Задача формирования портфеля инвестора в инвестиционных фондах

Богатко О.В.

В статье рассматривается один из аспектов теории инвестиционного портфеля - формирование эффективного портфеля с ограничениями на доли входящих в него активов. В работе приведены основные модели и алгоритмы решения задачи.

Задача формирования инвестиционного портфеля состоит в определении оптимальной структуры портфеля из альтернативных вариантов при наличии данных о доходности активов; степени их рискованности, выраженной среднеквадратическим отклонением или дисперсией распределения доходности; корреляции активов по отношению друг к другу; предпочтений инвестора. Тематика данного исследования обсуждалась ранее в работах нобелевских лауреатов Марковица, Шарпа [1,2,3].

В работе Марковица *The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints* в 1956 г. был предложен алгоритм решения задачи - *Critical-Line method.* Этот алгоритм может быть использован для решения так называемой *основной задачи* определения эффективного портфеля при условии отсутствия дополнительных ограничений (верхнего и нижнего) на количество актива, входящего в портфель, так *и для стандартной задачи* при наличии этих ограничений.

Рассмотрение данных задач продолжил Шарп, и в своей работе *Portfolio theory and Capital Markets* в 1970 г. он подробно описал Critical-Line algorithm и рассмотрел смежные задачи [2].

В представленной работе при решении задачи формирования портфеля была решена одна из проблем, поднимаемая в работах Шарпа [2,3] - проблема вырожденности угловых точек λ - параметра, определяющего предпочтения инвестора при формировании портфеля, когда несколько активов меняют свой статус в угловых точках. Алгоритм, представленный в данной работе, не исключает их появление, но не сталкивается с трудностями, которые отмечал Шарп при описании алгоритма *Critical-line algorithm* [2]. Также к решенным алгоритмическим проблемам относятся: проблема поиска первоначальной λ, проблема определения статуса активов при уменьшении λ.

Оригинальность предлагаемого метода также состоит в том, что он позволяет автоматизировать процесс принятия инвестиционного решения. Созданные ранее методы [2,4] были полуаналитические, что затрудняет их практическое использование.

Построим границу эффективности портфеля и семейство прямых, получен-

---

Богатко О.В. - магистр экономики.

ных из кривых безразличия в результате перехода от системы координат *(E,δ)* к системе координат *(E,δ²)*, где *M* - эффективный портфель. Рациональный инвестор стремится сдвинуть прямую влево, минимизируя риск, выраженный дисперсией, - рассеянием доходности (основные обозначения определены ниже) [4]:

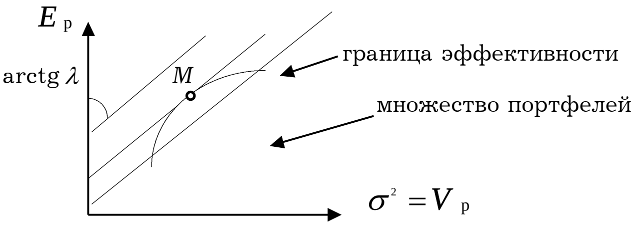

Рис.1.

Основной задачей формирования портфеля является следующая задача:

(1) $(V_p - \lambda E_p) \to min,$

при условии $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$ для всех $\lambda \geq 0$, $X_i \in (-\infty, +\infty)$, так что внутренность допустимого множества ограничений непуста,

где $E_p = \sum_{i=1}^{N} X_i E_i$ - ожидаемая доходность портфеля,

$V_p = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} X_i X_j C_{ij}$ - ожидаемый риск (дисперсия) портфеля,

$C_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ - ковариации активов в портфеле,

X_i - доля i-го актива в портфеле,

E_i - доходность i-го актива,

σ_i - СКО i-го актива,

λ - параметр, определяющий предпочтения инвестора,

ρ_{ij} - коэффициент корреляции между i-ым и j-ым активом в портфеле,

$i, j \in [1..N]$,

N - кол-во активов в портфеле.

Отрицательная величина X_i отражает отношение займа, так ценные бумаги продаются с короткой позиции. Параметр $\lambda = \infty$ означает безразличие инвестора к риску, $\lambda = 0$ означает минимальный риск. Решением данной задачи является вектор $\bar{X}$, определяющий структуру портфеля.

При наложении на величины X_i ограничений получаем *стандартную задачу* формирования эффективного портфеля. Чаще всего полагают $X_i \geq 0$. То есть предполагается, что инвестор не собирается делать эмиссию или брать в долг. Кроме того, возникают ограничения типа: доля любого актива в портфеле не должна превышать определенной величины.

Обозначим минимальную границу доли актива i в портфеле - L_i и максимальную - V_i. Тогда в общем случае $L_i \le X_i \le V_i$.

Имеем *стандартную задачу* поиска эффективного портфеля, т.е.

(2) $$(V_p - \lambda E_p) \to min,$$
$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1,$$
$$\lambda \ge 0,$$
$$L_i \le X_i \le V_i,$$
$$i \in [1..N].$$

Первым этапом решения данной задачи является определение статуса активов при $\lambda \to \infty$. Если для i-го актива выполняется условие $L_i < X_i < V_i$, он имеет статус *in*. Если $X_i = V_i$ - статус *up*, если $X_i = L_i$ - статус *down*.

Сначала всем активам, входящим в портфель, присваивают нижний статус, кроме одного, у которого максимальная доходность. Для этого j-го актива кладут $X_j = 1 - \sum_{i=1}^{N} L_i$, $(i \neq j)$. Если полученная величина не превосходит V_j, то решение для $\lambda \to \infty$ найдено. Если же полученная величина превосходит V_j, то выбранному активу присваивают верхний статус $X_j = V_j$, берут следующий высший по доходности актив и подбирают такое X, чтобы $\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$. Это процедура повторяется до тех пор, пока для всех активов не будет найден их статус при $\lambda \to \infty$ [4].

Следующий этап решения задачи включает поиск решения задачи (2), дискретно изменяя параметр λ от 0 до ∞, пока не получим решение, найденное для $\lambda \to \infty$. Данное решение будет применимо для некоторого λ^*.

Решение находится методом Фиакко и Мак-Кормика барьерных функций.

В результате получаем для каждого X_i непрерывную ломаную линию. В критических точках λ, в которых активы меняют статус, имеем характерные углы - свойство построения портфеля. Каждой критической точке соответствует эффективный портфель, который называется *угловым*. Число угловых портфелей конечно.

Определяем значения риска и доходности портфеля в критических точках λ. Выбрав цену риска σ_p, соответствующую доходности E_p и λ', инвестор получит эффективный портфель, отвечающий его готовности рисковать ради получения дохода.

Задача (2) является задачей квадратичного программирования. Условия существования решения и его единственности определяются необходимыми и достаточными условиями Куна-Таккера [5].

Покажем выпуклость целевой квадратичной функции задачи (2).

Имеем разницу выпуклой и линейной функций, результатом которой является выпуклая функция. Функция V_p является выпуклой вследствие положительной определенности матрицы, образованной элементами c_{ij}. Положительная определенность матрицы показывается положительной определенностью дисперсии V_p.

Задача формулируется в общем виде:

(3) $F_o(x) \to min,$

$F_i\,(x) \le 0, \quad i=1,...,M,$

x - вектор $1xN,$

где F_i - выпуклая функция, $i=1,...,M$.

Для приведения условий задачи (2) к форме (3) полагаем $\sum_{i=1}^{N} x_i \le 1$. Так как оптимальное решение находится на границе допустимой области в силу выпуклости целевой функции и наличия линейности в системе ограничений, данное предположение не противоречит условиям задачи.

Суть метода барьерных функций заключается в замене условной оптимизации эквивалентной задачей безусловной минимизации. В этом методе к целевой функции исходной задачи (3) добавляется барьерный член, который не позволяет генерируемым точкам выходить за пределы допустимой области. По своему построению процедура приводит к движению изнутри области к границе, и оптимальное решение оказывается на границе допустимой области. Таким образом строится последовательность допустимых точек, сходящихся к оптимальному решению исходной задачи. На рис. 2 представлено решение для двух переменных.

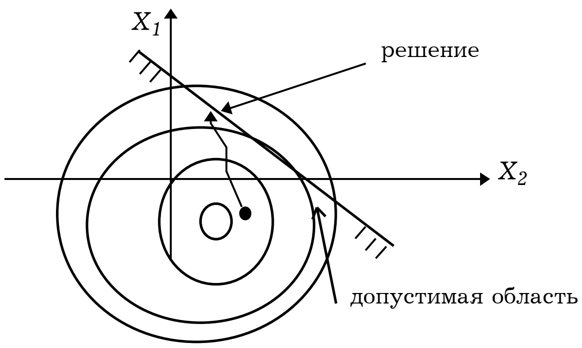

Рис.2.

Рассмотрим метод Фиакко и Мак-Кормика барьерных функций. Практически этот метод применим только в задачах выпуклого программирования, что представляет собой наш случай. Допустим исследуется задача, сформулированная выше, - минимизация функции $F_o(x)$, где x - вектор 1xN, при непрерывных функциях ограничения $F_i\,(x) \le 0,\ i=1,...,M$. Предполагаем, что все $F_i(x)$ выпуклы и существует такая точка x^*, что $F_i\,(x^*) < 0,\ i=1,...,M,$ так что внутренность допустимого множества ограничений непуста. Составим функцию, определенную внутри допустимого множества:

(4) $$P(x,r) = F_o(x) - \sum_{i=1}^{M} \frac{r}{F_i(X)} \quad , \quad r>0,$$

Нетрудно проверить, что $P(x,r)$ выпукла по x внутри допустимого множества [5].

Если обозначить через $x(r)$ точку минимума $P(x,r)$ в допустимом множестве, то при достаточно общих предположениях можно показать сходимость метода:

(5) $$\lim_{r\to 0} \frac{r}{F_i^2(x(r))} = U^i, U^i \ge 0, i = 1,\ldots,M,$$

где U^i - множители Лагранжа задачи минимизации $F_o(x)$, $i=1,\ldots,M$ [5].

Таким образом, приближенное решение задачи с ограничениями свелось к задаче нахождения минимума функции $P(x,r)$ без ограничений [5].

Для решения задачи без ограничений используется метод с квадратичной скоростью сходимости - метод Ньютона [6]. Приближения будем получать по формуле:

(6) $$X_{k+1} = X_k - \frac{P'(X_k,r)}{P''(X_k,r)} \quad ,$$

где производные берутся по X_k.

Таким образом построен алгоритм решения задачи.

Общее количество оцениваемых параметров, включая ожидаемые доходности, дисперсии, вектора ограничений, матрицу корреляций, составляет $\frac{7N - N^2}{2}$, где N - размерность задачи.

Задача формирования оптимального портфеля решена автором программным путем. Приложениями решения данной задачи являются задача формирования и управления портфелем инвестора, состоящего из разнообразных активов: реальных активов, товарных ценностей, вложений в недвижимость, акций, облигаций, производных ценных бумаг, других инвестиционных инструментов; задача формирования и управления портфелем инвестора с фиксированной доходностью.

Составим портфель инвестора, инвестирующего по отраслевому признаку в отрасли: нефтегазовой промышленности, энергетики, телекоммуникации и связи, металлургии и машиностроения. В качестве объектов инвестирования возьмем обыкновенные акции следующих Российских предприятий: нефтегазовая промышленность - «Лукойл», энергетика - «Мосэнерго», телекоммуникация и связь - «Ростелеком», металлургия - «Норильский никель», машиностроение - «КамАЗ».

Пользуясь ежедневными данным котировок РТС на март 1997 г., рассчитаем доходности и СКО акций за единичный период: $E_1=0,34\%$, $E_2=1,01\%$, $E_3=1,22\%$, $E_4=0,56\%$, $E_5=1,9\%$, $\sigma_1=2,76\%$, $\sigma_2=2,07\%$, $\sigma_3=1,16\%$, $\sigma_4=1,98\%$, $\sigma_5=1,79\%$. Положим ограничение на долю акций одного типа в портфеле не менее 0 и не более 50%.

В результате работы программы, выбрав по данным построенных графиков цену риска (дисперсия - 0,47%, СКО - 0,69%) и значение доходности (ожидаемая доходность - 1,56%), получаем структуру оптимального портфеля - доли предприятий в портфеле для $\lambda=4$: «Лукойл» - 0%, «Мосэнерго» - 0%, «Ростелеком» - 50%, «Норильский никель» - 0%, «КамАЗ» - 50%. Значения годовой доходности и риска составили: годовой доходности - 80,23%, годовой дисперсии - 24%, что согласуется с реальными значениями на тот период.

Подробнее решение задачи наряду с анализом метода с точки зрения применения на Российском фондовом рынке представлено в работе автора [7].

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Markowitz H.M. Portfolio selection. - Journal of Finance, no. 1, March 1952.*
2. *Sharpe W.F. Portfolio Theory and Capital Markets. - McGraw-Hill, 1970. C 257-287.*
3. *Sharpe W.F., Alexander G.J., Bailey J.V. Investments. - Prentice Hall, fifth edition, 1995.*
4. *Буянова Е.А. Управление портфелем ценных бумаг. - М.: ВШЭ, 1996.*
5. *Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. -М.: Наука, 1975.*
6. *Сухарев А.Г., Тимохов А.В. Курс методов оптимизации. - М.: Наука, 1986.*
7. *Богатко О.В. Формирование и управление портфелем инвестора в инвестиционных фондах. - Проблемы экономической теории и практики на современном этапе развития.: Сборник научных трудов. - М.: МГАПИ, 1998. С. 17.*