## *ВОПРОСЫ ТЕОРИИ*

# Расчеты схем гибкого страхования[1)]

**Мельников А.В., Молибога М.М.**

В работе, находящейся на стыке финансовой и актуарной математики, изучаются методы количественных расчетов премий и резервов для гибких схем страхования (equity-linked insurance schemes). Даются необходимые сведения и приводится описание основных подходов (актуарный резерв, статическое и динамическое хеджирование) к расчету таких инновационных схем. Особое внимание уделяется наиболее важному методу – методу динамического хеджирования, который подробно разобран как для наиболее изученного случая полных рынков (модель Блэка–Шоулса), так и для совсем не изученного случая неполных рынков (обобщенная модель Башелье со стохастической волатильностью).

## 1. Проблематика расчетов гибких страховых схем

*Страховым контрактом* называется соглашение между страховой компанией и ее клиентом, определяющее событие, которое может произойти с клиентом для получения страховой выплаты, срок действия этого соглашения, а также размер страховой премии. Потребность адаптации страхования к изменяющимся условиям развития финансовой системы привели в 1980-е гг. к созданию *гибких схем страхования* (см., например, [3, 5–7]), представляющих такой тип контрактов, в которых размер выплаты компании при наступлении страхового случая зависит от рыночной цены некоторой ценной бумаги или даже от цены портфеля ценных бумаг. Тем самым, в отличие от традиционного страхования, выплата по таким контрактам является не фиксированной, а представляет собой некоторую случайную величину.

Обозначим $g(S)$ размер выплаты по страховому обязательству, где $g$ – некоторая функция, а $S$ – цена единицы заранее указанного актива. На практике получили распространение два основных типа гибких страховых контрактов (equity-linked contracts): *«чистый» контракт* (pure equity-linked insurance contract), соответствующий случаю $g(S)=S$, и *контракт с «гарантией»* (equity-linked insurance contract with guarantee), соответствующий случаю $g(S)= max(S,K)$, где $K$ – некоторое положительное число. В этой работе рассматриваются оба типа

---

[1)] Работа поддержана грантом NSERC 264186.

**Мельников А.В.** – Математический институт им. В.А. Стеклова РАН; Department of Mathematical and Statistical Sciences, University of Alberta, Edmonton, Canada.
**Молибога М.М.** – Efficient Capital Management, LLC, Naperville, IL, USA.

Статья представлена в Редакцию в феврале 2003 г.

контрактов, хотя второй, безусловно, интереснее как с точки зрения страховой практики, так и теории.

При расчете традиционных страховых контрактов используется *принцип эквивалентности*, состоящий в том, что размер кумулятивной нетто-премии равен математическому ожиданию дисконтированных кумулятивных выплат. При этом страховая компания должна обладать *резервом*, определяемым в традиционном страховании *уравнением Тиля*. Рассмотрение гибких страховых схем приводит к необходимости «подправить» указанный фундаментальный принцип, поскольку составляющие основу этих схем рисковые активы требуют «риск-нейтрального» исчисления премий и резервов. При этом следует отметить, что, в отличие от страхования, в финансах премией называют текущее значение будущего платежа, или платежного обязательства. Это текущее значение находится из соображений хеджируемости заданного *платежного обязательства*. Заметим, что эксперименты показывают, что хеджирование, исходящее из риск-нейтральности, обычно «справляется» с реальным ростом (или падением) цен акций. Собственно премией принято считать начальное значение соответствующего (минимального) хеджа, а резервом, определенным для каждого момента времени действия контракта, – условное математическое ожидание разности дисконтированных выплат и премий. Например, для модели финансового рынка Блэка и Шоулса величины резервов и премий (в указанном выше смысле) даются, соответственно, фундаментальным дифференциальным уравнением и формулой Блэка и Шоулса для обязательств, связанных с опционом покупателя. Указанная финансовая «идеология» расчетов осуществляется для гибких схем в зависимости от того, полон или неполон финансовый рынок. Так в модели Блэка и Шоулса эти соображения (см. [5], [6], [16]) реализуются в нахождение среднего от дисконтированного значения платежного обязательства относительно *единственной* риск-нейтральной (мартингальной) меры и приводят к конкретным величинам премий и резервов, содержащим формулу и уравнение Блэка и Шоулса. Поскольку в неполных рынках семейство мартингальных мер состоит более чем из одной меры, то модернизация принципа эквивалентности с помощью методологии суперхеджирования приводит уже к целому отрезку таких нетто-премий, границы которого будем называть нижней и верхней нетто-премиями. Конкретизация методологии совершенного суперхеджирования, приводящая к верхней и нижней нетто-премии, реализована в данной работе для обобщенной модели Башелье со стохастической волатильностью.

Рассмотрим контракт гибкого срочного страхования (term insurance contract), согласно которому наследники застрахованного, находящегося в возрасте $x$ к моменту заключения договора, имеют право получить страховую выплату $g(S)$ в случае наступления его смерти в течение последующих $T$ лет. Обозначим через $U(x,T)$ нетто-премию этого контракта. Для частного случая $g(S)=S$ (см., например, [9]) приведем некоторые соображения, свидетельствующие о том, что для получения размера соответствующей этому контракту нетто-премии $U(x,T)$ здесь потребуются лишь минимальные предположения. Пусть $S_t$ – рыночная цена рискового актива в момент времени $t$, а $B_t$ – безрисковый актив. Заметим, что $B_0$ без потери общности традиционно полагают равным единице. Пусть $T_x(t)$ – оставшийся срок жизни для человека возраста $x$ с плотностью $f_x(t)$. Предположим, что $\frac{S_t}{B_t}$ является *мартингалом* относительно исходной меры. С учетом принципа эквивалентности и независимости двух типов случайностей, связанных с эволюцией финансового рынка и смертностью, нетто-премию для такого контракта срочного страхования разумно вычислять по формуле:

$$U(x,t)=E\left[\int_0^T \frac{S_t}{B_t}\,d\left(1_{\{T_x\le t\}}\right)\right]=E\left[\int_0^T S_0\,d\left(1_{\{T_x\le y\}}\right)\right],$$

где $1_{\{T_x\le t\}}$ – индикатор соответствующего события.

Заметим, что в случае традиционного страхования с фиксированной выплатой, которую без ограничения общности можно считать единичной, с постоянным банковским процентом $r$ и $B_t=e^{rt}$, соответствующая нетто-премия также вполне естественным образом равна:

$$U^{trad}(x,T)=E\left[\int_0^T B_t^{-1}d\left(1_{\{T_x\le t\}}\right)\right]=E\left[\int_0^T \exp(-rt)\,d\left(1_{\{T_x\le t\}}\right)\right].$$

Далее, с учетом существования плотности

$$U(x,T)=\int_0^T S_0 f_x(t)\,dt. \tag{1}$$

Обозначим через ${}_t p_x = P(T_x > t)$ условную вероятность того, что держатель страхового полиса, которому $x$ лет, проживет еще более $t$ лет. Тогда (1) преобразуется к виду:

$$U(x,T)=(1-{}_T p_x)S_0. \tag{2}$$

Действительно, определяя интенсивность смертности $\mu_{x+t}=\dfrac{f_x(t)}{{}_t p_x}$, имеем, что $f_x(t)={}_t p_x \mu_{x+t}$, и $\dfrac{\partial}{\partial t}\,{}_t p_x=-\mu_{x+t}\,{}_t p_x$. Подставляя выражение для $f_x$ в формулу (1), получим (2).

Аналогично получим нетто-премию ${}_T U_x$ контракта чистого дожития (pure endowment contract), дающего держателю, находящемуся в возрасте $x$ на момент подписания договора, право получения одной единицы соответствующего актива, если он будет жив в последующие $T$ лет:

$${}_T U_x = P(T_x > T)S_0 = {}_T p_x S_0. \tag{3}$$

Таким образом, для получения справедливых значений нетто-премий для «чистых» контрактов (2) и (3) следует использовать тривиальную стратегию хеджирования: сразу купить и держать то количество акций, которое нужно для выполнения (в среднем) страховых обязательств. При этом не нужно знать вероятностную модель актива $S_t$, что уже не верно для случая контрактов с «гарантией».

Из рассмотрения «чистых» контрактов вытекает, что страховая компания не дает клиенту полной защиты от риска, связанного с непредсказуемостью финансового рынка. Для защиты держателя полиса от крупных потерь на рынке ценных бумаг вводится гарантированное значение $K$ выплаты, если цена единицы актива окажется ниже $K$. В этом случае функция выплаты имеет вид $g(s) = max(s,K)$, где $K$ – положительная постоянная величина (или даже положительная функция времени).

Существует несколько известных подходов к актуарным расчетам в контексте финансовых рынков (см. [11, 14]):

- *Метод актуарного резерва*, используемый в MGWP (Maturity Guarantees Working Party of the Institute of Acutaries), состоит во вложении части капитала в безрисковые активы до окончания страхового срока, причем размер вложенного капитала вычисляется соответственно ожидаемым выплатам с некоторой заданной вероятностью.
- *Метод статического хеджирования*, предписывающий страховой компании вложить полученные от клиентов премии в опционы покупателя европейского типа для хеджирования гарантированной выплаты (при этом все проблемы, связанные с хеджированием, приходятся на эмитента соответствующих опционов).
- *Метод динамического хеджирования*, который предлагает страховой компании самой участвовать в торгах на финансовом рынке. Поскольку этот подход, как правило, позволяет минимизировать величину нетто-премии по сравнению с другими подходами, то экономически он предпочтительнее, а с теоретической точки зрения – более интересен.

Рассмотрим, какой метод предпочтительнее зависит от конкретных типов контрактов, имеющихся ресурсов и юридических ограничений.

**Метод актуарного резерва**. Следуя [14], рассмотрим две модели динамики цен акций: модель Уилки и модель геометрического броуновского движения (логнормальная модель).

Опишем методологию актуарного резерва при расчете нетто-премий для контракта чистого дожития. Аналогично можно провести описание расчета нетто-премии для контракта срочного страхования жизни.

Рассмотрим контракт чистого дожития сроком на $N$ лет с величиной страховой выплаты $f_N$. Зафиксируем $p_1 \in (0,1)$ как вероятность того, что страховая компания сможет произвести выплату по контракту чистого дожития. Таким образом, резерв $V_N$ к терминальному моменту $N$ должен быть устроен так, чтобы

$$P[(F_N + V_N) > f_N] \geq p_1 ,$$

где $F_N$ – капитал, накопленный в безрисковых фондах.

Зафиксируем еще одно число $p_2 \in (0,1)$ как вероятность того, что каждый год $n = 0,..., N-1$ страховая компания сможет окупать свои внутренние расходы за год $M_{n+1}$:

$$P[(V_n \exp(r) + M_{n+1}) > V_{n+1}] \geq p_2 ,$$

где $r$ – банковский процент. Последнее неравенство позволяет, зная $V_N$, вычислить начальную величину резерва $V_0$, которая дает страховой компании возможность окупить внутренние затраты и затем произвести страховую выплату в терминальный момент N. Числа $p_1$ и $p_2$ в актуарных расчетах называются *первым и вторым резервным стандартом.*

Проведем согласно [14] соответствующие вычисления в логнормальной модели без учета внутренних расходов страховой компании. Обозначим изменение стоимости единицы безрискового актива за $n$-й год $1+I_n$ ($n$=0, 1,..., $N-1$) и предположим, что $1+I_n$ являются независимыми случайными величинами, распределенными логнормально с параметрами $\mu$ и $\sigma^2$. Пусть $A(N)$ – кумулятивный капитал, полученный от вложения 1 долл. в безрисковые фонды, к моменту времени $N$. Тогда $A(N)$ также распределен логнормально с параметрами $N\mu$ и $N\sigma^2$. Положим, $f_N$ – гарантированная выплата на 1 долл. нетто-премии. Тогда согласно методу актуарного резерва: $P(UA(N)+V_N > f_N U)$, где $U$ – единоразовая нетто-премия, а $p_1$ – первый резервный стандарт. Тогда одному доллару единоразовой премии соответствует следующий терминальный резерв:

$$V_N = \max\left(0, f_N - e^{-z_{p_1}\sqrt{N}\sigma + N\mu}\right),$$

где $\Phi(z_p) = p$. Следовательно, начальная величина резерва равна (см. [14]):

$$V_0 = E\left[V_N e^{-rN}\right] = \left(\Phi\left(\frac{\log[f_N]-N\mu}{\sqrt{N}\sigma}\right)f_N - e^{N\mu+\frac{N\sigma^2}{2}}\Phi\left(\frac{\log[f_N]-N\mu-N\sigma^2}{\sqrt{N}\sigma}\right)\right)e^{-rN}.$$

Рассмотрим подробнее модель Уилки, которая является одной из наиболее популярных среди актуариев. Она была специально разработана для Maturity Guarantees Working Party (MGWP), а ее популярность, по-видимому, заключается в адекватном учете специфики инвестиций страховой компании. Страховые контракты обычно заключаются на относительно длительные сроки. Поэтому задача актуариев состоит в построении долгосрочных прогнозов финансовой состоятельности страховых компаний с учетом эволюции рассматриваемых ценных бумаг. Флуктуации локального характера, безусловно, должны учитываться при построении финансовых моделей, описывающих эволюцию ценных бумаг с относительно малыми периодами погашения, и поэтому являются важным объектом исследования финансовых аналитиков. Однако они в целом ряде случаев мало влияют на построение долгосрочных прогнозов. Следовательно, ради упрощения модели, применяемой для актуарных целей, бывает, что такими флуктуациями разумно пренебречь. Модель Уилки (см. детали [22], [23]) предназначена для описания эволюции цен ценных бумаг, дивидендов по ним и других сопутствующих объектов финансового рынка, весьма непростых по своей структуре. Первостепенное значение в этой модели придается инфляции, а все остальные переменные предполагаются зависящими от этого ключевого фактора. Для объяснения смысла подхода Уилки опишем частный случай применения модели для относительно простого, но в то же время достаточно репрезентативного инструмента финансового рынка, каким является безкупонная облигация. Модель Уилки в этом случае принимает хорошо известный в статистике вид уравнения авторегрессии первого порядка [22]:

$$\Delta \ln Q_t = \mu + \beta(\Delta \ln Q_{t-1} - \mu) + \sigma\varepsilon_t ,$$

где $Q_t$ – стоимость одной ценной бумаги в момент времени $t$; $\varepsilon_t$ – последовательность независимых стандартных нормальных случайных величин; $\mu$, $\beta$ и $\sigma$ – численные параметры модели; оператор разности $\Delta$ определен как $\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$. После замены $X_t = \ln Q_t - \mu$ уравнение принимает канонический вид уравнения авторегрессии первого порядка:

$$\Delta X_t = \beta \Delta X_{t-1} + \sigma\varepsilon_t$$

с параметром авторегрессии $\beta$. Уравнения такого вида хорошо изучены в статистике случайных процессов, и поэтому сама модель в такой постановке может быть четко математически описана и исследована.

Производя несложные количественные вычисления (см. [11, 14] в деталях), получим конкретные значения начального резерва в логнормальной модели (модели геометрического броуновского движения) и модели Уилки (например, см. [11, 14, 22]) для случая единоразовой премии равной 100 долл., с «гарантийной» выплатой в 100 долл., $p_1 = p_2 = 95\%$ и параметрами модели, взятыми для реального канадского финансового рынка. Для простоты мы не рассматриваем процесс смертности, так как начальный резерв для соответствующего договора чистого дожития отличается лишь на коэффициент вероятности дожития до терминального момента [14]:

**Таблица 1.**

| Терминальный момент, лет | Модель | Начальный резерв |
|---|---|---|
| 5 | Уилки | 2,4 |
| 5 | логнормальная | 2,3 |
| 10 | Уилки | 1,0 |
| 10 | логнормальная | 1,0 |
| 15 | Уилки | 0,4 |
| 15 | логнормальная | 0,5 |

Аналогичное моделирование для случая $p_1 = p_2 = 99\%$ приводит к следующим данным о начальном резерве.

**Таблица 2.**

| Терминальный момент, лет | Модель | Начальный резерв |
|---|---|---|
| 5 | Уилки | 2,4 |
| 5 | логнормальная | 2,3 |
| 10 | Уилки | 1,0 |
| 10 | логнормальная | 1,0 |
| 15 | Уилки | 0,4 |
| 15 | логнормальная | 0,5 |

Заметим, что результаты, полученные в рамках этих моделей, достаточно близки.

**Метод динамического хеджирования**. Для описания этого метода потребуется синтезировать: модель финансового рынка, описывающую эволюцию ценных бумаг, и страховую модель с соответствующим процессом смертности. Страховая компонента сравнительно проста по своей структуре, поэтому на улучшение комбинированной математической модели гибкого страхования можно рассчитывать только через выбор наиболее реальной модели финансового рынка. Среди таковых: полные и неполные рынки. В качестве репрезентативной модели полного рынка рассмотрим классическую модель Блэка–Шоулса, а из неполных – сконцентрируемся на модели Башелье со стохастической волатильностью, что даст нам возможность получить исчерпывающие результаты.

## 2. Гибкие схемы в полных рынках

Рассмотрим $(B,S)$ рынок, определяемый ценами безрискового $B_t$ и рискового $S_t$ активов соответственно. Будем считать их случайными процессами на вероятностном пространстве $\left(\Omega^1, F^1, F_T^1 = \left(F_t^1\right)_{\{0\le t\le T\}}, P^1\right)$, такими, что

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\,,$$
$$dB_t = rB_t dt\,,$$

где $S_0 > 0,\, B_0 = 1,\, W = \left(W_t\right)_{0\le t\le T}$ – стандартный винеровский процесс относительно фильтрации $F_t^1 = \sigma\{(S_u, B_u), u \le t\} = \sigma\{S_u, u\le t\}$.

Указанная модель Блэка–Шоулса является, как известно (см. [5, 8]), полной и имеет следующее экспоненциальное представление:

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\},$$
$$B_t = \exp\{rt\}.$$

Известно (см. [5, 8, 20]), что дисконтированный процесс $S_t^* = S_t / B_t$ является мартингалом относительно единственной мартингальной меры $\hat{P}$, эквивалентной исходной и определяемой плотностью:

$$\frac{d\hat{P}}{dP^1} = \exp\left(-\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T\right) = Z_T.$$

Далее, из предыдущей формулы для $S_t$ вытекает, что

$$S_t^* = S_t / B_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}.$$

Взяв безрисковый актив $B_t$ и рисковый $S_t$ в количестве $\beta_t$ и $\gamma_t$ соответственно, образуем пару $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$, называемую стратегией или портфелем. Капитал портфеля $\pi$ определяют суммой

(4) $$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t ,$$

и говорят, что стратегия *самофинансируемая*, если для всех $0 \le t \le T$

$$X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_u dS_u + \int_0^t \beta_u dB_u ,$$

при условии, что соответствующие интегралы существуют. Заметим, что самофинансируемость стратегии означает отсутствие притока капитала извне или его оттока − изменение величины банковского счета происходит лишь вследствие изменения (покупки или продажи) количества акций и наоборот $(\beta_t dB_t + \gamma_t dS_t) = 0$.

Зафиксируем временной горизонт $T$ и назовем *платежным обязательством* $f = f_T$ любую функцию, измеримую относительно σтерминальной $\sigma$-алгебры, порожденной случайным процессом эволюции цен $S_t$. Говорят, что платежное обязательство $f$ *реплицируемо*, если существует самофинансируемая стратегия $\pi$, для которой $X_T^\pi = f_T$ (п.н.). Рынок полный, если любое платежное обязательство реплицируемо. Если $f_T$ реплицируемо посредством самофинансируемой стратегии $\pi$, то имеет место представление:

$$f_T = \gamma_0 S_0 + \beta_0 B_0 + \int_0^T \gamma_u dS_u + \int_0^T \beta_u dB_u .$$

Далее будем рассматривать классические платежные обязательства вида $f_T = g(S_T)$, где $g$ − некоторая функция. Обозначим $F(t, S_t)$ цену в момент $t$ платежного обязательства $g(S_T)$, определяемую (из принципа безарбитражности) как условное математическое ожидание относительно единственной мартингальной меры $\hat{P}$:

$$F(t, S_t) = \hat{E}\left[\exp(-(T-t)r) g(S_T) \mid F_t^1\right].$$

Таким образом, цена обязательства находится посредством дисконтирования платежного обязательства, а затем вычисления условного математического ожидания этой дисконтированной величины относительно единственной мартингальной меры $\hat{P}$. Известно (см. [5, 8]), что процесс $F(t, S_t)_{0 \le t \le T}$ описывается фундаментальным уравнением Блэка и Шоулса:

$$-rF(t,s)+F_t(t,s)+rsF_s(t,s)+\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}(t,s)=0$$

с граничным условием $F(T,s)=g(s)$.

Найдем конкретное представление процесса цен $F(t,S_t)$ для платежного обязательства $g(S_T)=\max\{S_T,K\}$. Для этого заметим, что $g(S_T,K)=K+(S_T-K)^+$. Далее, с учетом (2) и формулы Блэка–Шоулса (см. [5, 8]):

$$\begin{aligned} F(t,S_t) &= \hat{E}\left[g(S_T,K)\mid F_t^1\right]=\hat{E}\left[K+(S_T-K)^+\mid F_t^1\right]= \\ &= K\exp\big(-r(T-t)\big)+\hat{E}\left[\exp\big(-r(T-t)\big)(S_T-K)^+\mid F_t^1\right]= \\ &= K\exp\big(-r(T-t)\big)\Phi\left(-d_2^t(T)\right)+S_t\Phi\left(d_1^t(T)\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Phi(y)$ – функция стандартного нормального распределения,

$$d_1^t(s)=\frac{\ln\dfrac{S_t}{K}+\left(r+\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}, \tag{6}$$

$$d_2^t(s)=\frac{\ln\dfrac{S_t}{K}+\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)(s-t)}{\sigma\sqrt{s-t}}. \tag{7}$$

Справедливая цена платежного обязательства $C_T$ определяется как значение безарбитражного процесса цен в начальный момент времени (см. [5, 8]):

$$C_T=F(0,S_0)=K\exp(-rT)\Phi(-d_2^0(T))+S_0\Phi\left(d_1^0(T)\right).$$

Для стратегии $\pi=(\beta,\gamma)$, реплицирующей это платежное обязательство с начальным капиталом $C_T$, имеют место формулы (см. [5, 8]):

$$\gamma_t=\begin{cases}\Phi\left(d_1^t(0)\right), & t<T,\\ 1_{\{S_T>K\}}, & t=K,\end{cases}$$

$$\beta_t=\begin{cases}K\exp(-rT)\Phi\left(-d_2^t(T)\right), & t<T,\\ K\exp(-rT)1_{\{K\ge S_T\}}, & t=T.\end{cases}$$

Рассмотрим однородную группу людей возраста $x$ в количестве $l_x$, для которых разумно считать длительности их жизней независимыми и одинаково распределенными неотрицательными случайными величинами $T_1,\ldots,T_{l_x}$, заданными на вероятностном пространстве $\left(\Omega^2, F^2, P^2\right)$. Пусть условная функция распределения каждой из $T_i$ абсолютно непрерывна:

$$ {}_t p_x = P\left(T_i > t\right) = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+\tau} d\tau\right), $$

где $\mu_{x+t}$ – ее плотность. Определим *считающий* процесс $N = \left(N_t\right)_{0 \le t \le T}$:

$$ N_t = \sum_{i=1}^{l_x} I\left(T_i \le t\right), $$

порождающий соответствующую фильтрацию $F^2 = \left(F_t^2 = \sigma\left\{N_u, u \le t\right\}\right)_{t \le T}$. Поскольку $N$ непрерывен справа, а длительности жизней $T_i$ независимы и одинаково распределены, то $N$ является марковским относительно $F^2$. Технически нам удобно также считать $N_{T_-} = N_T$, что означает отсутствие смертей в терминальный момент времени.

Определим совместное вероятностное пространство:

$$ \left(\Omega^1 \times \Omega^2, F^1 \times F^2, F = \left(F_t\right)_{0 \le t \le T}, P^1 \times P^2\right), $$

где фильтрация $F = \left(F_t\right)_{0 \le t \le T}$ порождена процессом эволюции цен и считающим процессом смертности. Пусть в нулевой момент времени были застрахованы все $l_x$ человек, и в рассматриваемый страховой срок (до момента времени $T$) компания может покупать и продавать акции соответствующего типа без каких-либо налогов, ограничений или трансакционных затрат. Приступим к нахождению нетто-премии и оптимальной стратегии в среднеквадратичном смысле. Заметим, что вследствие наличия дополнительного фактора случайности точная репликация цены невозможна, но возможен поиск стратегии, оптимальной в каком-то смысле (в данном случае среднеквадратичном). «Финансовый» принцип эквивалентности, или принцип безарбитражности, для этой модели состоит в том, что размер нетто-премии должен равняться математическому ожиданию (уже относительно мартингальной меры $P^* = \widehat{P} \times P^2$, эквивалентной исходной, а не $P^1 \times P^2$, как в традиционном случае) дисконтированного значения выплат по страховому контракту. Для нахождения оптимальной стратегии будем использовать подход, основанный на концепции среднеквадратического хеджирования [13] (см. также [5, 16]).

Обозначим $V_t^\pi = \dfrac{X_t^\pi}{B_t}$ – дисконтированный капитал стратегии $\pi$ и определим соответствующий процесс цены $C^\pi$:

$$ C_t^\pi = V_t^\pi - \int_0^t \gamma_u dS^*(u). \tag{8} $$

Стратегию $\pi$ будем называть *самофинансируемой в среднем*, если соответствующий процесс цены $C^{\pi}$ является $\left(F, P^{*}\right)$-мартингалом.
Определим процесс риска стратегии $\pi$ равенством:

$$R_t^{\pi} = E^{*}[(C_T^{\pi} - C_t^{\pi})^2 \,|\, F_t].$$

При этом величину $R_0^{\pi}$ будем называть *риском* $\pi$. Хорошо известно (см. [5, 13]), что существует единственная самофинансируемая в среднем стратегия, минимизирующая риск $R_0^{\pi}$.

Так, считая, что $V_T^{\pi} = H$ (п.н.) и $H$ – дисконтированное платежное обязательство, реплицируемое посредством стратегии $\pi$, имеем, что

$$R_0^{\pi} = E^{*}\left[\left(C_T^{\pi} - C_0^{\pi}\right)^2\right] = E^{*}\left[\left(H - \int_0^T \gamma_u dS^{*}(u) - C_0^{\pi}\right)^2\right].$$

Таким образом, $R_0^{\pi}$ минимизируется при $C_0^{\pi} = E^{*}\left[H\right]$, а выбор $\gamma$ осуществляется так, чтобы минимизировать дисперсию

$$E^{*}[(C_T^{\pi} - E[C_T^{\pi}])^2].$$

Заметим, что $V_t = E^{*}\left[H \mid F_t\right]$ является $(F, P^{*})$-мартингалом. Применяя к нему разложение Гальчука–Куниты–Ватанабе (см. [8, 13]):

$$V_t = E^{*}\left[H\right] + \int_0^t \gamma_u^H dS_u^{*} + L_t^H,$$

где $L^H = \left(L_t^H\right)_{0 \le t \le T}$ является $\left(F, P^{*}\right)$-мартингалом с нулевым средним, ортогональным $S^{*}$, а $\gamma^H$ – предсказуемый процесс из $L^2\left(P^{*}\right)$, получим, что существует единственная стратегия $\pi^H$, минимизирующая риск $R_0^{\pi}$, определяемая своей рисковой компонентой $\gamma_t^H$ и $\beta_t^H = V_t - \gamma_t^H S_t^{*}$. В этом случае соответствующий процесс риска может быть записан в виде:

$$R_t^{\varphi} = E^{*}[(L_T^H - L_t^H) \,|\, F_t].$$

Применим эту теорию поиска оптимальных в среднеквадратическом смысле стратегий к контрактам чистого дожития с единоразовой премией. Для этого определим дисконтированную выплату

$$H = \max\left(S_T, K\right) B_T^{-1}\left(l_x - N_T\right).$$

Далее, воспользуясь разложением Гальчука–Куниты–Ватанабы, имеем (см. [16]), что оптимальная стратегия контракта чистого дожития $\pi^H = \left(\beta^H, \gamma^H\right)$ имеет вид:

(9) $$\gamma_t^H = \left(l_x - N_{t-}\right)_{T-t} p_{x+t} F_s(s,t) = (l_x - N_{t-})_{T-t} p_{x+t} \gamma_t \,,$$

(10) $$\beta_t^H = (l_x - N_{t-})_{T-t} p_{x+t} \exp(-rt) F(t,S_t) - (l_x - N_{t-})_{T-t} p_{x+t} \Phi\left(d_1^t(T)\right) S_t \exp(-rt) =$$
$$= \left(l_x - N_t\right)_{T-t} p_{x+t} \beta_t - \left(N_t - N_{t-}\right)_{T-t} p_{x+t} \gamma_t S_t \exp(-rt)\,,$$

где $\beta_t, \gamma_t, F(t,S_t)$ определены в (6), (7) и (2) соответственно.

Итак, получим размер нетто-премии как соответствующее математическое ожидание дисконтированных выплат:

(11) $${}_T U_x = {}_T\, p_x F(0,S_0) = {}_T\, p_x [K \exp(-rT) \Phi(-d_2^0(T)) + S_0 \Phi(d_1^0(T))].$$

Стратегия (9)−(10) с соответствующим начальным капиталом (11) реплицирует платежное обязательство $H$ и является оптимальной в среднеквадратическом смысле.

Приведем следующий достаточно репрезентативный пример. Рассмотрим (см. [16, 17]) контракт чистого дожития с «гарантией» сроком на 15 лет, рассчитанный на 45-летнего мужчину, и функцией выплаты $g(S_T) = \max\left(S_T, K\right)$. Поскольку в отношении этого контракта портфель страховой компании пропорционален количеству застрахованных людей, то без ограничения общности можно считать $l_x = 1$ и производить все расчеты для одного человека. Пусть для интенсивности смертности имеет место представление Гомпертса−Макхейма (см. [12, 16]):

$$\mu_{x+t} = 0{,}0005 + 0{,}000075858 \cdot 1{,}09144^{x+t}, \quad t \ge 0,$$

где $t$ и $x$ измеряются в годах.

Для такого распределения смертности условная вероятность прожить 15 лет 45-летнему человеку равна ${}_{15}p_{45} = 0{,}8796$. Определим параметры модели Блэка−Шоулса финансового рынка: волатильность процесса цен рискового актива $\sigma = 0{,}25$ (регулярный случай), $\sigma = 0{,}15$ (случай низкой волатильности), $\sigma = 0{,}35$ (случай высокой волатильности), постоянный банковский процент $r = 0{,}06$, $S_0 = B_0 = 1$. Размер нетто-премий для контракта чистого дожития, соответствующий этим значениям параметров модели, определяется выражением (11) и приводится в табл. 3.

**Таблица 3.**

| Волатильность $\sigma$ | Гарантийная выплата $K$ | Нетто-премия ${}_T U_x$ |
|---|---|---|
| 0,15 | 0 | 0,8796 |
| 0,15 | 0,5exp(rT) | 0,8817 |
| 0,15 | exp(rT) | 0,9422 |
| 0,15 | 2exp(rT) | 1,4854 |
| 0,25 | 0 | 0,8796 |
| 0,25 | 0,5exp(rT) | 0,9190 |
| 0,25 | exp(rT) | 1,0989 |

Продолжение таблицы

| Волатильность $\sigma$ | Гарантийная выплата $K$ | Нетто-премия ${}_TU_x$ |
|---|---|---|
| 0,25 | 2exp(rT) | 1,7333 |
| 0,35 | 0 | 0,8796 |
| 0,35 | 0,5exp(rT) | 0,9876 |
| 0,35 | exp(rT) | 1,2452 |
| 0,35 | 2exp(rT) | 1,9328 |

Заметим, что в [16] используются приближенные численные вычисления нетто-премии. Поэтому численные значения, представленные там, несколько отличаются от указанных выше точных значений справедливой нетто-премии.

Рассмотрим случай, когда премии выплачиваются клиентом постоянно в течение всего срока действия контракта. Эта ситуация весьма характерна для деятельности страховых компаний, работающих в достаточно конкурентной среде и стремящихся привлечь клиентов, например, такой рассрочкой премиальных платежей. Из принципа эквивалентности относительно меры $P^*$, как и в традиционном случае, можно определить *p(t)* (функцию периодической премии) из уравнения

$$ {}_tU_x = \int_0^T p(t)\exp(-rt)\,{}_tp_x dt $$

для контракта чистого дожития с «гарантией» и из

$$ U(x,T) = \int_0^T p(t)\exp(-rt)\,{}_tp_x dt $$

для контракта срочного страхования жизни с «гарантией».

В финансовой интерпретации традиционной страховой теории *резервом* $V_t$, в сущности, называется условное математическое ожидание разности дисконтированных детерминированных выплат и премий. Для гибких страховых контрактов естественно аналогично рассматривать резерв как условное математическое ожидание уже случайных будущих выплат и премий. Для гибкого контракта чистого дожития имеем, что

$$ V(t) = {}_{T-t}p_{x+t}\pi_t(T) - \int_t^T p(u)e^{-r(u-t)}\,{}_{u-t}p_{x+t}du. \tag{12} $$

Соответственно для контракта срочного страхования жизни

$$ V(t) = \int_t^T \left(\pi_t(u) f_{x+t}(u-t) - p(u)e^{-r(u-t)}\,{}_{u-t}p_{x+t}\right)du, $$

где $\pi_t(s) = Ke^{-r(s-t)}\Phi\left(-d_2^t(s)\right) + S_t\Phi\left(d_1^t(s)\right)$, а $d_1^t(s)$ и $d_2^t(s)$ определены ранее.

Заметим, что величина резерва зависит от $S_t$, рыночной цены соответствующего актива в момент времени $t$, при условии, что держатель контракта еще жив. Рыночная цена резерва премии для гибкого контракта чистого дожития с «гарантией» и функцией премии $p(t)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных (см. [9]):

$$\frac{\partial V}{\partial t} = p(t) + (\mu_{x+t} + r)V(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - rS_t \frac{\partial V}{\partial s}. \tag{13}$$

Для его вывода из представления (12) для $V(t)$ находим $\pi_t^*(T)$:

$$\pi_t^* = \varphi(t)\left( V(t) + \int_t^T p(u) e^{-r(u-t)} {}_{u-t}p_{x+t} du \right),$$

где $\varphi(t) = e^{-rt} {}_{T-t}p_{x+t}$.

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_{u-t}p_{x+t} = \mu_{x+t\,u-t}p_{x+t}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = -(\mu_{x+t} + r)\varphi(t).$$

Затем выражаем частные производные $\pi_t^*(T)$:

$$\frac{\partial \pi_t^*}{\partial s} = \varphi(t)\frac{\partial V}{\partial s},$$

$$\frac{\partial^2 \pi_t^*}{\partial s^2} = \varphi(t)\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$$

и

$$\frac{\partial \pi_t^*}{\partial t} = \varphi(t)\left(\frac{\partial V}{\partial t} - (\mu_{x+t} + r)V(t) - p(t)\right).$$

Воспользовавшись тем, что $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$ и формулой Колмогорова–Ито (см. [5, 8, 20]), получим для $s \le t$

$$\pi_s^*(T) = \pi_t^*(T) + \int_t^s \varphi(u)\frac{\partial V}{\partial s}\sigma s d\hat{W}_u +$$
$$+ \int_t^s \varphi(u)\left(\frac{\partial V}{\partial s} rS + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} - (\mu_{x+u} + r)V(u) + \frac{\partial V}{\partial u} - p(u)\right)du.$$

Процесс $\pi_t^*(T)$ является мартингалом относительно $P^*$. Следовательно, последний интеграл равен нулю, а (13) вытекает из того, что $\varphi(t)>0$ для всех $u\in(t,s)$.

Аналогично для контракта срочного страхования жизни получаем:

$$\frac{\partial V}{\partial t}=p(t)+(\mu_{x+t}+r)V(t)-\max\{S_t,K\}\mu_{x+t}-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2(t)\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}-rS_t\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{14}$$

Эти уравнения оказываются обобщениями и *уравнения Тиля*, которое не учитывает динамику рынка, и уравнения *Блэка–Шоулса*, которое рассматривает только рыночный риск и не учитывает смертность экономического агента. Действительно, полагая $\mu_{x+t}\equiv 0$ и $p(t)\equiv 0$, сразу находим, что оба уравнения (13) и (14) в точности принимают вид уравнения Блэка–Шоулса.

Расчет многоразовой (ежегодной) нетто-премии для гибких страховых контрактов в модели со стохастической процентной ставкой сводится к уже хорошо изученным *опционам азиатского типа*, хеджировать которые можно, например, с помощью итерационных алгоритмов (см. [18]). Обозначим через $U$ размер периодической нетто-премии и $u=aU$ – ту ее часть $(0\le a\le 1)$, которая вложена в некоторый рисковый актив, представленный своим процессом эволюции цен $S_t$. Предположим также, что нетто-премия переводится на счет компании в моменты времени $t_n, n=0,\dots,N-1$, причем $t_0=0$ – начальный момент времени, а $t_N=T$ – терминальный момент. Обозначим через $D(t,t')$ цену некоторой облигации с моментом погашения $t'$ в момент времени $t$. Определим выплату по договору дожития величиной

$$g(U)+V(T,T)=g(U)+\max\left\{u\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_T}{S_{t_n}}-g(U),0\right\},$$

где $g(U)$ – некоторая детерминированная функция нетто-премии, а $V(T,T)$ – стохастическая составляющая, зависящая от эволюции цен рискового актива.

Вычислим справедливую цену $V(t_0,T)$ платежного обязательства $V(T,T)$, представляющего собой опцион покупателя. Для этого рассмотрим финансовый рынок, заданный на некотором вероятностном пространстве следующей системой стохастических уравнений, описывающей эволюцию цен рискового актива, бескупонных облигаций и безрискового актива соответственно:

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sigma_1 dW_t^1+\sigma_2 dW_t^2,$$

$$\frac{dD(t,t')}{D(t,t')}=\mu(t,t')dt+\sigma(t,t')dW_t^1$$

с условием $\sigma(t,t)=0$ и $D(t,t)=1$;

$$\frac{dB_t}{B_t}=r_t dt\,.$$

Согласно [18], [19] для безарбитражного финансового рынка, определенного таким образом, характерно существование функций $\lambda_t^1$ и $\lambda_t^2$, не зависящих от $r_t$ и определенных следующим соотношением:

$$\lambda_t^1=\frac{\mu(t,t')-r_t}{\sigma(t,t')},$$

$$\lambda_t^2=\frac{\mu-r_t}{\sigma_2}-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\mu(t,t')-r_t}{\sigma(t,t')}.$$

Зададим новую меру $P^*$, эквивалентную исходной мере $P$, ее плотностью Радона–Никодима:

$$\frac{dP^*}{dP}=\exp\left\{-\int_{t_0}^{T}\lambda^1 dW^1-\int_{t_0}^{T}\lambda^2 dW^2-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left(\left(\lambda^1\right)^2+\left(\lambda^2\right)^2\right)dt\right\},$$

и по теореме Гирсанова процессы

$$\left(dW^{1,*},dW^{2,*}\right)=\left(dW^1+\lambda_t^1 dt,dW^2+\lambda_t^2 dt\right)$$

являются стандартными винеровскими процессами относительно меры $P^*$. Система задающих модель стохастических уравнений преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dS_t}{S_t}=r_t dt+\sigma_1 dW_t^{1,*}+\sigma_2 dW_t^{2,*},$$

$$\frac{dD(t,t')}{D(t,t')}=r_t dt+\sigma(t,t')dW_t^{2,*},$$

$$\frac{dB_t}{B_t}=r_t dt.$$

Очевидно, что дисконтированные цены акций $\frac{S_t}{B_t}$ и бескупонных облигаций $\frac{D(t,t')}{B_t}$ являются мартингалами относительно меры $P^*$. Действительно,

$$\frac{d(S_t / B_t)}{S_t / B_t} = \sigma_1 dW_t^{1,*} + \sigma_2 dW_t^{2,*},$$

$$\frac{d(D(t,t') / B_t)}{D(t,t') / B_t} = \sigma(t,t') dW_t^{2,*}.$$

Следовательно, выписывая решение стохастического дифференциального уравнения, имеем

$$\frac{S_T}{S_t} = \exp\left\{ \int_t^T r_u du - \frac{1}{2} \int_t^T \left( \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \right) du + \int_t^T \sigma_1 dW_u^{1,*} + \int \sigma_2 dW^{2,*} \right\}$$

или из «мартингальности» $S_t$ :

$$S_t = E_t^* \left[ \exp\left( -\int_t^T r_u du \right) S_T \right]. \tag{15}$$

Вследствие стохастичности $r_t$ приведение выражения (15) к явному виду является технически сложным. Разумно (см. [18, 19]) произвести еще одну замену меры:

$$\frac{dP^T}{dP^*} = \exp\left\{ \int_{t_0}^T \sigma(t,T) dW_t^{1,*} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \sigma^2(t,T) dt \right\}.$$

Согласно теореме Гирсанова

$$\left( dW_t^{1,T}, dW_t^{2,T} \right) = \left( dW_t^{1,*} - \sigma(t,T) dt, dW_t^{2,*} \right)$$

являются стандартными винеровскими процессами относительно меры $P^T$. Система стохастических дифференциальных уравнений после замены меры преобразуется к следующему виду:

$$\frac{d(S_t / D(t,T))}{S_t / D(t,T)} = (\sigma_1 - \sigma(t,T)) dW_t^{1,T} + \sigma_2 dW_t^{2,T},$$

$$\frac{d(D(t,t') / D(t,T))}{D(t,t') / D(t,T)} = (\sigma(t,t') - \sigma(t,T)) dW_t^{2,T},$$

а выражение (15) принимает вид:

$$\frac{S_t}{D(t,T)} = E_t^T \left[ \frac{S_T}{D(T,T)} \right] = E_t^T [S_T]. \tag{16}$$

Решая систему стохастических дифференциальных уравнений, получим:

$$D(t,T)=\frac{D(t_0,T)}{D(t_0,t)}\exp\left[-\int_{t_0}^{t}(\sigma(u,t)-\sigma(u,T))dW_u^{1,T}+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(\sigma(u,t)-\sigma(u,T))^2du\right],$$

$$\frac{S_T}{S_t}=\frac{1}{D(t,T)}\exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^T\left((\sigma_1-\sigma(u,T))^2+\sigma_2^2\right)du\right]\bullet$$

$$\bullet\exp\left[\int_t^T\left(\sigma_1-\sigma(u,T)dW_u^{1,T}\right)+\int_t^T\sigma_2 dW_u^{2,T}\right].$$

Далее, преобразуя (16) с учетом вида решения системы уравнений, получаем:

$$\frac{S_T}{S_t}=\frac{D(t_0,t)}{D(t_0,T)}\exp\left[\int_{t_0}^{t}(\sigma(u,t)-\sigma(u,T))dW_u^{1,T}-\frac{1}{2}\int_{t_o}^{t}\left((\sigma(u,t)-\sigma(u,T))^2\right)du\right]\bullet$$

(17)

$$\bullet\exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^T\left((\sigma_1-\sigma(u,T))^2+\sigma_2^2\right)du+\int_t^T\left(\sigma_1-\sigma(u,T)\,dW_u^{1,T}\right)+\int_t^T\sigma_2 dW_u^{2,T}\right].$$

Из технических соображений введем следующую «удобную» параметризацию $\sigma(t,t')=\sigma(t'-t)$, где $\sigma$ является некоторой неотрицательной константой. Выражение (17) принимает вид:

$$\frac{S_T}{S_t}=\frac{D(t_0,t)}{D(t_0,T)}\exp\left[-\frac{1}{2}(T-t)^2\sigma^2t-(T-t)\sigma W_t^{1,T}\right]\bullet$$

(18)

$$\bullet\exp\left[-\frac{1}{2}\int_t^T\left((\sigma_1-\sigma(T-u))^2+\sigma_2^2\right)du+\int_t^T\left(\sigma_1-\sigma(T-u)\,dW_u^{1,T}\right)+\int_t^T\sigma_2 dW_u^{2,T}\right].$$

Таким образом, для справедливой цены опциона имеет место формула:

$$V(t_0,T)=D(t_0,T)E^T\left[\max\left(u\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_T}{S_{t_n}}-g(U),0\right)\right].$$

Рассмотрим страховой контракт на $N$ лет, согласно которому клиент обязуется ежегодно вносить премию $U$ в моменты времени $0,1,\ldots,N-1$ лет, либо до момента смерти, если она произойдет до наступления терминального момента $T$ ($N$ лет). Страховая компания обязуется в случае наступления смерти в рассматриваемый период произвести страховую выплату

$$g(U)+\max\left[u\sum_{n=0}^{N^*(t)-1}\frac{S_t}{S_{t_n}}-g(U),0\right],$$

где $N^*(t)=\min\{n\,|\,t_n>t\}$, а в случае дожития до терминального момента выплатить клиенту

$$g(U)+\max\left[u\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_t}{S_{t_n}}-g(U),0\right].$$

Зафиксируем $a$ – долю вложений в рисковый актив. Предположим, что известна плотность распределения $f_x(t)$ остаточного срока жизни клиента возраста $x$. Тогда математическое ожидание выплат по страховому контракту равно:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{T}f_x(t)D(t_0,t)E^t\left[g(U)+\max\left(u\sum_{n=0}^{N^*(t)-1}\frac{S_t}{S_{t_n}}-g(U),0\right)\right]dt+\\&+\left(1-\int_{t_0}^{T}f_t(t)dt\right)D(t_0,T)E^T\left[g(U)+\max\left(u\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_t}{S_{t_n}}-g(U),0\right)\right].\end{aligned}\tag{19}$$

Справедливая нетто-премия $U$ удовлетворяет принципу эквивалентности

$$\begin{aligned}&V(t_0)+g(U)\int_{t_0}^{T}D(t_0,t)f_x(t)dt+g(U)D(t_0,T)\left(1-\int_{t_0}^{T}f_x(t)dt\right)=\\&=K\sum_{n=0}^{N-1}D(t_0,T)\left(1-\int_{t_0}^{t_n}f_x(t)dt\right),\end{aligned}\tag{20}$$

где $V(t_0)=\int_{t_0}^{T}V(t_0,t)f_x(t)dt+V(t_0,T)\left(1-\int_{t_0}^{T}f_x(t)dt\right)$,

а $V(t_0,T)=D(t_0,t)E^t\left[\max\left(u\sum_{n=0}^{N^*(t)-1}\frac{S_t}{S_{t_n}}-g(U),0\right)\right]$.

Совершенно естественный вопрос состоит в определении условий на *g(U)*, достаточных для существования и единственности решения функционального уравнения (20). Тривиальное решение $U^*=0$ выписывается очевидным образом, если $g(0)=0$. Сформулируем общее утверждение о достаточных условиях существования и единственности справедливой нетто-премии как нетривиального решения функционального уравнения (20) (см. доказательство в [19]):

*В данной модели финансового рынка существует единственное нетривиальное решение задачи о нахождении справедливой нетто-премии (20) для* $a \in (0,1)$, *если функция*

$$\hat{g}(U) = \frac{g(U)}{U}, \quad \hat{g}: R^{+} \to R^{+}$$

*является непрерывным строго монотонным отображением на* $\operatorname{Im}(\hat{g}) = R^{+}$, *т.е. взаимнооднозначна.*

Предположим, что функция $g$ удовлетворяет достаточным условиям существования и единственности решения функционального уравнения. Пусть $0 \le t_{n-1} < t_n < t_N = T$. Перепишем (18) в более удобном для последующего применения численного метода виде:

$$\frac{S_T}{S_{t_n}} = \frac{S_T}{S_{t_{n-1}}}\left[\frac{D(t_0,t_n)}{D(t_0,t_{n-1})}\exp\left(\frac{1}{2}\left[(T-t_{n-1})^2 t_{n-1} - (T-t_n)^2 t_n\right]\sigma^2\right)\bullet\right.$$

$$\bullet\exp\left(\frac{1}{2}\int\left(\left(\sigma_1 - (T-u)\,\sigma\right)^2 + \sigma_2^2 du\right)\right)\bullet \tag{21}$$

$$\bullet\exp\left(\left[(T-t_{n-1})W^{1,T}_{t_{n-1}} - (T-t_n)W^{1,T}_{t_n}\right]\sigma - \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\sigma_1 - (T-u)\sigma\right)dW^{1,T}_u\right)\bullet$$

$$\left.\bullet\exp\left(-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\sigma_2 dW^{2,T}_u\right)\right] = \frac{S_T}{S_{n-1}}A^T(t_{n-1,}t_n).$$

Воспользовавшись (21) в формуле суммы $\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_T}{S_{t_n}}$ и произведя очевидные преобразования, имеем:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_T}{S_{t_n}} = \frac{S_T}{S_{t_0}}\left[1 + A^T(t_0,t_1)\left[1 + A^T(t_1,t_2)\left[1 + \ldots A^T(t_{n-3},t_{n-2})\left[1 + A^T(t_{n-2},t_{n-1})\right]\ldots\right]\right]\right]. \tag{22}$$

Для случая детерминированной процентной ставки члены последовательности $A^T(t_{n-1},t_n),\ n = 1,2,\ldots$ являются независимыми случайными величинами и хорошо известны алгоритмы, позволяющие решить задачу нахождения справедливой нетто-премии (20) в этом случае (например, см. [21]). Будем искать приближение неизвестной плотности $\rho^T$ среднего арифметического логнормально распределенных величин через разложение Эджворта:

(23) $$\rho^T(x) = f(x) + \frac{c_2}{2!}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - \frac{c_3}{3!}\frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3} + \frac{c_4}{4!}\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4},$$

где $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{(\ln x - \mu_f)^2}{2\sigma_f^2}\right)$ – функция плотности логнормальной случайной величины с параметрами $\mu_f$ и $\sigma_f$, которые выбираются таким образом, чтобы два первых центральных момента относительно обеих мер были одинаковы, а

$$c_2 = \kappa(2,\rho^T) - \kappa(2,f),$$
$$c_3 = \kappa(3,\rho^T) - \kappa(3,f),$$
$$c_4 = \kappa(4,\rho^T) - \kappa(4,f) + 3c_3^2,$$

где $\kappa(i,\varphi) = E_\varphi[(X - E_\varphi[X])^i]$ – $i$-й центральный момент распределения, заданного своей плотностью $\varphi$ (в данном случае $\varphi$ равна либо $f$, либо $\rho$).

Итак, выплата страховой компании в терминальный момент времени $t_N = T$ приближается следующим образом (см. [19]):

$$D(t_0,t_N)E^T\left[\max\left(u\sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_T}{S_{t_n}} - g(U),0\right)\right] \approx$$
$$\approx uND(t_0,t_N)\left[e^{\mu_f+\sigma_f^2/2}\Phi(x) - \frac{g(U)}{uN}\Phi(x-\sigma_f) + \frac{c_2}{2!}f\left(\frac{g(U)}{uN}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{c_3}{3!}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{g(U)}{uN}\right) + \frac{c_4}{4!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{g(U)}{uN}\right)\right],$$

где $x = \left(\mu_f + \sigma_f^2 - \ln(g(U)/uN)\right)/\sigma_f$.

Тогда для вычисления приближенного значения справедливой нетто-премии достаточно подставить значения коэффициентов $c_1, c_2$ и $c_3$, которые могут быть получены, например, с помощью итерационного метода, предложенного в [19].

Таким образом, вычисление справедливого значения ежегодной нетто-премии свелось к уже хорошо изученной проблематике хеджирования опционов азиатского типа и развитой технике численных методов по нахождению численных решений функциональных уравнений.

### 3. Гибкие схемы в неполных рынках

Рассмотрим гибкие страховые контракты с гарантией в комбинированной математической модели, построенной на основе обобщенной модели Башелье со стохастической волатильностью. Применим методологию совершенного суперхеджирования в неполных рынках. При этом при поиске максимального хеджа, который является стратегией с потреблением (см. [2, 5]), будет систематически использоваться техника управляемых случайных процессов и уравнение Беллмана.

Обозначим $X = \left(X_t\right)_{0 \le t \le T}$ – процесс дисконтированных цен, заданный на стандартном стохастическом базисе $\left(\Omega, F, F_T = \left(F_t\right)_{0 \le t \le T}, P\right)$. Здесь $\gamma$ называется *стратегией с потреблением*, если ее дисконтированный капитал $U$ изменяется следующим образом:

$$U_t = U_0 + \int_0^t \gamma_u dX_u - D_t \,,$$

где $D$ – неотрицательный процесс суммарного потребления. Рассмотрим произвольную модель неполного финансового рынка. Пусть $T$ – момент погашения опциона, $X = \left(X_t\right)_{0 \le t \le T}$ – процесс дисконтированных цен активов, $g_T$ – дисконтированная выплата по опциону, $M(X,P)$ – непустое семейство мартингальных мер $X$.

Существуют следующие характеризации стратегий с потреблением и структуры минимального хеджа (см. [2], [5]):

*A. Пусть* $U = \left(U_t\right)_{0 \le t \le T}$ *есть неотрицательный согласованный процесс. При этом:*

*1. Процесс U является дисконтированным капиталом самофинансируемой стратегии тогда и только тогда, когда U – локальный мартингал относительно всех* $Q \in M\left(X,P\right)$.

*2. Процесс U является дисконтированным капиталом стратегии с потреблением тогда и только тогда, когда U – супермартингал относительно всех* $Q \in M\left(X,P\right)$.

*B. Множество хеджирующих стратегий для платежного обязательства* $g_T$ *не пусто тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{Q \in M} E^Q g_T < +\infty \,.$$

*В этом случае минимальный хедж существует и его дисконтированный капитал в момент времени t равен*

$$\hat{U}_t = ess \sup_{Q \in M} E^Q \left[ g_T \middle| F_t \right].$$

*При этом количество* $\hat{\gamma}$ *активов X и процесс дисконтированного суммарного потребления* $\hat{D}$ *в оптимальном хедже определяются из опционального разложения:*

$$\hat{U}_t = \hat{U}_0 + \int_0^t \hat{\gamma}_u dX_u - \hat{D}_t \,.$$

Классическая модель Башелье, как известно (см. [5], [8]), задает следующую эволюцию цен акций $S_t$ и банковского счета $B_t \equiv 1$:

$$dS_t = rdt + \sigma dw_t,$$
$$dB_t = 0,$$

где $r, \sigma > 0$.

Определим обобщенную модель Башелье со стохастической волатильностью на стандартном стохастическом базисе $\left(\Omega^1, F^1, F_T^1 = \left(F_t^1\right)_{\{0\le t\le T\}}, P^1\right)$ следующими соотношениями на эволюцию цен рискового $S_t$ и безрискового $B_t$ активов:

$$dS_t = rdt + \Sigma_t(\varepsilon)dw_t,$$
$$dB_t = 0,$$

$B_0 = 1,\ \ \Sigma^2(\varepsilon) = \sigma^2 + (-1)^{\Pi_t}\varepsilon$, причем $\Pi_t$ и $w_t$, соответственно пуассоновский с параметром $\lambda$ и стандартный винеровский процессы, являются независимыми, а соответствующая фильтрация

$$F_t^1 = \sigma\{(S_u, B_u), u \le t\} = \sigma\{S_u, u \le t\}.$$

Заметим, что полученные далее результаты не зависят от значения параметра $\lambda$.

Из мартингальной характеризации минимального хеджа стратегии с потреблением разумно искать его капитал в виде (см. [2, 4, 5]): $\hat{V}_t^\varepsilon = \hat{v}^\varepsilon(S_t, t)$. Количество акций в оптимальном хедже равно $\gamma_t^\varepsilon = \dfrac{\partial \hat{v}^\varepsilon}{\partial x}(S_t, t)$, а $\hat{V}^\varepsilon$ является ценой в следующей задаче оптимального управления $\hat{v}^\varepsilon(x,t) = \sup\limits_{\xi} Eg\left(S_{T-t}^{(\xi)}\right)$, где $S^{(\xi)}$ – управляемый процесс с управляющим процессом $\xi = (\xi_t)_{0\le t\le T}$ со значениями в двухточечном множестве $\{\sigma_{\min}^\varepsilon, \sigma_{\max}^\varepsilon\}$, где $\sigma_{\max}^\varepsilon = \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon}$, $\ \sigma_{\min}^\varepsilon = \sqrt{\sigma^2 - \varepsilon}$.

Из общей теории управляемых диффузионных процессов вытекает (см. [4], [15]), что функция цены $\hat{v}^\varepsilon(x,t)$ принадлежит $C^{2,1}(R, [0,T))$ и среди функций из этого класса, с не более чем полиноминальным ростом, является единственным решением следующего уравнения Беллмана:

$$\frac{\partial \hat{v}^\varepsilon}{\partial t} + L\hat{v}^\varepsilon + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 \hat{v}^\varepsilon}{\partial x^2}\right|\varepsilon = 0, \tag{24}$$
$$\hat{v}^\varepsilon(x,T) = g(x),$$

где дифференциальный оператор $L = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

Вследствие регулярности (невырожденности соответствующей квадратичной формы) оператора $L$ для решения этого нелинейного дифференциального уравнения применим метод возмущений. Представим его решение в виде (см. [1]):

$$v^{\varepsilon}(x,t) = \hat{v}_0(x,t) + \hat{v}_1(x,t) \bullet \varepsilon + \hat{v}_2(x,t) \bullet \varepsilon^2 + \ldots \tag{25}$$

Найдем первое приближение задачи (24). Подставив выражение (25) для $\hat{v}^{\varepsilon}(x,t)$ в уравнение Беллмана (24), получим:

$$\frac{\partial\left(\hat{v}_0(x,t) + \hat{v}_1(x,t) \bullet \varepsilon + \hat{v}_2(x,t) \bullet \varepsilon^2 + \ldots\right)}{\partial t} +$$
$$+ L\left(\hat{v}_0(x,t) + \hat{v}_1(x,t) \bullet \varepsilon + \hat{v}_2(x,t) \bullet \varepsilon^2 + \ldots\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2\left(\hat{v}_0(x,t) + \hat{v}_1(x,t) \bullet \varepsilon + \hat{v}_2(x,t) \bullet \varepsilon^2 + \ldots\right)}{\partial x^2}\right| \varepsilon = 0,$$
$$\hat{v}_0(x,T) + \hat{v}_1(x,T) \bullet \varepsilon + \hat{v}_2(x,T) \bullet \varepsilon^2 + \ldots = g(x).$$

Далее, приравнивая в этих равенствах соответствующие члены при нулевой и первой степенях $\varepsilon$, получим следующие соотношения на $\hat{v}_0(x,t)$ и $\hat{v}_1(x,t)$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \hat{v}_0}{\partial t} + L\hat{v}_0 = 0, \\ \hat{v}_0(x,T) = g(x), \end{gathered} \tag{26}$$

и

$$\begin{gathered} \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial t} + L\hat{v}_1 + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2 \hat{v}_0}{\partial x^2}\right| = 0, \\ \hat{v}_1(x,T) = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Решение вышеуказанных уравнений (26) – (27) дает асимптотическое представление верхней цены $C^*$ платежного обязательства $g(S_T)$ для $\Sigma^2 = \sigma^2 + (-1)^{\Pi_E}\Delta\sigma^2$ с малым параметром $\varepsilon = \Delta\sigma^2$:

$$C^*(S_0, \Delta\sigma^2) = \hat{v}^{\Delta\sigma^2}(S_0, 0) \approx \hat{v}_0(S_0, 0) + \hat{v}_1(S_0, 0) \bullet \Delta\sigma^2.$$

Из общей теории параболических уравнений (см. [1]) вытекает, что

$$\hat{v}_0(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_R g(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\xi. \tag{28}$$

Нахождение $\hat{v}_1(x,t)$ требует дополнительных технических усилий. Обозначая $f(x,t)=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\partial^2\hat{v}_0}{\partial x^2}(x,t)\right|$ и делая замену времени $s=T-t$ в (27), получим следующее уравнение на $\hat{v}_1^*(x,s)=\hat{v}_1(x,T-t)$:

$$\frac{\partial\hat{v}_1^*}{\partial s}=L\hat{v}_1^*+\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2\hat{v}_0}{\partial x^2}\right|,$$

с граничным условием $\hat{v}_1^*(x,0)=0$.

Из общей теории параболических уравнений (см. [1]) находим, что

$$\hat{v}_1^*(x,s)=\int_0^s\int_R\frac{f(\xi,T-\tau)}{\sigma\sqrt{2\pi(s-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(s-\tau)}}d\xi d\tau.$$

Произведя обратную замену времени, получим формулу для $\hat{v}_1(x,t)$:

$$\hat{v}_1^*(x,t)=\int_0^{T-t}\int_R\frac{f(\xi,T-\tau)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}}d\xi d\tau.$$

Далее, для нахождения *f(x,t)* вычислим $\dfrac{\partial\hat{v}_0(x,t)}{\partial t}$ из (28) и воспользуемся тем, что $\hat{v}_0(x,t)$ удовлетворяет уравнению (26). С учетом этого имеем, что

$$f(x,t)=\frac{1}{2}\left|\frac{\partial^2\hat{v}_0}{\partial x^2}(x,t)\right|=\frac{1}{\sigma^2}\left|\frac{\partial\hat{v}_0}{\partial t}(x,t)\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{2\sigma^5(T-t)^2\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_R g(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}}\left[\sigma^2(T-t)-(x-\xi)^2\right]d\xi\right|.$$

Используя это представление *f(x,t)*, приходим к соответствующей формуле для $\hat{v}_1(x,t)$:

$$\hat{v}_1(x,t) = \int_0^{T-t} \int_R \frac{f(\xi, T-\tau)}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^{T-t} \int_R \frac{\frac{1}{\sigma^2}\left|\frac{\partial v_0}{\partial t}(\xi, T-\tau)\right|}{\sigma\sqrt{2\pi\left(T-t-\tau\right)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^{T-t} \int_R \frac{\left|\int_R g(\eta) e^{-\frac{(\eta-\xi)^2}{2\sigma^2\tau}} \left[\sigma^2\tau - (\eta-\xi)^2\right] d\eta\right|}{4\pi\sigma^6\tau^2\sqrt{\tau\left(T-t-\tau\right)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t-\tau)}} d\xi d\tau.$$

Итак, сформулируем уже фактически доказанную теорему о структуре первого приближения верхней цены для произвольного платежного обязательства.

*Теорема 3.1. Первое приближение верхней цены платежного обязательства g(x) в обобщенной модели Башелье со стохастической волатильностью имеет вид:*

$$C^*(x, \Delta\sigma^2) \approx \hat{v}_0(x,0) + \hat{v}_1(x,0) \bullet \Delta\sigma^2, \qquad (30)$$

*где g(x) – произвольная функция с не более чем полиномиальным ростом на бесконечности, а* $\hat{v}_0(x,t)$ *и* $\hat{v}_1(x,t)$ *определены в (28) и (29) соответственно.*

Перейдем к рассмотрению опциона покупателя $g(S_T) = \left(S_T - K\right)^+$ и вычислим для него первое приближение верхней цены. Для этого перепишем $\hat{v}_0$ в виде:

$$\hat{v}_0(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_R (\xi - K)^+ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_K^{+\infty} (\xi - K) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-t)}} d\xi.$$

Произведя замену переменных $y = \frac{x-\xi}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d\xi = \sigma\sqrt{T-t}dy$, находим, что

$$\hat{v}_0(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}}\left(\sigma\sqrt{T-t}\,y+x-K\right)e^{-\frac{y^2}{2}}dy=$$

$$=\frac{x-K}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy+\frac{\sigma\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}}ye^{-\frac{y^2}{2}}dy=$$

$$=(x-K)\,\Phi\,(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T}})+\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

и, следовательно,

$$\hat{v}_0(x,0)=(x-K)\Phi(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T}})+\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \qquad (31)$$

Заметим, что $\hat{v}_0(x,0)=C_B$, где $C_B$ − цена опциона в модели Башелье (см. [5, 8]). Действительно, модель Башелье соответствует случаю $\Delta\sigma^2=0$ и $C_B=C^*(x,0)=\hat{v}_0(x,0)$. Для определения первого приближения верхней цены осталось вычислить $\hat{v}_1(x,0)$. Сначала заметим, что

$$\frac{\partial\hat{v}_0}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(x-K\right)\Phi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)=$$

$$=(x-K)\,\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\frac{x-K}{2\sigma(T-t)\sqrt{T-t}}-$$

$$-\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\left(-\frac{(x-K)^2}{2\sigma^2(T-t)^2}\right)=$$

$$=-\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Далее для вычисления $\hat{v}_1(x,0)$ воспользуемся формулой (29):

$$\hat{v}_1(x,0)=\int_0^T\int_R \frac{\frac{1}{\sigma^2}\left|\frac{\partial v_0}{\partial t}(\xi,T-\tau)\right|}{\sigma\sqrt{2\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)}}d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^T\int_R \frac{\varphi\left(\frac{\xi-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)}{2\sigma^2\sqrt{2\pi\tau(T-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)}}d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^T\int_R \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2(T-\tau)}-\frac{(\xi-K)^2}{2\sigma^2\tau}}d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^T \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}}\int_R e^{-\frac{1}{2\sigma^2\tau(T-\tau)}\left(\left(x^2+\xi^2-2x\xi\right)\tau+\left(\xi^2-2K\xi+K^2\right)(T-\tau)\right)}d\xi d\tau=$$

$$=\int_0^T \frac{1}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}}\int_R e^{-\frac{\left(\xi-\frac{x\tau+K(T-\tau)}{T}\right)^2}{2\sigma^2\frac{\tau(T-\tau)}{T}}+\frac{(x\tau+K(T-\tau))^2-T\left(x^2\tau+K^2(T-\tau)\right)}{2\sigma^2\tau T(T-\tau)}}d\xi d\tau.$$

Поскольку $\int_R e^{\frac{(\xi-b)^2}{2a^2}}d\xi=a\sqrt{2\pi}$ , то

$$\hat{v}_1(x,0)=\int_0^T \frac{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\frac{\tau(T-\tau)}{T}}}{4\pi\sigma^2\sqrt{\tau(T-\tau)}}e^{\frac{(x\tau+K(T-\tau))^2-T\left(x^2\tau+K^2(T-\tau)\right)}{2\sigma^2\tau T(T-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_0^T \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{(x\tau+K(T-\tau))^2-T\left(x^2\tau+K^2(T-\tau)\right)}{2\sigma^2\tau T(T-\tau)}}d\tau= \tag{32}$$

$$=\int_0^T \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{(x-K)^2}{2\sigma^2 T}}d\tau=\frac{\sqrt{T}}{2\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-K)^2}{2\sigma^2 T}}=\frac{\sqrt{T}}{2\sigma}\varphi\left(\frac{x-K}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Подставляя выражения (31) для $\hat{v}_0(x,0)$ и (32) для $\hat{v}_1(x,0)$ в (30), получим справедливость следующей теоремы.

*Теорема 3.2. Первое приближение верхней цены опциона покупателя* $g(S_T)=\left(S_T-K\right)^+$ *в обобщенной модели Башелье со стохастической волатильностью имеет вид*:

$$C^*(S_0,\Delta\sigma^2)\approx(S_0-K)\Phi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Заметим, что первое приближение капитала минимального хеджа описывается следующим образом:

$$\hat{v}^{\Delta\sigma^2}(S_t,t)\approx(S_t-K)\Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\frac{\sqrt{T-t}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

а структура этого хеджа такова:

$$\gamma_t^{\Delta\sigma^2}=\frac{\partial\hat{v}^{\Delta\sigma^2}}{\partial x}(S_t,t)=\Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-$$

$$-\frac{(S_t-K)\Delta\sigma^2}{2\sigma^3\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)=\Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-\frac{(S_t-K)\Delta\sigma^2}{2\sigma^3\sqrt{T-t}}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

Аналогичные рассуждения для нижней цены, $\hat{C}_*=es\sin f\underset{Q\in M}{E^Q}[g(S_T)]$, приводят к ее первому приближению нижней цены:

$$C_*(S_0,\Delta\sigma^2)\approx(S_0-K)\,\Phi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right).$$

Итак, в обобщенной модели Башелье со стохастической волатильностью получены формулы для первого приближения верхней и нижней цены платежного обязательства. Также получены первое приближение минимального хеджа и соответствующая ему стратегия.

Ввиду независимости процессов финансового рынка и процесса смертности определим совместное вероятностное пространство как произведение:

$$\left(\Omega^1\times\Omega^2,F^1\times F^2,F_T=(F_t)_{\{0\le t\le T\}},P^1\times P^2\right),$$

где фильтрация $F=(F_t)_{0\le t\le T}$ совместно порождена процессом эволюции цен и процессом смертности. Считаем, что в нулевой момент времени были застрахованы все $l_x$ человек на страховой срок *T*. Из «финансового» принципа эквивалентности получим справедливость следующей теоремы об аппроксимации верхней и нижней нетто-премий.

*Теорема 3.3. Первое приближение верхней и нижней нетто-премий контракта чистого дожития с функцией выплаты* $g(S_T)=\max(S_T,K)$ *имеет следующий вид*:

$$
{}_T U_x^* = {}_T p_x \left( C^*(S_0, \Delta\sigma^2) + K \right) \approx {}_T p_x \left( K + (S_0 - K)\,\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \right. \tag{33}
$$
$$
\left. + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right)
$$

и

$$
{}_T U_{x^*} = {}_T p_x \left( C_*(S_0, \Delta\sigma^2) + K \right) \approx {}_T p_x \left( K + (S_0 - K)\,\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \right. \tag{34}
$$
$$
\left. + \sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) - \frac{\sqrt{T}\Delta\sigma^2}{2\sigma}\varphi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right).
$$

Естественно разобрать пример вычисления приближения верхней и нижней нетто-премий в рамках обобщенной модели Башелье и сравнить результаты с величиной справедливой нетто-премии в классической модели Башелье. Рассмотрим аналогично [11] контракт чистого дожития с «гарантией» сроком на 15 лет, рассчитанный на 45-летнего мужчину, и функцией выплаты $g(S_T) = \max(S_T, K)$. Заметим, что подобный случай подробно разбирался в рамках модели Блэка–Шоулса финансового рынка в качестве репрезентативного контракта «гибкого» страхования в полных рынках. Как и ранее, будем производить все расчеты для одного человека и считать, что интенсивность смертности удовлетворяет представлению Гомпертса–Макхейма (см. [12, 16]}:

$$
\mu_{x+t} = 0{,}0005 + 0{,}000075858 \bullet 1{,}09144^{x+t}, \ t \ge 0.
$$

Для такого распределения смертности условная вероятность прожить 15 лет 45-летнему человеку равна ${}_{15}p_{45} = 0{,}8796$. Пусть заданы параметры модели Блэка–Шоулса финансового рынка: волатильность процесса цен рискового актива $\sigma = 0{,}25$ (регулярный случай), $\sigma = 0{,}15$ (случай низкой волатильности), $\sigma = 0{,}35$ (случай высокой волатильности) и постоянный банковский процент $r = 0{,}06$. Рассмотрим два принципиально разных случая: $S_0 = K$ и $S_0 = 1$.

Определим следующий *коэффициент флуктуаций волатильности* $\delta = \dfrac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}$. Естественно рассматривать $\delta$ как своеобразную меру неполноты финансового рынка. Со стремлением $\delta \to 0$ финансовый рынок преобразуется в полный. Поэтому интересно рассмотреть зависимость верхней и нижней нетто-премий от коэффициента флуктуаций волатильности, что и будет реализовано далее сначала в формульном виде, а затем и на численных примерах.

В первом случае ( $S_0 = K$ ) формулы верхней (33) и нижней (34) нетто-премий преобразуются к следующему виду:

$$(35)\qquad {}_TU_x^* \approx {}_Tp_x\left(K+\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\right)={}_Tp_x\left(K+\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\delta\right)$$

и

$$(36)\qquad {}_TU_{x^*} \approx {}_Tp_x\left(K+\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\frac{\Delta\sigma^2}{\sigma^2}\right)={}_Tp_x\left(K+\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\delta\right).$$

Непосредственно вычисляя справедливую нетто-премию в комбинированной модели, где в качестве финансовой компоненты взята классическая модель Башелье (а не обобщенная модель Башелье, как это рассматривалось выше), получим, что

$$(37)\qquad {}_TU_x = {}_Tp_x\left(K+\sigma\sqrt{\frac{T}{2\pi}}\right).$$

В «пределе» $\delta = 0$ (случай классической модели Башелье) имеем ${}_TU_x^* = {}_TU_{x^*} = {}_TU_x$, т.е. классическая модель Башелье прекрасно согласуется с развитой в данной работе теорией обобщенной модели Башелье. Приведем примеры численных размеров верхней (35) и нижней (36) нетто-премий для указанных выше параметров рынка для случаев регулярной, низкой и высокой волатильности в предположении $S_0 = K$.

Случай регулярной волатильности ($\sigma = 0{,}25$)представлен в табл. 4.

**Таблица 4.**

| $\delta$ | К | ${}_TU_x^*$ | ${}_TU_{x^*}$ | ${}_TU_x(\delta=0)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 0,3415 | 0,3381 | 0,3398 |
| 0,01 | 1 | 1,2211 | 1,2177 | 1,2194 |
| 0,01 | 2 | 2,1007 | 2,0973 | 2,0990 |
| 0,02 | 0 | 0,3432 | 0,3364 | 0,3398 |
| 0,02 | 1 | 1,2228 | 1,2160 | 1,2194 |
| 0,02 | 2 | 2,1024 | 2,0956 | 2,0990 |

Случай низкой волатильности ($\sigma = 0{,}15$) представлен в табл. 5.

**Таблица 5.**

| $\delta$ | К | ${}_TU_x^*$ | ${}_TU_{x^*}$ | ${}_TU_x(\delta=0)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 0,2049 | 0,2028 | 0,2039 |
| 0,01 | 1 | 1,0845 | 1,0824 | 1,0835 |
| 0,01 | 2 | 1,9641 | 1,9620 | 1,9631 |
| 0,02 | 0 | 0,2059 | 0,2018 | 0,2039 |
| 0,02 | 1 | 1,0855 | 1,0814 | 1,0835 |
| 0,02 | 2 | 1,9651 | 1,9610 | 1,9631 |

Случай высокой волатильности ($\sigma = 0{,}35$) представлен в табл. 6.

**Таблица 6.**

| $\delta$ | $K$ | ${}_T U_x^*$ | ${}_T U_{x^*}$ | ${}_T U_x(\delta = 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 0,4781 | 0,4733 | 0,4757 |
| 0,01 | 1 | 1,3577 | 1,3529 | 1,3553 |
| 0,01 | 2 | 2,2373 | 2,2325 | 2,2349 |
| 0,02 | 0 | 0,4804 | 0,4709 | 0,4757 |
| 0,02 | 1 | 1,3600 | 1,3505 | 1,3553 |
| 0,02 | 2 | 2,2396 | 2,2301 | 2,2349 |

Обратим внимание на характер зависимости нетто-премий от волатильности $\sigma$ и коэффициента флуктуации волатильности $\delta$. Несложно заметить, что в вышеуказанных примерах видна тенденция роста нетто-премий с ростом волатильности. Таким образом, $\sigma$ задает положение середины отрезка справедливых цен, которая смещается вверх с ростом $\sigma$. В свою очередь $\delta$ в среднем не влияет на величину нетто-премий (оставляет на месте середину отрезка справедливых цен). Коэффициент флуктуации волатильности отвечает за размер отрезка справедливых цен, поскольку ему пропорциональна та «поправка», которую нужно добавить (отнять) к справедливой нетто-премии классической модели Башелье ${}_T U_x$, чтобы получить верхнюю (нижнюю) нетто-премию.

Рассмотрим пример вычислений верхней и нижней нетто-премий во втором частном случае ($S_0$ постоянно, *K* варьируется) с теми же параметрами модели, что и в предыдущих примерах. Воспользуемся формулами для верхней (33) и нижней (34) нетто-премий. Без ограничения общности в последующих примерах можно положить $S_0 = 1$, а *K* рассматривать равным 0 или 2 (заметим, *K=1* соответствует случаю $S_0 = K = 1$, который уже был разобран в предыдущем примере). Безусловно, такой выбор значений *K* достаточно репрезентативен ввиду того, что $S_0 = 1$ лежит между этими двумя числами. Как и в предыдущем примере, естественно рассматривать случай регулярной волатильности ($\sigma = 0{,}25$), низкой волатильности ($\sigma = 0{,}15$) и высокой волатильности ($\sigma = 0{,}35$).

Случай регулярной волатильности ($\sigma = 0{,}25$) представлен в табл. 7.

**Таблица 7.**

| $\delta$ | $K$ | ${}_T U_x^*$ | ${}_T U_{x^*}$ | ${}_T U_x(\delta = 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 0,9502 | 0,9422 | 0,9462 |
| 0,01 | 2 | 1,8298 | 1,8218 | 1,8258 |
| 0,02 | 0 | 0,9542 | 0,9383 | 0,9462 |
| 0,02 | 2 | 1,8338 | 1,8179 | 1,8258 |

Случай низкой волатильности ( $\sigma = 0{,}15$ ) представлен в табл. 8.

**Таблица 8.**

| $\delta$ | $K$ | ${}_T U_x^*$ | ${}_T U_{x^*}$ | ${}_T U_x(\delta = 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 0,8900 | 0,8869 | 0,8885 |
| 0,01 | 2 | 1,7696 | 1,7665 | 1,7681 |
| 0,02 | 0 | 0,8916 | 0,8854 | 0,8885 |
| 0,02 | 2 | 1,7712 | 1,7650 | 1,7681 |

Случай высокой волатильности ( $\sigma = 0{,}35$ ) представлен в табл. 9.

**Таблица 9.**

| $\delta$ | $K$ | ${}_T U_x^*$ | ${}_T U_{x^*}$ | ${}_T U_x(\delta = 0)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,01 | 0 | 1,0445 | 1,0342 | 1,0393 |
| 0,01 | 2 | 1,9241 | 1,9138 | 1,9189 |
| 0,02 | 0 | 1,0497 | 1,0290 | 1,0393 |
| 0,02 | 2 | 1,2993 | 1,9086 | 1,9189 |

Приведенные данные показывают, что в случае высокой флуктуации волатильности обобщенная модель Башелье намного адекватнее отражает реальный финансовый рынок.

Таким образом, в обобщенной модели Башелье получены интегральные представления первых приближений верхней и нижней нетто-премий для достаточно большого класса функций выплат. Для классического случая функции выплаты $g(S_T) = \max(S_T, K)$ получены явные формулы первых приближений верхней и нижней нетто-премий. Подробно разобраны некоторые частные случаи, приведены примеры расчетов верхней и нижней нетто-премий, численные результаты.

* *
*

## *СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ*

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

2. *Волков С.Н.*, *Крамков Д.О.* О методологии хеджирования опционов // Серия «Финансовая и страховая математика». Обозрение прикладной и промышленной математики. 1997. Т. 4. Выпуск 1.

3. *Завриев С.К.*, *Калихман А.И.* Долгосрочное страхование жизни и пенсионное страхование в высокорисковой экономической среде. М.: Актуарно-финансовый центр, 1999. – 150 с.

4. *Крылов Н.В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М.: Наука, 1977.

5. *Мельников А.В.*, *Волков С.Н.*, *Нечаев М.Л.* Математика финансовых обязательств М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 253 с.

6. *Мельников А.В.* О единстве количественных методов расчетов в финансах и страховании. М.: Актуарно-финансовый центр, 2000. Препринт 5. – 26 с.

7. *Мельников А.В.* Риск-менеджмент: стохастический анализ рисков в экономике финансов и страхования. М.: АНКИЛ, 2001. – 112 с.

8. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. Т. 1–2.

9. *Aase P.* Pricing of unit-linked insurance policies // Scand, Actuarial Journal. V. 1. P. 26–52.

10. *Bacinello A.R., Ortu F.* Pricing equity-linked life insurance with endogenous minimum guarantees // Insurance: Mathematics and Economics. 1992. V. 12. P. 245–257.

11. *Boyle P.*, *Hardy M.* Reserving for maturity guarantees: Two approaches // Insurance: Mathematics and Economics. 1997. V. 21. P. 113–127.

12. *Bowers N.L.*, *Gerber H.U.*, *Hickman J.C.*, *Jones D.A.*, *Nesbitt C.J.* Actuarial mathematics. Itasca, Illinois: The Society of Actuaries. – 624 p.

13. *Follmer H.*, *Sondermann D.* Hedging of non-redundant contingent claims // Contributions to Mathematical Economics / eds. W. Hildenbrand and A. Mas-Colell. North-Holland, Amsterdam, 1986. P. 205–223.

14. *Hardy M.* Maturity guarantees for segregated fund contracts; hedging and Reserving. University of Waterloo. 1998. Preprint. – 24 p.

15. *Mikulevicius R.*, *Pragarauskas H.* On classical solutions of Stochastic processes and optimal control / eds. H.J. Engelbert, I. Karatzas, M. Rockner London: Gordon & Breach, 1991. P. 151–163.

16. *Moller T.* Risk-minimizing hedging strategies for unit-linked life insurance contracts // Astin Bulletin. 1998. V. 28. P. 17–47.

17. *Moller T.* Hedging equity-linked life insurance contracts // North American Actuarial Journal. 2001. V. 5. № 2. P. 79–95.

18. *Nielsen J.A.* Equity-linked life insurance contracts in an economy with a stochastic development of the term structure of interest rates. Aarhus University, 1994. Preprint. – 15 p.

19. *Nielsen J.A.*, *Sandman K.* Equity-linked life insurance: A model with stochastic interest rates // Insurance: Mathematics and Economics. 1995. V. 16. P. 225–253.

20. *Rolski T.*, *Schmidli H.*, *Schmidt V.*, *Teugels J.* Stochastic processes for insurance and finance. Chichester: Wiley, 1998.

21. Turnbull S.M., Wakeman L.M. Quick algorithm for pricing European average options // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1991. P. 77–389.

22. Wilkie A.D. A stochastic investment model for actuarial use // Transactions of the Faculty of Actuaries. V. 39. P. 341–381.

23. Wilkie A.D. More on a stochastic asset model for actuarial use // Brithish Actuarial Journal. 1985. V. 1. P. 777–964.