$ справедливо неравенство $f(S) > b(S) - F$.

$$f(t) = [V(t) - B(t)].$$

В силу соображений, высказанных выше, эмитент заинтересован в максимизации этого выигрыша, что эквивалентно максимизации стоимости возможности отложить возвращение долга до момента t^*:

(5.17) $$\max\{V(t^*) - B(t^*)\} = \max\{F[\exp(\alpha t^*) - 1]\exp(-rt^*)\}.$$

Рассматриваемая ситуация имеет экономический смысл для $0 < \alpha < r$, т.е. когда темп новых заимствований не превышает величины рыночной ставки процента. Дифференцируя по времени равенство (5.17), из необходимого условия оптимальности находим момент времени t^*, для которого разность в рыночной стоимости возвращенного долга максимальна:

(5.18) $$t^* = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{r}{r-\alpha}.$$

Из (5.18) следует, что если $r > \delta = r - \alpha$, то обращение к новым долгам выгодно, и возвращать долг следует не в текущий момент, а в момент времени $t^* > 0$. Если же $r = \delta$, т.е. $\alpha = 0$,то, поскольку выигрыша за счет повышения рыночной стоимости долга государство не получает[11)], возвращать долги следует немедленно.

Проведенный анализ говорит о том, что возможность брать взаймы имеет стоимость $f(t)$, которая зависит от динамики долга. В общем случае существование возможности брать в долг определяется доверием инвесторов к государству, которое, в свою очередь, зависит от способности последнего платить по долгам, в частности, от репутации государства как плательщика долгов. При этом обязанности государства как заемщика по отношению к старым долгам однозначны: оно обязано возвратить долг в полном объеме (первоначальную сумму плюс процент) в установленные сроки.

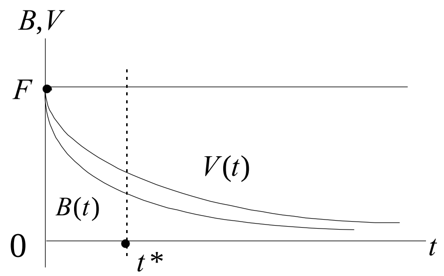

Рис. 5.2. Оптимизация выплаты долгов

Вместе с тем, государство по отношению к новым долгам имеет свободу выбора: оно может как брать, так и не брать взаймы, в зависимости от конкретных обстоятельств. Иными словами, способность государства брать взаймы на свободном рынке - это *асимметричный контракт между государством и инвестором (кредитором),* стоимость которого может быть выражена уравнением

(5.19) $$f(V) = \max\{V - B, 0\}.$$

Уравнение (5.19) отражает ограниченную ответственность государства как заемщика: оно может как брать взаймы, так и не брать, выбирая тем самым мак-

[11)] Случай $\alpha < 0$ означает, что правительство не берет в долг, а само выдает займы, а поэтому не рассматривается.

симальную величину между $[V - B]$ и нулем. Заметим, что асимметрия контракта для данной постановки задачи заключается в том, что инвесторы не свободны, а связаны обязательством покупать долги, если государство пользуется доверием. Такое обязательство следует, конечно, понимать в том смысле, что рациональный инвестор не будет отказываться от возможности заработать безрисковый доход, одалживая свои деньги правительству.

Раз возможность брать взаймы на свободном рынке не бесплатна, то, используя ее, государство должно возместить стоимость возможности брать в долг. Последняя может быть рассчитана на основе методологии определения рыночной стоимости опционов (*options*) - финансовых инструментов, относящихся к классу производных финансовых активов. Для анализа этой методологии необходимо перейти к вероятностной интерпретации макроэкономических процессов.

* *
*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Turnovsky, S. (1995). Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press.

2. Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J. (1997). The Mathematics of Financial Derivatives. Cambridge University Press, Cambridge.

3. Ingersoll, J. (1987). Theory of Financial Decision Making. Rowman and Littlefield.

4. Dixit, A. and Pindyck, R. (1994). Investment under Uncertainty. Princeton University Press.

5. Blake, D. (1990). Financial Market Analysis. McGrow Hill, London.

6. Calvo, G. (1996). Money, Exchange Rates and Inflation. The MIT Press.

7. Смирнов А.Д. Оптимальная стабилизация государственного долга // Экономический журнал ВШЭ, **2**, *№ 1, 1998.*

8. Smirnov A. D. Optimal Budget and Seigniorage Targeting Policy in a Transition Economy // Экономический журнал ВШЭ, **2**, *№ 4, 1998.*

Лекция 6. Модель стабилизации государственного долга

Динамика государственного долга, механизмы его обслуживания и реструктуризации, альтернативные источники финансирования - все эти вопросы имеют актуальное значение для любой экономики, особенно для экономики переходного периода. То, что государство берет в долг - естественно, разумно и оправданно; в частности, его способность размещать новые долги на свободном рынке может служить точным индикатором доверия к правительству как резидентов, так и нерезидентов. Проблемы начинаются, когда рост государственного долга становится неуправляемым, а перспективы его выплаты все более туманными.

В данной лекции будут рассмотрены вопросы *стабилизации государственного долга* при общих условиях его финансирования как за счет эмиссии новых денег (сеньоража), так и новых заимствований государства на свободном рынке.

Объем налогов для упрощения модели будет считаться достаточным для финансирования первичного (беспроцентного) дефицита, т.е. $(G-T)=0$. Проблема финансирования бюджетного дефицита, следовательно, сводится к соотношению новых долгов и сеньоража, а стабилизация долга интерпретируется как точка, в которой государство перестает брать в долг. Прекращение роста объема долга в общем случае естественно трактовать как стационарное состояние для системы, описывающей динамику государственного долга. Однако на множестве допустимых стационарных состояний системы существует лишь одно, где прекращение долговых заимствований приводит к оптимальному в определенном смысле результату.

Условия стабилизации системы по сравнению с детерминированными системами, рассмотренными в *лекциях 2 и 5*, осложняются тем, что будущие значения сеньоража, дефицита и долга являются так называемыми «ненаблюдаемыми переменными» (*nonobservable variables*), поскольку они не известны достоверно, как предполагалось до сих пор, а могут быть получены на основе имеющейся информации лишь как оценки будущих значений вероятностных процессов. Рассмотрение этой проблемы в общем виде требует интерпретации динамики бюджетного дефицита, сеньоража и долга как процессов, имеющих стохастическую природу. За последние годы в макроэкономической теории заметен растущий интерес к моделированию этих процессов на основе методологии теории опционов, основы которой заложены в работах *Ф. Блека, М. Шолза,* и *Р. Мертона.*

В данной лекции будет рассмотрена стохастическая модель монетарной политики правительства, в которой заимствования правительства представлены как функция случайного процесса сеньоража, или опцион, «выписанный» по сеньоражу. В контексте теории опционов *монетарную политику правительства* удобно представить как портфель активов стоимостью Φ, состоящий из эмиссии сеньоража S и государственного долга $f(S)$. Сеньораж является стохастическим процессом, а новые заимствования правительства на рынке долгов $f(S)$ и накопленный долг $b(S)$ представляются функциями этого случайного процесса. Реализация политики - это выбор правительством коэффициентов θ_1 и θ_2, который приводит к изменению стоимости портфеля:

(6.1) $$\Phi=\theta_1 S+\theta_2 f(S).$$

Государственный долг, реализованный на свободном рынке - это частное богатство покупателей данных активов. Поэтому короткая позиция казначейства на первичном рынке государственных ценных бумаг должна быть сопряжена с длинной позицией частных инвесторов через адекватную доходность размещаемых облигаций. Но источниками выплат купонного дохода и роста капитальной стоимости, если отвлечься от внешних источников финансирования, что впрочем непринципиально, могут быть только налоги, эмиссия денег и новые долги. Эти источники используются в разных сочетаниях, что и допускает возможность возникновения инфляционных ситуаций, особенно в случае значительного роста долговых обязательств государства. Современная макроэкономическая теория, вообще, полагает, что инфляция порождается как эмиссией денег, так и долговых обязательств, причем в долгосрочном плане эмиссия долговых обязательств имеет более значительные инфляционные последствия [1,2]. Поэтому, как не парадоксально звучит, экономика, обремененная долгами, не может не быть инфляционной, пусть даже квазиинфляционной в переходный период. Точнее, она может быть неинфляционной лишь в краткосрочном периоде, а в долгосрочном периоде неизбежные потери от инфляции должны сопоставляться с альтернативными потерями, вызываемыми спадом производства, безработицей и неплатежами.

В литературе обычно подчеркивается лишь как бы «деструктивная роль» сеньоража, или эмиссии денег в реальном выражении, увеличение которого порождает рост инфляции. Признавая значимость денег как основного фактора инфляции в долгосрочном периоде, необходимо иметь в виду и роль денежной эмиссии как фактора стабилизации государственного долга. Это совершенно очевидно при арбитражной трактовке основного уравнения динамики государственного долга, поскольку сеньораж является основным источником выплаты владельцам облигаций купонного дохода. Если безрисковая доходность долгов распадается на купонную доходность и рост капитальной стоимости активов $r=\delta+\alpha$, то, когда правительство или центральный банк поддерживают фиксированную доходность государственных облигаций, т.е. проводят вариант *pegging interest rate policy* $r>0$, то увеличение купонной доходности $\delta>0$ сопровождается замедлением роста капитальной стоимости активов $\alpha>0$, и наоборот. Предельным случаем подобной адаптации является *стабилизация, или прекращение роста ожидаемой приведенной стоимости долга*, т.е. стационарная точка уравнения динамики долга.

Общая логика рассуждений состоит в том, что продавец долгов (государство) и покупатели долгов (частные инвесторы) действуют рационально и соответствующим образом формируют свои ожидания, т.е. оценки будущих значений вероятностных процессов. Правительство, финансируя дефицит государственного бюджета, теоретически всегда имеет *опцион,* т.е. право, но не обязательство, проводить макроэкономическую политику стабилизации государственного долга, стоимость которого зависит от стоимости реальных денег. Такой опцион формально является своеобразным «стабилизационным контрактом», заключаемым между правительством и частными инвесторами. В известном смысле, следовательно, его можно рассматривать по аналогии с опционом как финансовым инструментом, например европейским колл-опционом (*European call option*), хотя, конечно, существование «рынка» подобных инструментов - всего лишь теоретическая абстракция, допустимая в рамках определенного общественного договора. Получаемые на основе такой аналогии результаты, тем не менее, содержательны и имеют весьма интересную макроэкономическую интерпретацию. По опционам и вообще производным финансовым инструментам существует огромная литература, составляющая предмет финансовой экономики и финансовой математики. Отличным введением в математическую теорию опционов являются, например, работы [3,4,5].

В лекции будет показано, что как и любой опцион, «стабилизационный контракт» целесообразно реализовать в оптимальных условиях, оценив, например, предельно допустимые издержки спада, безработицы и неплатежей, которые общество согласно иметь в случае прекращения эмиссии сеньоража и государственных ценных бумаг. Даже если подобные альтернативные издержки постоянны, то текущая величина долга - приведенная ожидаемая стоимость будущего потока купонных выплат - величина переменная, зависящая от размеров сеньоража, который, в свою очередь, подвержен воздействию огромного количества различных факторов случайной природы. В условиях неопределенности затруднительно, как это было сделано в *лекции 5*, найти момент времени, для которого приведенная ожидаемая стоимость долга оптимальна. Тем не менее, при некоторых допущениях относительно стохастического характера сеньоража, вполне возможно вычислить значение купонного дохода, которое максимизирует рыночную, т.е. приведенную ожидаемую стоимость долга и стабилизирует объем долгов правительства.

6.1. Сеньораж как «случайное блуждание»

В переходной экономике на финансовом рынке доминирует правительство, которое постоянно тиражирует свои долговые обязательства для покрытия расходов бюджета, финансируя, иными словами, бюджетный дефицит. Другой государственный орган - центральный банк - регулирует денежную массу либо прямо, либо косвенно, через цену собственного кредита или ставку рефинансирования. В любом случае эмиссия новых денег в экономике, относящейся к классу систем «высокой инфляции», строится под влиянием необходимости финансирования дефицита государственного бюджета δ_t. Финансирование бюджетного дефицита зависит от большого числа факторов самой различной природы и действующих в различных направлениях. Этот процесс, т.е. семейство случайных величин $\{\nabla_t, t \geq 0\}$, параметризованное индексом $t \geq 0$, для которого последовательность значений $\{\delta_t, t \geq 0\}$ является одной из возможных реализаций, является стохастическим (случайным или вероятностным) процессом. Процесс финансирования бюджетного дефицита будет стохастическим, если, к примеру, компонента этого процесса, называемая сеньоражем (см. *лекцию 2*), является стохастическим процессом $\{S_t, t \geq 0\}$.

Дальнейшее изучение интересующих нас макроэкономических процессов будет опираться на представление сеньоража как случайного процесса винеровского типа. К винеровскому процессу при некоторых вполне естественных предположениях сходится процесс случайного блуждания (*random walk*), о котором шла речь в *лекции 1.* Теоретически и практически, следовательно, важно убедиться в том, что имеющиеся представления о природе формирования сеньоража позволяют представить его как процесс случайного блуждания. Это утверждение, на первый взгляд, может показаться противоречащим наблюдениям, однако, это не так. Последнее можно показать посредством весьма естественных рассуждений.

Пусть сеньораж является дискретным стохастическим процессом $\{S_t, t \geq 0\}$, порождаемым эмиссией денег. Начальное значение этого процесса известно достоверно: $S(t = t_0) = s_0$ с вероятностью равной единице, а для построения последующих значений сеньоража проведем такие рассуждения. Как известно, эмиссия сеньоража дает государству целый ряд преимуществ[12)], прежде всего, способ-

---

[12)] Эмиссия сеньоража предоставляет и преимущества и рядовому экономическому агенту, производителю и потребителю, а именно, возможность совершать сделки, не прибегая к бартеру. Это обстоятельство, драматически подтверждаемое феноменом неплатеность расплачиваться по долгам. Совокупность этих преимуществ можно описать при помощи детерминированной функции полезности $U = U[s_t]$ случайного аргумента s_t, которую положим квадратической:

$$U[s_t] = s_t - \frac{a}{2}s_t^2;\ 0 < a < 1. \tag{6.2}$$

Для каждого значения индекса t функция полезности удовлетворяет требованиям непрерывности и дифференцируемости по сеньоражу, а также условию вогнутости на достаточно малом интервале в окрестности начала:

$$U'[s_t] = (1 - as_t) > 0 \qquad \text{и} \qquad U''[s_t] = -a < 0.$$

Рассмотрим два периода $t-1, t$, в течение которых принимается решение об изменении величины сеньоража при условии отсутствия арбитража, *или в условиях межвременного равновесия*. Определим правило сглаживания, состоящее в том, что если в начале периода $t-1$ сеньораж решено уменьшить, например, во избежание инфляционных последствий, то уменьшение полезности, вызванное этим сокращением, должно быть компенсировано увеличением полезности из-за роста эмиссии сеньоража в периоде t. Иными словами, уменьшение полезности из-за сокращения эмиссии сеньоража в периоде $t-1$, составляющее

$$dU[s_{t-1}] = U'[s_{t-1}]ds$$

будет соответствовать, опуская для простоты дисконтирование, увеличению полезности в периоде t:

$$dU[s_t] = U'[s_t]ds.$$

Приращение полезности в периоде t, однако, есть ненаблюдаемая величина, поскольку решение принимается в момент $t-1$, а, значит, фактическая информация о значениях случайного процесса в последующие моменты отсутствует. Следовательно, условие межвременного равновесия предстает как правило сглаживания (*smoothing*):

$$U'[s_{t-1}]ds = \mathrm{E}_{t-1}\{U'[s_t]ds\}, \tag{6.3}$$

где E_{t-1} - оператор рациональных ожиданий, вычисляемых на основе информации, имеющейся на момент времени $t-1$. Как было сказано в *лекции 1*, вычисление рациональных ожиданий эквивалентно вычислению математического ожидания (оператор математического ожидания линейный), что для квадратической функции полезности приводит к условию:

$$1 - as_{t-1} = \mathrm{E}_{t-1}\{1 - as_t\} = 1 - a\mathrm{E}_{t-1}\{s_t\}$$

или

$$s_{t-1} = \mathrm{E}_{t-1}\{s_t\}. \tag{6.4}$$

жей в переходной экономике, подчеркивает справедливость слов *Дж. С. Милля* о том, что деньги - это нечто такое, что дает о себе знать, лишь когда отсутствует.

Последнее означает, что предсказание величины сеньоража в последующий момент времени есть просто его текущее значение, следовательно, процесс удовлетворяет конечно-разностному уравнению случайного блуждания:

(6.5) $$s_t = s_{t-1} + \varepsilon_t ,$$

где ε_t - последовательность независимых и идентично распределенных (*independently and identically distributed, i.i.d.*) случайных величин с $\mathrm{E}\{\varepsilon_t\} = 0$, $Cov\{\varepsilon_s, \varepsilon_t\} = 0$, $s \neq t$; и $Var\{\varepsilon_t\} = 1$. Обычно предполагается, что эти величины распределены по нормальному закону, т.е. $s_t \approx N(0{,}1)$. Для процесса сеньоража легко получить, используя его представление как скользящей средней *(moving average, MA -process)*

$$s_t = s_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_{t-i} ,$$

что при $s_0 = 0$ это - нестационарный случайный процесс со средней $\mathrm{E}\{s_t\} = 0$, ковариацией $Cov\{s_\tau, s_t\} = \min(\tau, t)$ и дисперсией $Var\{s_t\} = \mathrm{E}\{(s_t - \mathrm{E}s_t)^2\} = t$.

Моделирование сеньоража посредством уравнения случайного блуждания означает, что точное предсказание будущих значений денежной эмиссии невозможно, поскольку «новые события» или экономические «новости» - это просто последовательность нормально распределенных и независимых, значит и непредсказуемых, случайных величин. Методологически приведенная выше интерпретация процесса сеньоража вполне аналогична знаменитому результату, полученному в 1978 г. Р. Холлом (*R. Hall*) для потребления. Модель Р. Холла компактно изложена в [2], где четко показывается как гипотезы перманентного дохода, рационального поведения потребителя во времени и аддитивности во времени квадратичной функции полезности позволяют моделировать частное потребление посредством уравнения случайного блуждания.

Известно [6], что процесс случайного блуждания является частным случаем авторегрессивного процесса (*autoregressive AR- process*):

$$x_t = \rho x_{t-1} + u_t,\ |\rho| < 1;$$
$$y_t = y_{t-1} + v_t.$$

Компоненты ошибок для обоих процессов для всех значений t считаются нормальными, одинаково распределенными независимыми величинами с нулевыми средними и единичными дисперсиями, т.е. $u_t, v_t \approx N(0{,}1)$, или чисто случайными процессами. Эти процессы относятся к классу $AR(1)$ процессов, причем второй, представленный уравнением случайного блуждания, - частный случай первого процесса для коэффициента авторегрессии $\rho = 1$. Отличия между ними, однако, носят принципиальный характер: если первый процесс - стационарный, т.е. имеет постоянные математическое ожидание и дисперсию, то случайное блуждание - нестационарный процесс. Монетарные процессы, нестационарные в общем случае, удобно представлять в виде уравнений случайного блуждания, а в непрерывном случае - как винеровские процессы.

6.2. Сеньораж как винеровский процесс

Представление сеньоража как процесса случайного блуждания открывает возможность моделировать монетарные процессы, в частности, денежную эмиссию при помощи *винеровских* процессов. В экономике, особенно в финансах, винеровский процесс - непрерывный аналог дискретного случайного блуждания - широко применяется для описания поведения малого объекта, подвергающегося большому количеству внешних воздействий случайного характера. Он носит также название броуновского движения. Рассмотрим малый интервал времени Δt, на котором определим приращение процесса ΔW_t. Случайная функция W_t называется *винеровским процессом*, если она удовлетворяет двум условиям:

ΔW_t связан с Δt отношением $\Delta W_t = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$, где $\varepsilon_t \approx N(0,1)$ или чисто случайный процесс с нормальным распределением, имеющий нулевое среднее и единичную дисперсию: $\mathrm{E}[\varepsilon_t] = 0; Var[\varepsilon_t] = 1$; значения ΔW_t для соседних малых интервалов взаимно независимы. Иначе, последовательность ε_t - последовательность независимых гауссовских случайных величин.

Рассмотрим значение винеровского процесса W_T для больших интервалов времени. Изменение процесса $W_T - W_0$ может быть представлено как сумма изменений на n коротких временных интервалах Δt, причем $T = n\Delta t$, и

$$W_T - W_0 = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} .$$

Поскольку $\varepsilon_t \approx N(0,1)$, то, полагая $W_0 = 0$, получаем $\mathrm{E}[W_T] = 0$ и $Var[W_T] = n\Delta t = T$. Процесс W_T, следовательно, нестационарный, причем имеющий такие же характеристики, что и процесс случайного блуждания (6.5), который также есть процесс с независимыми нормально распределенными приращениями, и $\mathrm{E}[s_T] = 0$ и $Var[s_T] = T$.

Непрерывный винеровский процесс $W_T = \int_0^T dW_u$ можно представить как процесс, к которому при некоторых предположениях сходится по вероятности процесс простого случайного блуждания. Из сказанного следует, что если, например, динамику сеньоража можно определить как

$$S_{t+h} - S_t = \int_t^{t+h} dW_u ,$$

то при $h \to 0$ сеньораж удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению

(6.6) $$dS_t = dW_t \,.$$

Экономический смысл уравнения (6.6) заключается в том, что малые изменения факторов случайной природы (винеровский процесс), под воздействием которых находится сеньораж, порождают малые изменения эмиссии денег в реальном выражении. Приращения винеровского процесса dW_u непредсказуемы, что делает непредсказуемым и процесс сеньоража даже на бесконечно малых интервалах времени dt. В переходный период динамика сеньоража определяется воздействием огромного количества факторов экономического, социального, политического, исторического и т.д. характера, природа и взаимодействие которых изучены весьма слабо. Следовательно, качество предсказания таких процессов не может быть высоким даже при уточнении гипотезы, лежащей в основе стохастического уравнения (6.3).

Естественно полагать, что начальное значение сеньоража $S(\tau - t)$ в точке t известно, $S(t) = s_t$ и неслучайно, а распределение вероятностей (плотность распределения) его значений в момент $\tau > t$ зависит от его значения в момент t. Государство - эмитент денег и облигаций - а также частные инвесторы - покупатели этих активов - преследуют свои собственные цели, действуя на рынке долгов в условиях неопределенности. *Рациональный характер их поведения* выражается, в частности, в том, что они ожидают изменений объемов сеньоража, который может, например, расти с постоянной скоростью:

(6.7) $$\mathrm{E}_t\{S(\tau - t) \,|\, S(t) = s_t\} = s_t \exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau\} \,,$$

где E_t - оператор рациональных ожиданий, обусловленных всей имеющейся информацией о процессе в момент времени t ; α - параметр ожидаемой скорости изменений объемов сеньоража; а σ - параметр дисперсии.

Условие (6.7) означает, что рациональные ожидания, которые имеют место в любой момент t относительно значений сеньоража в будущем, т.е. для $\tau \geq t$, являются неслучайной функцией, растущей экспоненциально с известным и постоянным темпом α при известных (и потому неслучайных) начальных условиях $S(t) = s_t$. Данное предположение эквивалентно утверждению о том, что *динамика сеньоража - это процесс диффузионного типа*, который описывается стохастическим дифференциальным уравнением :

(6.8) $$dS/S = \alpha dt + \sigma dW \,,$$

где $W = W_t$ - стандартный винеровский процесс, причем $W_0 = 0$; а компонента σdW - диффузия процесса сеньоража[13]. Уравнение (6.8), которое часто называют *геометрическим броуновским движением*, является обобщением уравнения

[13] Значения стандартного винеровского процесса для каждого фиксированного t являются нормальными величинами с нулевым ожиданием и дисперсией t, т.е. $W_t \approx N(0,t)$.

(6.7)[14]. Оно широко применяется в финансовой экономике, в частности для вывода уравнения Блека-Шолза цены опциона (*option pricing*)[15].

6.3. Стохастическая динамика долга и сеньоража

Механизм взаимодействия государства и инвесторов на двухкомпонентном финансовом рынке (деньги и гособлигации), как и в *лекции 5,* описывается модифицированным уравнением арбитража

$$[rb(t) - S_N(t)]\,dt = \mathrm{E}_t\{db(t)\}\,. \tag{6.9}$$

К этому уравнению приводится уравнение (5.13), если принимается принцип арбитража для диффузионного процесса динамики сеньоража. В соответствии с уравнением (6.9) ожидаемое в течение достаточно малого периода времени увеличение стоимости долга $\mathrm{E}_t\{db(t)\}$ равно разности между возрастанием стоимости обслуживания долга по рыночной ставке процента и выплатой купонного дохода, т.е. размерами эмиссии сеньоража.

В *лекции 5* было показано, что решение уравнения (5.13) может быть представлено как дисконтированная стоимость будущего потока сеньоража, что для стохастической динамики сеньоража требует вычисления рациональных ожиданий:

$$b(t,S) = \mathrm{E}_t\{\int_t^{\infty} S_N(\tau)\exp(-r(\tau-t))\,d\tau\}\,, \tag{6.10}$$

где для каждого фиксированного момента времени t рыночная стоимость государственного долга представляется как ожидаемая приведенная стоимость будущего потока сеньоража. Если рациональные ожидания не зависят от текущего момента времени, то $b(S,t) = b(S)$ и

$$b(S) = \mathrm{E}\ \{\int_0^{\infty} S_N(\tau)\exp(-r\tau)\,d\tau\}\,.$$

Ожидаемая приведенная стоимость долга - величина наблюдаемая (неслучайная) для фиксированной точки t , но ее изменение db - ненаблюдаемая, т.е. случайная величина, рациональное ожидание которой обусловлено наличием информации о процессе, имеющейся в данный момент времени.

Допустимые значения сеньоража ограничены экономической природой процесса. С одной стороны, для нулевого значения сеньоража $S = 0$ величина госу-

[14] Решением стохастического дифференциального уравнения (6.8) является функция $S_t = S_0\exp\{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\}$, что проверяется вычислением дифференциала функции $S_t = S(t, W_t)$ на основе леммы Ито.

[15] В отдельные периоды (гиперинфляции) сеньораж может внезапно принимать очень большие значения, претерпевая разрывы непрерывности (становится непрерывным справа). Такие ситуации описываются *пуассоновскими* случайными процессами, которые наряду с *винеровскими* процессами являются основными инструментами моделирования динамики финансовых потоков.

дарственного долга должна быть равной нулю; $b(0)=0$, если сеньораж не выплачивается владельцу долгов в качестве купонного дохода. С другой стороны, значения сеньоража ограничены и сверху, т.е. расположены на отрезке $[0, S^*]$, где S^* - так называемый *рефлективный барьер*: если процесс (6.8) достигает границы допустимых значений и становится равным $S=S^*$, то величина сеньоража мгновенно уменьшается и попадает внутрь отрезка $[0, S^*]$.

Условие арбитража, хотя и справедливо всюду на отрезке $[0, S^*]$, но имеет разную форму. Для значений сеньоража $0<S<S^*$ условие арбитража имеет форму уравнения (6.9), иными словами, общий доход равен сумме купонного дохода и роста стоимости долга, и $r=\delta+\alpha, \alpha>0$. Государство, увеличивая номинальное предложение денег, не склонно ограничивать сверху свои возможности для маневра, т.е. регулирования размеров долга. Оно, однако, заинтересовано в максимизации результата, т.е. привлечении максимального объема заемных средств на свободном рынке. В точке оптимального значения долга сеньораж перестает расти, $S=S^*$, значит прекращается рост капитальной стоимости активов, $\alpha=0, r=\delta$. Иными словами, точка оптимума - это стационарная точка для дифференциального уравнения (6.9), где имеет место

$$S=rb(S),$$

где, напомним, значение сеньоража известно, а $b(S)$ - рыночная, т.е. ожидаемая, приведенная стоимость долга.

Априори частные инвесторы, получая за счет сеньоража купонный доход, согласны с увеличением его размеров: более высоким размерам сеньоража соответствуют и более значительные размеры долга, или ожидаемой приведенной стоимости потока будущего сеньоража. Но лишь до определенного предела, поскольку известно, что неограниченное увеличение предложения денег порождает скачок инфляции, ожидания которой уменьшают спрос на реальные денежные балансы и реальные активы государственных облигаций. Частные инвесторы, рационально действующие на финансовом рынке, должны предвидеть инфляционные последствия эмиссии долга, что выражается для них в существовании рефлективного барьера - значении сеньоража, при котором приобретение долгов становится нерациональным из-за падения их реальной стоимости.

Уравнение (6.9) имеет постоянную безрисковую норму реального процента, или доходности государственного долга $r>0$, тогда как для рефлективного барьера выполняется условие $b'(S^*)=0$. В данной модели это противоречие разрешается следующим образом: для значений сеньоража, принадлежащих внутренней части отрезка $[0, S^*]$, реальная ставка процента не меняется, а когда объем сеньоража достигает границы, то ожидания инфляции скачкообразно увеличиваются, снижая почти до нуля спрос частных инвесторов на реальный долг. Это, в свою очередь, как бы увеличивает до бесконечности ставку процента $\lim_{S\to S^*}\frac{1}{r}=0$, а значит, для рефлективного барьера производная долга по сеньоражу становится равной нулю

$$\frac{db}{dS}\Big|_{S=S^*} \equiv b'(\hat{S}) = 0\,.$$

Спрос на реальный долг восстанавливается при меньших значениях предложения денег, следовательно, процесс продолжается при меньших значениях сеньоража, которые можно считать «приемлемыми», т.е. не порождающими скачок инфляции. Значение рефлективного барьера можно считать границей, разделяющей различные инфляционные режимы.

6.4. Уравнение арбитража для стохастической динамики долга

Рассмотрим соотношение (накопленного) долга и сеньоража внутри отрезка $[0, S^*]$, полагая долг $b = b(S)$ функцией случайного аргумента S. Величина полагается зависящей только от размеров эмиссии сеньоража, т.е. $b(S,t) = b(S)$, и рациональные ожидания будущего потока сеньоража не зависят от момента времени. Кроме того, поскольку нас интересует лишь проблема стабилизации, а не выплаты долга, то последний может существовать как бы вечно (*perpetuity*), причем на неизменном уровне в стационарном состоянии.

На бесконечно малом интервале времени $(t, t+dt)$ из соображений арбитража следует, что рыночная (текущая приведенная) стоимость долга в точке t равна купонным платежам и ожидаемым изменениям рыночной стоимости долга за период dt:

$$b(S) = Sdt + \mathrm{E}_t\{b(S+dS)\exp(-rdt)\}\,, \tag{6.11}$$

где в качестве нормы дисконта $r > 0$ используется (безрисковая) доходность государственных облигаций, которая постоянна на интересующем нас интервале времени.

Ожидаемые изменения приведенной стоимости долга вычисляем, применяя лемму Ито к функции $b(S)$. Для этого раскладываем в ряд Тейлора, ограничиваясь членами порядка dt, выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части (6.11), используем уравнение роста стоимости сеньоража[16] (6.8) и применяем оператор ожиданий:

$$\mathrm{E}_t\{b(S+dS)e^{-rdt}\} = \mathrm{E}_t\{[b(S) + b'(S)dS + \frac{1}{2}b''(S)(dS)^2][1 - rdt]\} =$$
$$= b(S) + \alpha S b'(S)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 b''(S)dt - rb(S)dt.$$

[16] Напоминаем, что для гипотезы сеньоража как геометрического броуновского процесса имеет место в среднем квадратическом смысле равенство $(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt$.

Подставляя это выражение в (6.11) и упрощая, получаем дифференциальное уравнение[17]), относительно долга как функции сеньоража:

(6.12) $$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 b''(S) + (r-\delta)Sb'(S) - rb(S) + S = 0.$$

Уравнение (6.12) - неоднородное обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции $b(S)$. Уравнение (6.12) будем называть *фундаментальным уравнением государственного долга* для стохастического процесса сеньоража[18]), где долг рассматривается как функция сеньоража $b(S,t) = b(S)$. Для винеровских процессов долга и заимствований оно, как показано в [8,9], является модифицированным уравнением финансирования бюджетного дефицита.

В нахождении решения уравнения (6.12) и экономической интерпретации его компонент будем следовать монографии *А.Диксита и Р.Пиндайка* [7]. Общее решение однородного уравнения, соответствующего (6.12) - это функция

(6.13) $$b(S) = A_1 S^{\beta_1} + A_2 S^{\beta_2},$$

где $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 1$ - корни характеристического уравнения[19])

(6.14) $$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + (r-\delta)\beta - r = 0.$$

Напомним, что по экономическому смыслу рыночная стоимость долга равна нулю, если купонный доход не выплачивается, т.е. начало - точка абсорбции. Но первая компонента общего решения (6.13), имея отрицательный показатель степени, стремится к бесконечности при $S \to 0$, а поэтому константу A_1 необходимо положить равной нулю. Таким образом, решение однородной части уравнения (6.13) принимает следующий вид:

(6.15) $$b(S) = A\,S^{\beta},$$

где $\beta \equiv \beta_2 > 1$ и $A \equiv A_2$. По сути дела, эта величина соответствует спекулятивной составляющей или «финансовому пузырю» для стохастического процесса сеньоража. Простой подстановкой проверяется, что частное решение неоднородного уравнения, соответствующего (6.12) - это функция

---

[17]) Аналогичный результат может быть получен для функции государственного долга $b(S)$ на интервале времени dt, если использовать непосредственно уравнение финансирования долга (6.9), т.е. $\mathrm{E}_t\{db(S)\} = [rb(S) - S]dt$.

[18]) Когда государственный долг зависит от двух аргументов: случайного процесса сеньоража (6.8) и времени выплаты долга (*time to maturity*), т.е. $b = b(S,t)$, то уравнение (6.12) становится уравнением в частных производных.

[19]) Локализация характеристических корней очевидна, если левую часть уравнения (6.14) рассматривать как функцию $Q = Q(\beta)$, значения которой вычислить для $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$.

(6.16) $$b(S)=\frac{1}{\delta}s,$$

где s - постоянное (ожидаемое) значение будущего потока сеньоража. Экономический смысл решения (6.16) состоит в том, что при отсутствии ограничений на размеры сеньоража текущая приведенная стоимость долга - это стоимость ожидаемых будущих потоков денежной эмиссии, капитализированная из расчета нормы купонной доходности[20] $\delta>0$. Эта компонента решения для данной модели отражает *фундаментальную стоимость* общего объема государственного долга, в том смысле, что не содержит спекулятивных составляющих.

В целом интересующее нас решение уравнения (6.12) записывается как

(6.17) $$b(S)=AS^{\beta}+\frac{1}{\delta}s$$

и является коррекцией *фундаментальной стоимости объема государственных облигаций* в силу ненулевой вероятности изменения стоимости сеньоража. Если государство перепродает свои долги, то фундаментальная стоимость долга будет скорректирована на величину AS^{β}, причем константа $A>0$ отражает ненулевую вероятность роста стоимости сеньоража.

6.5. Уравнение для стоимости новых заимствований

В нормальных условиях рыночной экономики государство не перепродает свои долги, и спекулятивная составляющая в решении (6.17) равна нулю. Уравнение государственного долга тогда принимает простой вид фундаментальной стоимости долга (6.16), которая формирует граничные значения для стоимости новых заимствований $f=f(S)$, которые государство может производить на финансовом рынке. По экономическому смыслу долги и новые заимствования связаны неравенствами:

(6.18) $$b(S)\geq f(S)\geq b(S)-F.$$

Неравенства (6.18) утверждают, что объем новых заимствований не может превышать накопленный долг (игры Понци исключаются), а их стоимость не может быть ниже разности между рыночной и номинальной стоимостью долга. На концах отрезка значений сеньоража имеют место равенства:

$$b(0)=f(0)=0 \quad \text{для} \quad S=0; \quad \text{и} \quad f(S^*)=b(S^*)-F \quad \text{для} \quad S=S^*.$$

Смысл данных равенств очевиден: если нет эмиссии сеньоража, $S=0$, иными словами, купонный доход не выплачивается, то рыночная стоимость долга и новых заимствований равны нулю. С другой стороны, существует такое значение сеньоража $S=S^*$, при котором стоимость новых заимствований в точности равна разности между рыночной и номинальной стоимостью долга.

[20] Нетрудно заметить, что при отсутствии неопределенности и роста сеньоража $\sigma=\alpha=0$ (6.17) совпадает со стационарной точкой $S=rb(S)$.

Сказанное имплицирует важное утверждение: для всех значений сеньоража $0 < S < S^*$ стоимость новых заимствований выше разности между рыночной и номинальной стоимостью долга. Очевидно, что эта разность - просто издержки заимствования, т.е. суммы, взятые в долг по текущей ставке процента, и которые придется возвращать. В условиях стохастики, однако, вероятность роста сеньоража в будущем выше нуля, что удорожает потенциальные заимствования, которые придется делать по более высокой ставке процента. Следовательно, стоимость «возможности занимать сейчас», т.е. по фиксированной ставке процента $r > 0$, в условиях неопределенности более высока, чем простой возврат сумм, взятых взаймы:

(6.19) $$f(S) > b(S) - F \quad \text{для всех } 0 < S < S^*.$$

Это утверждение кажется парадоксальным и справедливо лишь для стохастической гипотезы сеньоража, когда стоимость «возможности занимать сейчас» из-за неопределенности будущего *не* совпадает со стоимостью новых заимствований. Иными словами, стоимость занимать сейчас, по фиксированной ставке процента $f(S)$, *является опционом новых заимствований* государства на свободном рынке[21].

В нашей модели эмитентом долгов является правительство, которое выплачивает купонный доход частным владельцам своих долгов. Право производить новые заимствования для правительства представляется как «покупка» им колл-опциона $f(S)$, «выписанного» по сеньоражу или «проданного» ему частными инвесторами с ценой реализации $b(\hat{S})$. При объемах сеньоража $S < \hat{S}$ опцион реализовать не имеет смысла, и его стоимость равна нулю. Для значений сеньоража, превышающих цену реализации, опцион имеет стоимость, но априори точка оптимума сеньоража, доставляющая максимум рыночной стоимости долга, не определена. Поэтому необходимо вычислить такое значение сеньоража S^*, для которого рыночная стоимость долга $b(S^*)$ достигает максимального значения. В этой точке правительство реализует опцион $f(S^*)$, т.е. возвращает номинальную стоимость долга F, отказываясь от своего права производить новые заимствования. По сути своей, колл-опцион или *«стабилизационный контракт»* реализуется государством, т.е. возвращается частным инвесторам, когда государство прекращает эмиссию долгов, а значит, и эмиссию купонных выплат по долгам, т.е. эмиссию денег. Это может иметь место при смене поощрительной макроэкономической политики на ограничительную, когда реальной альтернативой эмиссии долга и денег становится спад производства, рост безработицы и неплатежей. Соответственно частные инвесторы, следовательно, «обязаны» выкупить опцион по рыночной стоимости, получив взамен номинальную стоимость долга, т.е. вернув (с процентами) свои средства, отданные некогда правительству в долг.

Вычислим величину стоимости опциона $f(S)$ из соображений арбитража. Поскольку опцион - финансовый актив, производный от стоимости сеньоража (*derivative security*), то к нему применяются такие же требования, что и к стоимости

---

[21] В *лекции* 5 было показано, что в детерминированной модели стоимость новых заимствований всегда равна разности между рыночной и номинальной стоимостями долга.

основного актива. Как известно, разница между основным и производным активами состоит в том, что владение опционом не приносит дохода, а лишь увеличивает ожидаемую приведенную стоимость опциона. В отличие от долга $b(S)$, который приносит купонный доход владельцу облигации, требуя от эмитента расходов по своему обслуживанию, опцион новых заимствований $f(S)$ в течение периода dt не приносит дохода своему владельцу (правительству), ни выплат эмитенту (типичному частному инвестору). Наконец, поскольку правительство полагается безупречным должником, новые заимствования оно может производить по той же самой рыночной ставке процента, следовательно, стоимость опциона дисконтируется по безрисковой ставке процента $r > 0$, что и стоимость государственной облигации.

Принимая во внимание все сказанное выше, для стоимости опциона новых заимствований государства может быть использована следующая модель[22]:

$$f(S) = \max\{\mathrm{E}_t[f(S + dS)\exp(-rdt)], b(S^*) - F\}. \tag{6.20}$$

Уравнение (6.20) является аналогом уравнения стоимости колл-опциона новых заимствований государства для условий (6.18). Для уровней сеньоража $0 < S < S^*$ получаем следующее уравнение для опциона стоимости новых заимствований:

$$f(S) = \mathrm{E}_t\{f(S + dS)\exp(-rdt)\}. \tag{6.20$'$}$$

Производя с уравнением (6.20′) те же формальные действия, что и с уравнением (6.11), т.е. раскладывая его правую часть в ряд Тейлора с членами разложения порядка dt и применяя лемму Ито, получаем *фундаментальное уравнение для опциона новых заимствований правительства* на рынке долгов для стохастического процесса сеньоража:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + (r - \delta)S f'(S) - rf(S) = 0. \tag{6.21}$$

В предположениях, сделанных выше, обыкновенное дифференциальное уравнение (6.21) представляет собой специальный случай знаменитого уравнения в частных производных Блека-Шолза (*Black-Sholes fundamental equation*) для цены опциона. Уравнение (6.21) справедливо для модели долговых заимствований правительства, если государство *всегда* имеет возможность прибегать к новым долгам, т.е. опцион не зависит явно от времени: $f(S,t) = f(S)$ и как бы существует вечно. Граничные условия для фундаментального уравнения (6.20) и государственного долга как функции сеньоража $b = b(S)$ определены неравенством (6.18) и будут исследованы в следующем разделе.

Стоимость опциона новых заимствований представляется общим решением уравнения (6.21):

---

[22] В работе *А. Диксита* и *Р. Пиндайка* [7] показано, что уравнение, аналогичное (6.19), является уравнением Беллмана для задачи оптимальной остановки (*optimal stopping problem*).

$$f(S) = B_1 S^{\beta_1} + B_2 S^{\beta_2}$$

которое приводится к виду:

$$f(S) = BS^{\beta}, \tag{6.22}$$

где $\beta \equiv \beta_2 > 1$ - характеристический корень уравнения (6.15) и $B \equiv B_2$. Решение (6.22) получено на основе ранних соображений абсорбции $b(0) = f(0) = 0$, вследствие чего константа B_1, соответствующая характеристическому корню $\beta_1 < 0$, полагается равной нулю.

6.6. Оптимальная политика на рынке долгов

Оптимальное поведение правительства, стремящегося получить максимальный результат от политики заимствований на свободном рынке, может строиться исходя из следующих соображений. Государство - монопольный эмитент своих долгов и ограничений на эмиссию сеньоража у него априори нет. Вместе с тем, как было сказано выше, перепродажей своих долгов правительство не занимается и, следовательно, рыночная стоимость долга с позиции государства совпадает с фундаментальной стоимостью долга (6.16). Последняя, напомним, может быть получена для роста сеньоража с постоянным темпом $0 < \alpha < r$ просто вычислением ожидания:

$$b(S) = \mathrm{E}\int_0^{\infty} S(\tau)\exp[-r\tau]d\tau = s\int_0^{\infty}\exp[-(r-\alpha)\tau]d\tau = \frac{1}{\delta}s\,.$$

Предположим, что известна номинальная величина долга F. Политика правительства в отношении долга тогда заключается в следующем: при каждом значении сеньоража рыночная стоимость долга сравнивается с совокупными издержками, включающими выплату номинала F и «покупку» опциона новых заимствований. До тех пор, пока рыночная (ожидаемая дисконтированная) стоимость долга меньше издержек на его обслуживание, т.е. имеет место неравенство :

$$b\ (S) < f\ (S) + F\ ,$$

политика наращивания долга (эмиссии сеньоража) оправдана, так как совокупные издержки выше результата, т.е. рыночной стоимости долга.

Рациональность такой политики состоит в том, что правительство при каждом объеме эмиссии сеньоража получает рыночную стоимость долга в размерах, превышающих стоимость возвращаемого номинала. Значит, правительство «платит» F за стоимость $b(S)$, получая чистый выигрыш $[b(S) - F]$: если, к примеру, облигации правительства выкупаются (*call provisions*), то эмиссия нового транша может иметь более низкую купонную доходность.

В точке оптимума, где эти величины становятся равными, правительство реализует опцион. Оно получает рыночную стоимость государственного долга $b(S^*)$, за которую платит по номиналу F, причем издержки на «покупку» последнего увеличиваются на величину опциона $f(S^*)$, от которого правительство «отказывается», начиная проводить политику стабилизации долга. Таким образом, в точке оптимума (*optimal or theoretical exercise point*) опцион новых заимствований оптимально реализуется, иными словами, правительство отказывается от новых долговых заимствований[23]. Следовательно, в точке оптимума $S = S^*$ выполняются условия равенства издержек и результатов (*value matching conditions*):

$$b\ (S^*) = f\ (S^*) + F . \tag{6.23}$$

Кроме того, в точке оптимума выполняются условия гладкости (*smooth pasting conditions*):

$$b'(S^*) = f'(S^*) . \tag{6.24}$$

Условия равенства результатов и издержек (6.23) и условия гладкости (6.24) являются граничными условиями для фундаментального уравнения стоимости новых долгов правительства (6.20). При подстановке в них значений стоимостей долга (6.22) и опциона правительства (6.21) они дают следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta}S^* = B\ S^{*\beta} + F \\ &\frac{1}{\delta} = \beta B\ S^{*\beta-1} \end{aligned} . \tag{6.25}$$

Решением этой системы являются значения константы опциона правительства B и точки его оптимальной реализации S^*:

$$S^* = \frac{\beta}{\beta-1}\delta F \quad \text{и} \quad B = \frac{1}{\beta\delta} S^{*(1-\beta)} . \tag{6.26}$$

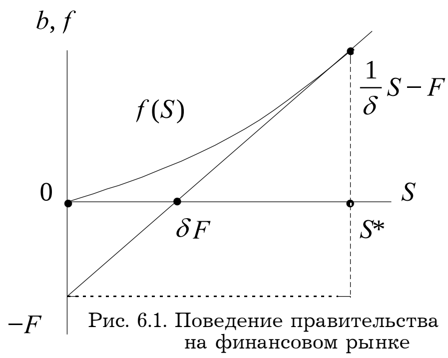

Рис. 6.1. Поведение правительства на финансовом рынке

Политика правительства на рынках денег и долгов графически представлена на рис. 6.1. Из этого рисунка понятно, что значение опциона $f(S)$ всюду больше, чем $[b\ (S) - F]$, кроме точки оптимума S^*, где эти величины становятся равными друг другу и происходит стабилизация долга. Значение константы B положительно, что отражает рост стоимости опциона новых заимствований из-за ненулевой вероятности увеличения эмиссии сеньоража.

---

[23] Возвращаясь к высказыванию *Полония*, процитированному в эпиграфе, можно утверждать, что оно справедливо для точки оптимума $S = S^*$, где долг стационарен и правительство не берет взаймы.

Обратим внимание на то, что константа B положительна, следовательно, стоимость опциона правительства - степенная возрастающая функция, имеющая в силу условий гладкости (6.24) в точке оптимума общую касательную с функцией рыночной (приведенной ожидаемой) стоимости государственного долга. В точке оптимума S^* опциона получена взаимосвязь между предельно допустимыми издержками от стабилизации долга и размерами сеньоража, при которых оптимально реализовать опцион $f\,(S^*)$. Величина параметра $q^* = \dfrac{\beta}{\beta-1} > 1$ - пропорция между ценой сделки и оптимальной ценой реализации опциона (*the ratio of the theoretical exercise price to the strike price of an option*) характеризует отношение, по сути дела, аналогичное коэффициенту q Дж. Тобина [7].

6.7. Монетарная политика как управление безрисковым портфелем активов правительства

Уравнение (6.21) для опциона стабилизации долга можно получить, используя технику хеджирования портфеля активов *(contingent claims analysis)*, находящихся в распоряжении либо правительства, либо частного инвестора. При таком подходе экономические мотивы поведения правительства и частных инвесторов видны более отчетливо. Анализ фундаментального уравнения для новых заимствований правительства позволяет установить его важное свойство, состоящее в том, что оно моделирует монетарную политику как *управление безрисковым портфелем активов* правительства - новых долгов и сеньоража.

Рассмотрим поведение, т.е. политику, правительства на рынках долгов и денег, представленную уравнением (6.1). Можно полагать, что денежная политика правительства (в данном случае мы не различаем собственно правительство и центральный банк) состоит в эмиссии сеньоража - реальной стоимости новых денежных балансов. Но, так как эмиссия сеньоража чревата риском инфляции, т.е. снижения реальной стоимости денег, то она «страхуется» посредством заимствований правительства на свободном рынке. Подобное поведение правительства можно представить как «покупку» им права, но не обязанности, производить заимствования на свободном рынке. В этом случае заимствования правительства на рынке долгов можно рассматривать как длинный колл-опцион $+f(S)$, который используется правительством для страхования своей короткой позиции по «продаже» денег $-S$.

Политика правительства по эмиссии долгов и сеньоража имеет рыночную стоимость, которая, однако, определяется не прямыми издержками на ее проведение - они пренебрежимо малы, а альтернативными издержками, которые общество несло бы в отсутствие эмиссии из-за спада производства и безработицы. Следовательно, монетарная политика может быть представлена как стоимость портфеля активов - долгов и сеньоража, взвешенных или соизмеренных друг с другом посредством некоторого коэффициента h:

$$\Phi = f(S) - hS, \qquad (6.27)$$

где h - коэффициент хеджирования[24)], равный $h = f'(S)$.

Если динамика сеньоража случайна и подчинена уравнению (6.8), то стоимость этого портфеля за бесконечно малый период времени dt изменится на величину

$$d\hat{\Phi} = df - hdS = f'(S)dS + \frac{1}{2}f''(S)(dS)^2 - f'(S)dS = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S)dt\,,$$

которая рассчитывается в соответствии с леммой Ито.

Доходы правительства от обладания данным портфелем, однако, меньше, так как оно должно поощрять частных инвесторов за покупку ими своих долгов. Дело в том, что хотя сама по себе эмиссия денег (как бы их «продажа» правительством или центробанком) дополнительных затрат не требует[25)], но в нашей модели сеньораж - это источник купонных выплат правительства частным инвесторам в размере $-\delta f'(S)S$. Короткая позиция правительства по сеньоражу должна соответствовать длинной позиции инвесторов по долгам - последние должны быть заинтересованы в приобретении новых долгов правительства, которые оно делает за период dt. Поэтому с учетом купонных выплат изменение стоимости портфеля, соответствующее как бы «доходу» правительства, будет равно за бесконечно малый период времени величине

$$d\Phi = [\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) - \delta S f'(S)]dt\,.$$

С другой стороны, издержки правительства, связанные с «обладанием» данным портфелем, или его обслуживание по безрисковой ставке доходности $r > 0$ за тот же бесконечно малый период составляют величину

$$r\Phi dt = r[f(S) - f'(S)S]dt\,.$$

В условиях рыночного равновесия, или отсутствия арбитражной прибыли, обслуживание портфеля должно стоить ровно столько, сколько приносимый им доход в течение периода времени dt, т.е. должно иметь место равенство

$$r\Phi dt = d\Phi\,. \tag{6.28}$$

Подставляя в это равенство найденные ранее соотношения, получаем уравнение

$$r[f(S) - f'(S)S]dt = [\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) - \delta S f'(S)]dt\,,$$

или

[24)] В финансовой математике коэффициент $h \equiv df/dS$ носит название дельты хеджирования. Нетрудно заметить, что уравнение (6.27) соответствует уравнению (6.1) для $\theta_2 = 1$ и $\theta_1 = -h$.

[25)] Операционные затраты на печатание новых денег, как правило, пренебрежимо малы по сравнению со стоимостью номинала.

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + (r-\delta)Sf'(S) - rf(S) = 0 , \qquad (6.29)$$

которое вполне аналогично фундаментальному уравнению (6.21), рассмотренному ранее[26].

Абсолютно аналогичные рассуждения (с зеркальными заменами короткой позиции на длинную) можно применить к анализу поведения *типичного частного инвестора*, который «продает» правительству право делать (или не делать) долги и «покупает» сеньораж, т.е. обладает портфелем:

$$\mathrm{H} = hS - f(S) . \qquad (6.30)$$

Доходы частного инвестора за бесконечно короткий период превышают рост стоимости портфеля на величину «премии» $\delta hSdt$ за приобретение ими новых долгов правительства и составляют:

$$d\mathrm{H} = hdS - df + \delta hSdt .$$

С другой стороны, издержки частного инвестора по обслуживанию портфеля равны размерам альтернативных вложений в другие активы:

$$r\mathrm{H}dt = r[hS - f(S)]dt .$$

Вновь вычисление изменения стоимости портфеля частного инвестора, аналогичное проделанному выше, и подстановка результата в уравнение отсутствия в течение периода dt арбитражной прибыли:

$$rHdt = dH$$

немедленно приводят к фундаментальному уравнению (6.29).

6.8. Монетарная политика как хеджирование портфеля активов правительства

Превращение портфелей активов (6.27) или (6.30) в безрисковые при условии отсутствия арбитражной прибыли - центральный момент в построении фундаментального уравнения для стоимости опциона новых заимствований. Эта процедура представляет *хеджирование (hedging)*, или особый способ страхования портфелей, который основан на том, что сеньораж и опцион стоимости новых заимствований имеют общий фактор случайности, управляющий динамикой долга и сеньоража. Этот фактор, представленный базовым винеровским процессом dW_t, можно исключить, соответствующим образом скомбинировав активы S и $f(S)$. Объяснение смысла процедуры хеджирования для страхования портфеля финансовых активов от риска содержится, например, в [3, 4, 5].

С макроэкономической точки зрения процедура хеджирования интересна в том отношении, что при условии общности фактора случайности для денежной

[26] Строго говоря, в уравнении (6.29) безрисковая ставка процента должна быть заменена на норму доходности долга с учетом рыночной цены полностью диверсифицированного риска.

эмиссии и долговых заимствований финансовая политика правительства, несмотря на стохастическую природу монетарных процессов, приобретает полностью предсказуемый характер. В контексте нашей модели процедуру хеджирования можно трактовать как выбор параметров монетарной политики, приводящий к исключению фактора случайности. Это, разумеется, лишь один из возможных аспектов анализа макроэкономической политики на рынках денег и долгов.

Рассмотрим снова уравнение монетарной политики (6.1), которое для удобства воспроизведем здесь:

$$\Phi = \theta_1 S + \theta_2 f(S).$$

Как было выяснено выше, структура данного портфеля определяется коэффициентами θ_1 и θ_2, которые формируют политику правительства на рынках денег и долгов, и находятся в распоряжении правительства. Обращаем теперь внимание на то, что динамика сеньоража удовлетворяет уравнению (6.8):

$$dS = \alpha S dt + \sigma S dW,$$

и находится под действием фактора случайности - стандартного винеровского процесса dW, который влияет и на динамику новых заимствований $f(S)$.

На протяжении бесконечно короткого периода времени dt структура портфеля не меняется, а его стоимость меняется как

(6.31) $$d\Phi = \theta_1 dS + \theta_2 df(S).$$

К изменению стоимости опциона стоимости новых заимствований $df(S)$ применяем лемму Ито:

$$d\Phi = \theta_1 dS + \theta_2 f'(S) dS + \theta_2 \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f''(S) dt.$$

Структура портфеля, или параметры монетарной политики, находятся в распоряжении правительства. Оно может их выбрать для периода dt как $\theta_1 = -h = -f'(S)$ и $\theta_2 = 1$, что немедленно дает:

(6.32) $$d\Phi = -f'(S)dS + f'(S)dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S)dt = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S)dt.$$

В результате случайный фактор dW устраняется как из динамики сеньоража, так и новых заимствований, и *политика правительства становится полностью предсказуемой*.

Теперь можно повторить, что издержки от проведения данной политики, или альтернативная доходность портфеля активов (6.8), на бесконечно малом интервале времени исчисляются как алгебраическая сумма изменения стоимости безрискового портфеля $r[f(S) - f'(S)S]dt$ и премии частным инвесторам за покупку ими новых правительственных долгов $-\delta f'(S) S dt$. Используя вновь условие отсутствия арбитражной прибыли:

$$r[f(S) - f'(S)S]dt \ -\delta f'(S)Sdt = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S)dt \ ,$$

после исключения общего временного периода dt и подстановки $r = \alpha + \delta$, вновь приходим к фундаментальному уравнению (6.29).

6.9. Согласование интересов правительства и частных инвесторов

Интерпретация монетарной политики правительства как портфеля активов (6.27), состоящего из длинного колл-опциона по сеньоражу и короткой позиции - «продажи» сеньоража, позволяет проанализировать процесс согласования интересов правительства и частных инвесторов на рынке долгов. На рис. 6.2 возможные ситуации представлены графически.

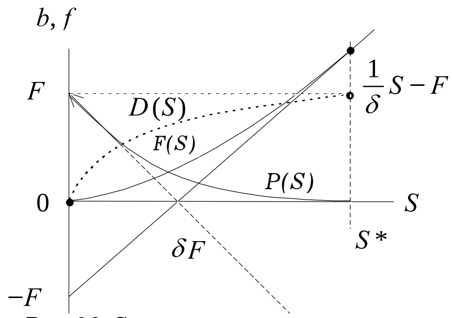

Рис. 6.2. Согласование интересов правительства и инвесторов

Новые долги правительства представлены в рассмотренной выше модели как колл-опцион $f(S)$ с ценой исполнения $b(\hat{S})$, который правительство «покупает» у частных инвесторов и оптимально реализует в точке S^*, переставая тем самым обращаться к займам на свободном рынке. В свою очередь, правительство «продает» частным инвесторам пут-опцион (*put option*) $P(S)$ с той же самой ценой реализации $b(\hat{S})$. Этот опцион иногда называют *опционом дефолта* (*put-to-default*), поскольку приобретая его, частные инвесторы получают гарантии правительства от снижения стоимости долга F и от риска дефолта правительства по своим долгам. Это значит, что если размеры сеньоража будут $S < \hat{S} = \delta F$, то правительство возмещает убытки частных инвесторов от снижения ожидаемой стоимости долга в размере $P(S,F) = \max\{F - b(S), 0\}$. На самом деле, правительство делает даже большее - оно гарантирует возмещение потерь инвесторов для всех значений сеньоража меньших оптимальных:

$$P(S,F) = \max\{\mathrm{E}_t[P(S+dS)\exp(-rt)], f(S^*) + F - b(S^*)\}.$$

Значение этой политики преуменьшать не следует: значение опциона дефолта, как будет показано, всюду больше нуля для $S < S^*$, а вопрос о его оптимальной реализации - предмет решений его владельцев - частных инвесторов, которые принимают его добровольно.

В соответствии с *теоремой об эквивалентности* пут-колл опционов[27] [3,4,5] в точке оптимума S^* имеет место равенство:

---

[27] В нашей модели границы стоимости опциона стоимости новых заимствований определены, в соответствии с (6.18), величинами стоимости государственного долга, и поэтому в уравнении эквивалентности (6.33) производится замена: $S \to b(S)$. Обоснование того, что государственный долг в нашей модели ведет себя подобно акциям в теории корпоративных финансов, следует искать, прежде всего в том, что государственный долг - это ча-

(6.33) $$b(S^*) + P(S^*) = f(S^*) + F \,,$$

где $P(S^*)$ - пут-опцион, проданный правительством частным инвесторам. Но поскольку $S^* > \hat{S}$, то в точке оптимума пут-опцион «вне денег» (*out of the money*) и частные инвесторы не реализуют его, т.е. $P(S^*) = 0$. Таким образом, эквивалентность пут-колл опционов в точке оптимума предстает в виде уже знакомого нам граничного условия (6.23).

Для любого значения сеньоража меньше оптимального, однако, опцион дефолта - не нуль, и может быть определен как

(6.34) $$P(S,F) = f(S) + F - b(S) \,,$$

поскольку, напомним, что для $S < S^*$ имеет место неравенство $f(S) > b(S) - F$. Понятно, что равенство (6.34) имеет смысл для ненулевых значений пут опциона гарантий правительства.

Для данной модели величина опциона гарантий правительства[28)] принимает следующий вид:

(6.35) $$P(S,F) = BS^{\beta} + F - \frac{1}{\delta}s \,.$$

Уравнение (6.35) говорит о существенности для частных инвесторов гарантий правительства от дефолта по своим долгам, поскольку они компенсируют их от потерь, связанных с рискованностью вложений в долги правительства. Дело в том, что, как следует из равенства (6.34), частные инвесторы из-за ненулевого риска корректируют фундаментальную стоимость правительственного долга на величину стоимости опциона заимствований: $[b(S) - f(S)]$. Иными словами, для них стоимость правительственного долга как *рискованного долга* $D(S)$ равна

(6.36) $$D(S) = F - P(S) \,.$$

Стоимость правительственного долга $D(S)$ с точки зрения типичного частного инвестора при $S = 0$ является нулевой, и он получает в этом случае полную компенсацию от правительства через стоимость пут-опциона: $P(0) = F$. С другой стороны, в точке оптимума, где $P(S^*) = 0$, частный инвестор возвращает себе номинал: $D(S^*) = F$.

Для всех значений сеньоража $0 < S < S^*$ стоимость правительственного долга корректируется типичным частным инвестором в меньшую сторону по сравнению с его фундаментальной стоимостью из-за ненулевой вероятности дефолта и равна

стное богатство, что формально отражается в уравнении финансирования бюджетного дефицита (6.9) и формуле ожиданий (6.10).

[28)] Если стоимость долга явно зависит от времени его выплаты, то его величина должна быть дисконтирована и заменена на $F \exp[-rt]$.

$$D(S) = \frac{1}{\delta}s - BS^{\beta}. \tag{6.37}$$

Формулы (6.16) и (6.37) характеризуют величины стоимости долга для правительства и частных инвесторов, которые, в силу сильной асимметрии финансового рынка в переходной экономике, различны. Однако, хотя правительство и частные инвесторы действуют независимо друг от друга, исходя из различных соображений, их поведение приводит к одинаковым результатам. *Государство стабилизирует свой долг в той самой точке, в которой частные инвесторы решают перестать покупать новые облигации.*

Согласование интересов правительства и частных инвесторов на рынке долгов может быть представлено следующим образом. В точке оптимума правительство получает рыночную стоимость долга $b(S^*)$, возвращая частным инвесторам одолженный номинал F и стоимость опциона новых заимствований $f(S^*)$. Частные инвесторы, в свою очередь, не реализуют гарантии правительства $P(S^*, F) = 0$, так как возвращают себе ранее одолженные суммы F. Кроме того, они перестают давать правительству взаймы в обмен на стоимость опциона $f(S^*)$ - отказа правительства от новых заимствований и перехода к новому политическому курсу - стабилизации долга. Понятно, что потенциальные издержки от новой правительственной политики - неинфляционного финансирования бюджетного дефицита, что влечет за собой спад производства, безработицу и неплатежи - будут разделяться всем обществом.

* *
*

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Turnovsky, S. (1995). Methods of Macroeconomic Dynamics. The MIT Press.*
2. *Romer, D. (1996). Advanced Macroeconomics. The McGraw Hill Companies,Inc.*
3. *Neftci, S. (1996). An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives. Academic Press, New York.*
4. *Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J. (1997). The Mathematics of Financial Derivatives. Cambridge University Press, Cambridge.*
5. *Wilmott, P. (1998). Derivatives. John Wiley and Sons, New York.*
6. *Maddala, G., In-Moo, K. (1998). Unit Roots, Cointegration, and Structural Change. Cambridge University Press, Cambridge.*
7. *Dixit, A. and Pindyck, R. (1994). Investment under Uncertainty. Princeton University Press.*
8. *Smirnov, A. D. Optimal Budget and Seigniorage Targeting Policy in a Transition Economy //Экономический журнал ВШЭ,* **2**, *№ 4, 1998.*
9. *Смирнов, А.Д. Оптимальная стабилизация государственного долга // Экономический журнал ВШЭ,* **2**, *№ 1, 1998.*