

## ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

### Оптимальная стабилизация государственного долга

Смирнов А.Д.

В статье рассматривается модель стохастической динамики государственного долга и сеньоража для сильно асимметричного финансового рынка переходной экономики. Макроэкономическая политика стабилизации долга рассматривается как опцион, реализация которого происходит в точке рефлексивного барьера. При его достижении величина эмиссии реальных денег обеспечивает оптимальное значение ожидаемой приведенной стоимости долга. Для рефлексивного барьера рынок долгов сбалансирован, причем оптимальная цена опциона положительна и максимальна для правительства, и равна нулю для частных инвесторов, которые полностью оплачивают политику стабилизации государственного долга.

В экономике России переходного периода активно осуществляемая борьба с инфляцией привела к двум важнейшим последствиям: углублению спада производства, росту безработицы и неплатежей наряду со стремительным увеличением государственного внутреннего долга. Совершенно ясно, что природа спада в России носит трансформационный характер. Его возникновение, глубина и длительность объясняются глубокими качественными преобразованиями технологической и социально-экономической структуры общества. Вместе с тем, нельзя отрицать масштабов влияния на падение производства, рост безработицы и неплатежей степени адекватности макроэкономической политики.

В отношении формирования государственного долга, как представляется, переходная экономика повела себя в рамках бюджетного ограничения вполне каноническим образом: уменьшение удельного веса одного из двух основных источников финансирования дефицита из-за относительного замедления эмиссии денег привело к усилению роли второго - ускоренному росту размещения правительственных долговых обязательств.

Действительно, на протяжении 1994 - 1997 гг. динамика инфляции в экономике России значительно замедлилась: если дефлятор ВВП за 1994 г. составил 307 процентов, то в 1996 г. - 46, а в 1997 г. - лишь 17 процентов. Одновременно с этим резко выросли размеры государственного внутреннего долга, которые составили 6,8 трлн. рублей в конце 1992 г., 45,0 - в 1993 г., 115,4 - в 1994 г., 235,0 - в 1995 г. и 448,8 трлн. рублей - в конце 1997 г. [ 1 , Табл. 4 и П6 ]. Не обсуждая здесь вопрос об обоснованности столь резкого сокращения инфляции, тем не ме-

---

**Смирнов А.Д.** - профессор, доктор экономических наук, действительный член Российской академии естественных наук; Высшая школа экономики (государственный университет).

нее вполне уместно озаботиться перспективами и возможностями выплаты гигантского внутреннего долга, особенно учитывая его крайне неблагоприятную временную структуру (*the term structure*)<sup>1</sup>. Даже если полагать, что проблема общей платежеспособности (*solvency*) российского государства еще неактуальна, тем не менее обслуживание государственного долга - всевозрастающая нагрузка на бюджет и становится все более значимой статьёй государственных расходов. Постоянный значительный бюджетный дефицит, финансируемый за счет выпуска финансовых инструментов с высокими ставками доходности, ведет к быстрому нарастанию задолженности. Доля обслуживания долга (включая начисленные проценты по казначейским векселям с нулевым купоном) возросла с 1,8 процента ВВП в 1994 г. до 5,8 процента в 1996 г., что привело к существенному росту дефицита, несмотря на то что первичное сальдо почти не изменилось [ 1, стр. 313 ].

В свете сказанного динамика государственного долга, механизмы его обслуживания и реструктуризации, альтернативные источники финансирования - все эти вопросы заслуживают самого пристального внимания. То, что государство берет в долг - естественно, разумно и оправдано; в частности, его способность размещать новые долги на свободном рынке - показатель доверия к нему как резидентов, так и нерезидентов. Проблемы начинаются, когда рост долга становится неуправляемым, а перспективы его выплаты все более туманными.

Обслуживание государственного долга в реальном выражении обычно связывают с возможностями и перспективами экономического роста. Для нормальной растущей экономики такой подход представляется естественным и вполне обоснованным: в долгосрочной перспективе изолированной проблемы государственного долга, пожалуй что, не существует. Однако переходная экономика, и Россия в этом отношении не исключение, в течение более или менее длительных периодов демонстрирует значительный спад, который исключает возможность нахождения немонетарных источников финансирования долга. Для переходной экономики, следовательно, в кратко- и среднесрочном периодах монетарные факторы играют основную роль, что, в частности, оправдывает использование чисто финансовых моделей динамики государственного долга<sup>2</sup>.

Логическое развитие данной точки зрения закономерно ставит вопрос о надлежащих пропорциях в сочетании фискальных и монетарных инструментов. А раз так, то интересны ответы на следующие, например, вопросы: как долго может продолжаться политика заимствования государством средств на свободном рынке при нарастающих проблемах с обслуживанием долга? Существуют ли предельные размеры государственного долга? Можно ли финансировать дефицит бюджета лишь новыми заимствованиями на свободном рынке? Возможно ли, и при каких условиях, стабилизировать размеры государственного долга, т.е. остановить его рост?

---

<sup>1</sup>) Имеющиеся данные об экономике России вызывают сомнение в неинфляционном характере роста долга: отношение темпа роста денежной массы М2 к росту дефлятора ВВП сменилось с 0,65 в 1994 г. до 1,76 в 1997 г., что в отсутствие сколь-нибудь заметного роста производства является сигналом ускорения инфляции. /Посчитано по данным ОЭСР [ 1 ]/.

<sup>2</sup>) Доходы от распродажи государственного имущества (приватизации в частности) могут в краткосрочном периоде иметь существенное значение для финансирования дефицита бюджета и обслуживания долга, но только в краткосрочном периоде, даже для такого государства как Россия.

Поставленные выше вопросы, разумеется, не новы, - для широкого класса ситуаций макроэкономическая теория дает на них убедительные ответы. Они будут использованы для анализа специфических условий переходной экономики, которые отображены в модели через сильную асимметрию финансового рынка и высокую степень неопределенности. Думается, что в свете развития российской экономики за последние годы, поиск ответов на поставленные выше вопросы имеет не только теоретическое, но и конкретное практическое значение, ибо позволяет сопоставить относительные выгоды и потери развития экономики в различных режимах: инфляции и долга, с одной стороны, а с другой - спада, безработицы и неплатежей.

### Общее соотношение долга и сеньоража

В принципе дилеммы между фискальными и монетарными инструментами не существует - они практически всегда используются в определенных сочетаниях, однако акценты могут быть разными. В рамках проблемы так называемых «номинальных якорей» (*nominal anchors problem*) различаются (преимущественно) фискальная политика, например, при постоянной величине реальных денежных балансов, или (преимущественно) монетарная политика, например, при постоянной величине реального государственного долга. Современная макроэкономическая теория после работ Т. Сарджента и Н. Уоллеса [ 2 ] вообще полагает, что инфляция порождается как эмиссией денег, так и долговых обязательств, причем в долгосрочном плане эмиссия долговых обязательств может иметь даже более значительные инфляционные последствия (решения соответствующих дифференциальных уравнений неустойчивы), хотя и разнесенные как бы во времени. Поэтому, как не парадоксально звучит, экономика, обремененная долгами, не может не быть инфляционной, пусть даже квазиинфляционной в переходный период. Точнее, она может быть неинфляционной лишь в краткосрочном периоде, а в долгосрочном периоде неизбежные потери от инфляции должны сопоставляться с альтернативными потерями, вызываемыми спадом производства, безработицей и неплатежами.

Данная точка зрения может быть обоснована и в другом аспекте. Государственный долг, реализованный на свободном рынке - это частное богатство, и короткая позиция казначейства на первичном рынке государственных ценных бумаг может быть сопряжена с длинной позицией частных инвесторов лишь через адекватную доходность размещаемых активов. Но источниками выплат купонного дохода и роста капитальной стоимости, отвлекаясь от внешних источников финансирования, что впрочем непринципиально в данном контексте, могут быть только налоги и эмиссия денег. Последние, конечно же, используются в разных сочетаниях, но это не исключает возможности возникновения инфляционных ситуаций в случае достаточно значительного роста долговых обязательств государства.

В литературе обычно подчеркивается лишь как бы деструктивная роль сеньоража, или эмиссии денег в реальном выражении, увеличение которого порождает рост инфляции. Признавая значимость денег как основного фактора инфляции в долгосрочном периоде, необходимо иметь в виду и роль денежной эмиссии как фактора стабилизации государственного долга. Это совершенно очевидно при арбитражной трактовке основного уравнения динамики государствен-

ного долга: сеньораж является основным источником выплаты купонного дохода владельцев облигаций.

В ситуации, когда правительство или центральный банк поддерживают фиксированную безрисковую доходность активов (государственных облигаций), т.е. проводят вариант *pegging interest rate policy*, увеличение купонной доходности сопровождается замедлением роста капитальной стоимости активов, и наоборот. В предельном случае *стабилизации, т.е. прекращения роста приведенной стоимости долга* (стационарной точке уравнения динамики долга), преимущества достижения этого состояния, например, гарантированная платежеспособность государства, должны быть сопоставлены с альтернативными издержками, вызываемыми спадом, безработицей и неплатежами.

Теоретически правительство всегда имеет *возможность*, или *опцион*, проводить макроэкономическую политику стабилизации государственного долга. Такой опцион формально можно рассматривать по аналогии с европейским колл-опционом (*European call option*). Иными словами, макроэкономическая политика стабилизации государственного долга предстает формально как своего рода «*стабилизационный контракт*», предлагаемый правительством к продаже частным инвесторам<sup>3)</sup> по некоторой фиксированной цене (уровню допустимых издержек) на рынке государственных ценных бумаг.

Как и любой опцион, «стабилизационный контракт» целесообразно реализовать в оптимальных условиях, оценив, например, предельно допустимые издержки спада, безработицы и неплатежей, которые общество согласно иметь в случае прекращения эмиссии сеньоража и государственных ценных бумаг. Даже если подобные альтернативные издержки постоянны, то текущая величина долга – приведенная ожидаемая стоимость будущего потока купонных выплат – величина переменная, зависящая от размеров сеньоража, который подвержен воздействию огромного количества различных факторов случайной природы. В решении такой задачи требуется поэтому иметь в виду фактор неопределенности, влияющий как на выплаты, так и на получение купонного дохода. В условиях неопределенности затруднительно найти момент времени, для которого приведенная ожидаемая стоимость долга оптимальна, но при некоторых естественных допущениях относительно стохастического характера сеньоража вполне возможно вычислить значение купонного дохода, которое максимизирует приведенную ожидаемую стоимость долга.

В нашем анализе проблемы стабилизации государственного долга будет использована достаточно естественная аналогия между выбором различных макроэкономических курсов и политикой инвестиций в условиях неопределенности. Действительно, рассмотрим две макроэкономические политики: роста долга и сеньоража, с одной стороны, и альтернативную политику спада, безработицы и неплатежей. Во втором случае издержки очевидны, и их можно вычислить, например, как разрыв (*gap*) между экономическим потенциалом и фактическим объемом производства: величину  $(Q - Q^*)$ , индексированную временем. Но, если такие издержки известны, то выгоды от привлечения средств правительством на свободном рынке и вызванные этим инфляционные издержки, должны быть

---

<sup>3)</sup> Существует прямая аналогия, причем содержательная и формальная, между данным подходом и моделями «инфляционных контрактов», развиваемых в работах С. Велша [ 3 ], Б.Локвуда [ 4 ], Л. Свенссона [ 5].

сопоставлены с альтернативными издержками от спада, безработицы и неплатежей.

Смене политического курса, с поощрительного (инфляционного) на ограничительный (стабилизация роста долга), соответствуют альтернативные издержки спада, которые носят невозвратный характер (*irreversible or sunk costs*). Вместе с тем, политика стабилизации, как правило, не фиксирована во времени, а значит величина долга, точнее ожидаемая приведенная стоимость долга для правительства, должна быть скорректирована на величину стоимости политики стабилизации для частных инвесторов, действующих на свободном рынке. Таким образом, здесь видна прямая аналогия с принципами инвестирования в условиях неопределенности: совокупная стоимость затрат (издержки спада) и опциона (стабилизация) сопоставляются с результатами политики увеличения долга (издержками инфляции). Менять политический курс оптимально, когда результаты равны альтернативным издержкам, следовательно, величина ожидаемой приведенной стоимости долга максимальна. Формально такая задача является задачей динамического программирования для так называемой «оптимальной остановки» (*optimal stopping problem*), которая имеет аналитическое решение для стохастических процессов Ито [ 6 ].

### Уравнение динамики общественного долга

Рынок государственных ценных бумаг в условиях переходной экономики существенно отличается от соответствующего сегмента финансового рынка в странах свободной конкуренции. Конечно, и в том, и в другом случаях государство - монопольный эмитент своих долгов, но институционально его способность осуществлять свое право монополиста в условиях развитого финансового рынка существенно ограничена несколькими факторами. Во-первых, доля государственного сегмента на рынке долгов, хотя и существенна, но вполне сопоставима с долей частных долгов. Поэтому, факторы доходности формируются совместно, и отличия в доходности частных долгов и государственных определяются различиями в налогообложении и рыночной стоимости риска. Во-вторых, емкость рынка акций примерно равна емкости рынка совокупных долгов, и государство не может прямо воздействовать на формирование доходности акций. И в третьих, практически невозможно изолировать внешнюю компоненту долгов, так как на дерегулированном финансовом рынке резиденты и нерезиденты действуют практически в равных, по крайней мере формально, условиях. В результате государство - пусть и самый крупный, но все же один из многих продавцов ценных бумаг, и потому вынуждено конкурировать с другими продавцами долговых обязательств, акций, кредитов и залладных (*mortgages*), хотя и обладает рядом мощных рычагов повышения привлекательности своих ценных бумаг, недоступных частным эмитентам.

*Резкая асимметрия финансового рынка в переходный период* выражается в практически полном отсутствии рынка частных долгов и залладных, слабо развитых рынках кредитов и акций, а также в существенных ограничениях на деятельность нерезидентов<sup>4</sup>). Доминирование сегмента государственных ценных бумаг имеет своим следствием ярко выраженный рынок продавца, в роли которого

---

<sup>4</sup>) Если рынок залладных практически отсутствует, то рынок кредитов существует, правда, только как рынок краткосрочных инструментов.

правительство диктует цену и/или доходность облигаций, определяя не только предложение, но и во многом воздействуя на формирование спроса на долги. Отмеченные особенности финансового рынка в переходный период лежат в основе модели поведения правительства и частных инвесторов на рынке государственных долгов, развиваемой ниже.

Начнем исследование поставленной проблемы с анализа детерминированной ситуации финансирования государственного долга и бюджетного дефицита. Для простоты будем рассматривать двухкомпонентный финансовый рынок, не различая внутренний и внешний долг, хотя, конечно, формирование и обслуживание этих видов государственной задолженности существенно отличны. Не рассматривается также и существование частного долга, что в свете вышесказанного для российской экономики представляется вполне уместным допущением, учитывая доминирующую роль на финансовом рынке сегмента государственных долговых обязательств. Объем государственного долга будем рассматривать как облигации, гарантирующие получение безрискового дохода в течение бесконечного периода времени (*perpetuity*). Наконец, спрос на долги определим лишь в зависимости от их доходности, игнорируя их использование как субституты денег.

В номинальных терминах стандартное уравнение<sup>5)</sup> роста (внутреннего) общественного долга, или частного богатства, где все переменные полагаются непрерывными и дифференцируемыми функциями времени, имеет следующий вид:

$$(1) \quad \dot{M} + \dot{B} = P(G - T) + RB,$$

где  $\dot{M} \equiv \frac{d}{dt} M(t)$  - размер сеньоража или эмиссии денег в номинальном выражении;

$\dot{B} \equiv \frac{d}{dt} B(t)$  - размер дополнительного размещения на свободном рынке государственных долговых обязательств;

$P(G - T)$  - дефицит государственного бюджета в номинальном выражении;

$G$  - бюджетные расходы в реальном выражении;

$T$  - реальные налоги, несмещающие размеры выпуска;

$RB$  - размер обслуживания государственного долга по ставке номинального процента  $R > 0$ .

Если ввести переменные для реальных значений денежных балансов  $m = M/P$  и реальной стоимости долга  $b = B/P$ , также полагая их дифференцируемыми функциями времени, то уравнение (1) можно переписать в реальных терминах как

$$(2) \quad \dot{b} = rb - S + (G - T),$$

где  $S = \dot{M}/P$  - размер реального сеньоража;

---

<sup>5)</sup> Потребности в финансировании текущего бюджетного дефицита и в обслуживании текущего долга могут обеспечиваться в краткосрочном периоде и продажами государственного имущества, которые мы не рассматриваем, учитывая их ограниченный характер.

$r = R - \pi$  - реальная безрисковая ставка процента по государственным долговым обязательствам;

$\pi \equiv \dot{P} / P$  - темп фактической инфляции.

Удобство анализа уравнения (1) или (2) состоит в возможности промоделировать поведение и процесс принятия решений как государством, так и частными инвесторами. С одной стороны, государство предстает как монопольный «производитель», или эмитент, долговых обязательств - денег (долгов с отрицательной нормой реальной доходности равной темпу инфляции) и облигаций (долгов в собственном смысле, с положительной нормой реальной доходности)<sup>6</sup>. С другой стороны, совокупность большого количества частных инвесторов конкурируют на финансовом рынке, формируя спрос на государственный долг через требования к общей доходности активов и сопоставляя купонную доходность и рост (снижение) капитальной стоимости активов.

Частные инвесторы формируют свои портфели из реальных денежных балансов и неденежных активов, в данном случае государственных облигаций, однако простой портфельный подход к данной ситуации неприменим, так как абсолютно нерационально приобретать активы с отрицательной доходностью. В общем случае, следовательно, необходимо объяснить потребность в «ликвидности», например посредством включения переменной денег в функцию полезности типичных инвесторов, как например в модели Сидрауцкого, изложенной в [ 7 ]. Соответствующие подходы достаточно хорошо разработаны в современной литературе, однако их использование потребовало бы значительно более общего анализа макроэкономических рынков. Между тем и непосредственное рассмотрение уравнения (2) раскрывает взаимозависимость фискальной и монетарной политик, что позволяет в рамках поставленной задачи выдвинуть несколько гипотез формирования богатства или финансирования бюджета.

### Общие условия стабилизации государственного долга

Например, если монетарные инструменты не используются,  $S = 0$ , то стабилизация государственного долга может быть обеспечена лишь при выполнении условия последовательной бюджетной политики (*sustainable government fiscal policy*):

$$b(t) + \int_t^{\infty} G(\tau) \exp[-r(\tau - t)] d\tau = \int_t^{\infty} T(\tau) \exp[-r(\tau - t)] d\tau,$$

которое предполагает выплату долгов и финансирование текущих правительственных расходов лишь за счет увеличения налогов. Теоретические аспекты этой проблемы, в частности как проявления *Рикардианской эквивалентности* текущих долгов и будущих налогов, детально исследованы С.Турновским [ 7 ]. Для условий неопределенности в рамках данной гипотезы Дж. Бертола и А.Дразен [ 8 ] построили интереснейшую модель фискальной политики, допускающей в некото-

<sup>6</sup>) Хотя фактически в отдельные периоды реальная доходность может быть отрицательной, эти ситуации здесь не рассматриваются. В любом случае реальная норма доходности облигаций будет выше инфляции.

рых точках (*trigger points*) резкие сокращения правительственных расходов.

Обратим однако внимание на то, что *допущение о нулевом сеньораже требует финансирования операционного дефицита, т.е. суммы текущего дефицита и обслуживания долга, целиком за счет размещения новых долгов на свободном рынке*. Такая ситуация правдоподобна лишь при высокой кредитоспособности правительства, небольших размерах долгов и доли дефицита в ВВП страны<sup>7)</sup>. В более общих ситуациях, как нам кажется, государство не пренебрегает монетарными инструментами в регулировании своих расходов, по крайней мере, в части обслуживания накопленного долга. В переходный период государство попросту и не может этого сделать в силу как значительных масштабов финансирования дефицита, так и неразвитости финансового рынка и ограниченного доверия к своей политике.

Совместное использование эмиссии денег и долгов как источников финансирования дефицита приводит к двум важнейшим последствиям: *сеньораж становится, во-первых, основным источником формирования купонных выплат частным инвесторам и, во-вторых, средством регулирования величины долговых обязательств*. Последняя функция сеньоража вытекает из того, что при фиксированной ставке общей доходности облигаций большая купонная доходность означает меньшую величину роста капитальной стоимости активов, и наоборот.

Положим для определенности величину текущего бюджетного дефицита в реальном выражении положительной функцией времени. Если сеньораж не превышает размеры текущего дефицита бюджета, т.е. имеет место неравенство

$$S_N \equiv S - (G - T) \leq 0,$$

то, как показывает решение уравнения (2), государственный долг растёт неограниченно. Такая ситуация объясняется тем, что государство размещает на свободном рынке дополнительные долги в размерах, равных или больших, чем весь объём необходимых выплат по долгу в данный момент времени, иными словами, существующие долги как бы «обеспечиваются» будущими долгами. В этом случае государство ведёт так называемую игру Понци<sup>8)</sup> (*Ponzi-game condition*), иррациональность которой отражается в неустойчивости решения уравнения

$$\dot{b} = rb - S_N,$$

для  $b(0) = b_0, r > 0, S_N < 0$ .

Рассматривая это же уравнение с позиции частного инвестора, можно заключить, что игры Понци возможны, если инвестор согласен покупать активы

<sup>7)</sup> В уже упоминавшейся работе Бертолы и Дразена [ 8 ] рассматриваются экономики таких стран, как Дания, Ирландия и т.д., где удельный вес правительственных расходов в ВВП сравнительно невелик.

<sup>8)</sup> Ч.Понци - американский делец, который в 20-х годах собрал под обещания сверхвысоких доходов с одуряченных людей свыше 15 млн. долларов, раскручивая финансовую аферу, которая в 90-е годы в России стала известна как «пирамида». Некоторые отличия между Америкой и Россией все же существуют: Понци был довольно быстро судим и упрятан за решетку, где отсидел несколько лет, а его российский последователь Мавроди - избран депутатом Госдумы.



(долги правительства), либо ожидая лишь роста их капитальной стоимости, либо соглашаясь иметь текущие убытки (отрицательный купонный доход). И первое, и второе утверждение плохо согласуются с действительностью, а поэтому ситуации, порождающие игры Понци, необходимо исключить. Иными словами, уравнение (2) должно иметь устойчивое решение.

### Устойчивое решение уравнения долга

Получить устойчивое решение уравнения (2) при положительном значении нормы реальной доходности облигаций,  $r > 0$ , можно, только если размеры сеньоража превышают реальный дефицит бюджета, т.е.

$$(3) \quad S_N \equiv S - (G - T) > 0.$$

Когда сеньораж больше реального текущего дефицита, то объем размещения дополнительных долговых обязательств ниже, чем обслуживание текущего долга. В этом случае общие размеры долговых обязательств могут регулироваться. При известном потоке будущего «чистого» сеньоража,  $S_N = S_N(t)$ , решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$(4) \quad \dot{b} = rb - S_N$$

существует в виде:

$$(5) \quad b(t) = \int_t^{\infty} S_N(\tau) \exp(-r(\tau-t)) d\tau.$$

Решение (5) имеет четкую экономическую интерпретацию приведенной, или дисконтированной по доходности  $r > 0$ , текущей стоимости долга, что делает чрезвычайно удобным его использование в экономических расчетах и моделировании. Такое решение можно найти, подбирая методом Сарджента-Уоллеса соответствующую константу интегрирования. Нахождение решения состоит из двух этапов. Сначала методом вариации произвольной постоянной находим общее решение неоднородного уравнения (4), дифференцируя  $b(t) = c(t) \exp(rt)$ , что дает

$$b(t) = [A - \int_0^t S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau] \exp(rt),$$

где  $A$  - произвольная константа интегрирования. Она подбирается из условия:

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau = \int_0^{\infty} S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau.$$

Выполнение этого условия обеспечивает существование конечного решения (5) для уравнения (2), поскольку гарантирует сходимость несобственного интеграла  $\int_t^{\infty} S_N(\tau) \exp(-r(\tau-t)) d\tau$ . Итак, несмотря на положительность параметра до-

ходности величина приведенной текущей стоимости долга конечна, а значит, может использоваться для принятия экономических решений на перспективу.

Отметим, что уравнение (4) не что иное как *условие арбитража*

$$rb = \dot{b} + S_N,$$

которое, рассматриваемое с позиции государства, утверждает, что потребность в обслуживании текущего долга определяет размеры сеньоража и дополнительного размещения долгов на свободном рынке. Закрепление нормы доходности либо рынком, либо политикой *pegging interest rate* ограничивает привлекательность новых облигаций, следовательно, возможности государства размещать дополнительные долги. В таком случае характер адаптации спроса и предложения долгов определяется тем, что норма купонной доходности  $\delta > 0$  заключена в пределах

$$0 < \delta \leq r,$$

где нулевая купонная доходность исключена по соображениям недопустимости игр Понци, а случай  $r = \delta$  соответствует стационарной точке для (4).

Понятно, что государство как эмитент, причем монопольный, своих долговых обязательств короткую позицию на рынке облигаций может обеспечить, лишь убедив частных инвесторов занять длинную позицию. С точки зрения частных инвесторов - владельцев реальных денежных балансов и реальных долгов государства безрисковая норма процента диктует общие рыночные требования инвесторов к доходности правительственных облигаций, тогда как сеньораж обеспечивает их текущие доходы, или купонные выплаты. При заданных величинах  $r$  и  $\delta$  общая финансовая сбалансированность будет определяться величиной изменения капитальной стоимости активов  $\alpha$ , где  $r = \delta + \alpha$ .

Сказанное может быть подтверждено следующим образом. Пусть в решении (5) купонные выплаты увеличиваются с постоянным темпом  $S(\tau - t) = S(t) \exp[\alpha(\tau - t)]$ , тогда для  $\tau \geq t$  и каждого фиксированного значения  $t$  имеет место:

$$b(t) = \int_t^\infty S_N(\tau) \exp(-r(\tau - t)) d\tau = S(t) \int_t^\infty \exp[-(r - \alpha)(\tau - t)] d\tau = \frac{S(t)}{r - \alpha} = \frac{S(t)}{\delta},$$

откуда и следует справедливость соотношения  $r = \delta + \alpha$ , в частности, возможность представления долга как величины пропорциональной сеньоражу.

### Сеньораж как процесс диффузии

Вернемся снова к тому, что функция сеньоража  $S = S(t)$  или чистого сеньоража (3) является внешней для данного уравнения, и поэтому необходима некоторая гипотеза, которая объясняла бы эволюцию во времени объемов реального приращения денег. Представляется, что в переходный период динамика сеньоража определяется воздействием огромного количества факторов экономического, социального, политического, исторического и т.д. характера. Это воздействие имеет не только регулярную природу, но и чисто случайные причины и обстоятельства.

Естественно полагать, что сеньораж  $S(\tau - t)$  является стохастическим процессом, начальное значение которого в точке  $t$  известно  $S(t) = s_t$  и неслучайно, а распределение вероятностей (плотность распределения) его значений в момент  $\tau > t$  зависит от его значения в момент  $t$ , например, что сеньораж является стохастическим процессом марковского типа. Общее свойство марковости, отражающее чрезвычайно быстрое устаревание информации, что особенно характерно для переходной экономики, может быть конкретизировано применительно к сеньоражу следующим образом<sup>9)</sup>.

Государство - эмитент денег и облигаций, а также частные инвесторы - покупатели этих активов преследуют свои собственные цели, действуя на рынке долгов в условиях неопределенности. *Рациональный характер их поведения* выражается, в частности, в том, что они ожидают изменений объемов сеньоража, который может, например, расти с постоянной скоростью:

$$(6) \quad E_t \{S(\tau - t) | S(t) = s_t\} = s_t e^{\alpha(\tau - t)},$$

где  $E_t$  - оператор рациональных ожиданий, обусловленных всей имеющейся информацией о процессе в момент времени  $t$ ;

$\alpha$  - параметр ожидаемой скорости изменений объемов сеньоража.

Условие (6) означает, что рациональные ожидания, которые имеют место в любой момент  $t$  относительно значений сеньоража в будущем, т.е. для  $\tau \geq t$ , являются неслучайной функцией, растущей экспоненциально с известным и постоянным темпом  $\alpha$  при заданных (известных и потому неслучайных) начальных условиях  $S(t) = s_t$ . Данное предположение о характере *рациональных ожиданий государства и инвесторов эквивалентно утверждению о том, что динамика сеньоража - это случайный процесс диффузионного типа*<sup>10)</sup>, который описывается дифференциальным уравнением Ито:

$$(7) \quad dS/S = \alpha dt + \sigma dW,$$

где  $W = W(t)$  - стандартный винеровский процесс, или случайная гауссовская величина, параметризованная  $t$ , с нулевой средней, дисперсией  $t$  и ковариацией  $\text{cov}\{W(z), W(t)\} = \min(z, t)$  [ 10 ].

Эволюция сеньоража находится под воздействием огромного количества факторов различной природы, что отражается гауссовским характером распределения вероятностей значений винеровского процесса в каждый момент времени, дисперсия которого нестационарна. Гипотеза (7) может быть истолкована и как утверждение о том, что темпы денежной эмиссии в реальном выражении (логарифмы значений сеньоража) являются винеровским процессом со смещением:

<sup>9)</sup> В.Бессонов в [ 9 ] показал, например, что скорость процесса инфляции за 1992 г. в России сопоставима с инфляцией в США за последние 55 лет .

<sup>10)</sup> В работе М.Миллера и Л.Занга [ 11] сеньораж представлен геометрическим броуновским процессом  $dS = \sigma S dW$  .

$$A(t) = \ln s_0 + \alpha t + \sigma W(t),$$

т.е. имеют не только регулярную составляющую, но и случайную компоненту с конечной дисперсией, распределенную нормально. Вполне согласуется с практикой формирования денежного предложения и то, что распределение значений сеньоража в каждый последующий момент зависит от его величины в предшествующий момент. Отметим, что гипотеза (7), часто называемая *геометрическим броуновским движением*, широко применяется в финансовой экономике, являясь, в частности, важнейшей компонентой знаменитой формулы Блека-Шолза формирования цены опциона (*call option pricing*) [ 12 ].

Механизм взаимодействия государства и инвесторов на двухкомпонентном финансовом рынке (деньги и гособлигации), описывается модифицированным уравнением арбитража:

$$(8) \quad r b(t) = S_N(t) + E_t \left\{ \frac{1}{dt} db(t) \right\},$$

к которому приводится уравнение (4), если принимается точка зрения на динамику сеньоража как на процесс диффузии. Запись левой части (8) отражает тот факт, что винеровский процесс с вероятностью практически равной единице - есть непрерывная, но недифференцируемая случайная функция.

Решение уравнения (8) может быть записано как

$$(9) \quad b(t, S) = E_t \left\{ \int_t^{\infty} S_N(\tau) \exp(-r(\tau - t)) d\tau \right\},$$

где для каждого фиксированного момента времени  $t$  величина текущего государственного долга представляет ожидаемую приведенную стоимость будущего потока сеньоража. Например, для рациональных ожиданий, существующих в момент  $t = 0$

$$b(S) = E_0 \left\{ \int_0^{\infty} S_N(\tau) \exp(-r\tau) d\tau \right\}$$

или  $b = b(S)$ . Значение ожидаемой приведенной стоимости долга - величина наблюдаемая (неслучайная) для фиксированной точки  $t$ , но ее изменение  $db$  - ненаблюдаемая, т.е. случайная величина, рациональное ожидание которой обусловлено наличием информации о процессе, имеющейся в данный момент времени.

Сделаем еще одно предположение, которое позволит экономически упростить модель, сохраняя, однако, возможность ее усложнения в дальнейшем. Из упомянутых выше соображений последовательности бюджетной политики следует, что приведенная текущая стоимость сеньоража и налогов равна долгу и приведенной текущей стоимости государственных расходов:

$$\int_t^{\infty} [E_t \{S(\tau)\} + T(\tau)] \exp[-r(\tau - t)] d\tau = b(t) + \int_t^{\infty} G(\tau) \exp[-r(\tau - t)] d\tau.$$

Полагая сбалансированность текущих приведенных стоимостей потоков будущих налогов и бюджетных расходов, получаем:

$$\int_t^{\infty} E_t \{S(\tau)\} \exp[-r(\tau-t)] d\tau = b(t),$$

что позволяет рассмотреть зависимость между сеньоражем и долгом. В данной работе, тем самым, решается задача, в известном смысле сопряженная задаче, решенной Дж. Бертолой и А. Дразеном в [ 8 ]: стабилизация в нашей модели определяется как оптимальное значение сеньоража, тогда как в [ 8 ] оптимум находится чисто фискальными средствами.

### Барьеры в динамике долга и сеньоража

Итак, динамика сеньоража в соответствии с (7) является процессом диффузии

$$S(t) = s_0 \exp\{\alpha t + \sigma W(t)\},$$

а государственный долг  $b = b(S)$  представляет в силу (9) приведенную ожидаемую стоимость будущего потока сеньоража.

Значения сеньоража как случайного процесса винеровского типа ограничены экономической природой процесса. С одной стороны, поскольку исключаются ситуации, порождающие игры Понци, то для нулевого значения сеньоража  $S = 0$  величина государственного долга должна быть равной нулю,  $b(0) = 0$ . Начало, следовательно, является *точкой абсорбции*, в которой процесс прекращается.

С другой стороны, значения сеньоража ограничены и сверху, т.е. расположены на отрезке  $[0, S^*]$ , где  $S^*$  - так называемый рефлексивный барьер: если процесс (7) достигает границы допустимых значений и становится равным  $S = S^*$ , то величина сеньоража мгновенно уменьшается и попадает внутрь отрезка  $[0, S^*]$ . Прежде чем уточнить, каким образом происходит подобное сокращение значений сеньоража, объясним экономическую природу этого процесса.

Условие арбитража, хотя и справедливо всюду на отрезке  $[0, S^*]$ , но имеет разную форму. Для значений сеньоража  $0 < S < S^*$  условие арбитража имеет форму уравнения (8), иными словами, общий доход равен сумме купонного дохода и роста стоимости долга, и  $r = \delta + \alpha, \alpha > 0$ . Государство, увеличивая номинальное предложение денег, не склонно ограничивать сверху свои возможности для маневра, т.е. регулирования размеров долга. Оно, однако, заинтересовано в максимизации результата, т.е. привлечении максимального объема заемных средств на свободном рынке. В точке оптимального значения долга сеньораж перестает расти,  $S = S^*$ , значит прекращается рост капитальной стоимости активов,  $\alpha = 0, r = \delta$ . Иными словами, точка оптимума - это стационарная точка для дифференциального уравнения (8), где имеет место

$$S = rb(S),$$

где, напомним, значение сеньоража известно, а  $b(S)$  - ожидаемая приведенная стоимость долга.

Априори частные инвесторы, получая за счет сеньоража купонный доход, согласны с увеличением его размеров. В силу (9) более высоким размерам сеньо-

ража соответствуют и более высокие размеры долга, или ожидаемой приведенной стоимости потока будущего сеньоража. Но лишь до определенного предела, поскольку неограниченное увеличение предложения денег порождает скачок инфляции, ожидания которой уменьшают спрос на реальные денежные балансы и реальные активы государственных облигаций.<sup>11)</sup> Частные инвесторы, рационально действующие на финансовом рынке, должны предвидеть инфляционные последствия эмиссии долга, что выражается для них в существовании рефлексивного барьера - значении сеньоража, при котором приобретение долгов становится нерациональным из-за падения их реальной стоимости. Таким образом, резкая асимметрия финансового рынка в переходной экономике реализуется в существовании точки максимума для правительства и рефлексивном барьере - для частных инвесторов.

Уравнение (2) или его аналог (8) имеют постоянные коэффициенты - безрисковую норму реального процента, или доходности государственного долга  $r > 0$ , тогда как для рефлексивного барьера  $b'(S^*) = 0$  [ 13 ]. В данной модели это противоречие разрешается следующим образом: будем полагать, что для значений сеньоража, принадлежащих внутренней части отрезка  $[0, S^*]$ , реальная ставка процента не меняется, а когда объем сеньоража достигает границы, то ожидания инфляции скачкообразно увеличиваются, снижая почти до нуля спрос частных инвесторов на реальный долг. Это, в свою очередь, как бы увеличивает до бесконечности ставку процента  $\lim_{S \rightarrow S^*} \frac{1}{r} = 0$ , а значит, для рефлексивного барьера производная долга по сеньоражу становится равной нулю

$$(10) \quad \left. \frac{db}{dS} \right|_{S=S^*} \equiv b'(S) = 0.$$

Спрос на реальный долг восстанавливается при меньших значениях предложения денег, следовательно, процесс продолжается при меньших значениях сеньоража. Таким образом, происходит уменьшение уровня сеньоража до значений, которые можно считать «приемлемыми», т.е. не порождающими скачок инфляции. Значение рефлексивного барьера можно считать границей, разделяющей различные инфляционные режимы, поведение экономики в которых для детерминированных ситуаций исследуется, в частности, в работах [ 14, 15 ].

### Уравнения арбитража для долга и опционов

Рассмотрим соотношение долга и сеньоража внутри отрезка  $[0, S^*]$ . На бесконечно малом интервале времени  $(t, t + dt)$  из соображений арбитража следует, что текущая приведенная стоимость долга в точке  $t$  равна купонному доходу, получаемому за период  $dt$  и ожидаемым изменениям приведенной текущей стоимости долга за этот период

<sup>11)</sup> Отметим, что рациональные ожидания отражают вероятность уменьшения реальной стоимости денег и облигаций из-за скачка инфляции. Это находит свое выражение в отрицательной величине константы в формуле стоимости долга, а также в нулевой стоимости опциона «не покупать облигации» для частных инвесторов.

$$(11) \quad b(S) = Sdt + E_t\{b(S + dS) \exp(-rdt)\},$$

где в качестве нормы дисконта  $r > 0$  используется рыночная (безрисковая) доходность государственных облигаций.

Уравнение (11) является для  $S < S^*$  уравнением Беллмана:

$$(12) \quad b(S) = \max\left\{\frac{1}{r}\left[S + \frac{1}{dt} E_t(db)\right], f(S^*) + I\right\}$$

для задачи оптимальной остановки<sup>12)</sup>, в соответствии с которым оптимизируется выбор между текущей доходностью долга, либо стоимостью опциона  $f(S)$  в точке оптимума  $S^*$  [ 16, 17 ].

Ожидаемые изменения приведенной стоимости долга можно вычислить, раскладывая в ряд Тейлора (ограничиваясь членами порядка  $dt$ ) выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части (11) и применяя лемму Ито:

$$\begin{aligned} E_t\{b(S + dS)e^{-rdt}\} &= E_t\left\{[b(S) + b'(S)dS + \frac{1}{2}b''(S)(dS)^2][1 - rdt]\right\} = \\ &= b(S) + \alpha S b'(S)dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 b''(S)dt - rb(S)dt. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (11) и упрощая, получаем следующее дифференциальное уравнение относительно долга как функции сеньоража:

$$(13) \quad \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 b''(S) + (r - \delta)Sb'(S) - rb(S) + S = 0.$$

Уравнение (13) - неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно функции  $b(S)$ . Общее решение соответствующего однородного уравнения - это функция

$$(14) \quad b(S) = A_1 S^{\beta_1} + A_2 S^{\beta_2},$$

где  $\beta_1 > 1, \beta_2 < 0$  - корни характеристического уравнения

$$(15) \quad \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + (r - \delta)\beta - r = 0.$$

Поскольку начало - точка абсорбции, в которой значение долга равно нулю, а вторая компонента общего решения (14), имея отрицательный показатель степени, стремится к бесконечности при  $S \rightarrow 0$ , то константа  $A_2 = 0$ , и решение однородного уравнения принимает следующий вид:

<sup>12)</sup> Аналогичный результат может быть получен для интервала времени  $dt$ , если использовать уравнение  $E_t\{db(S)\} = [rb(S) - S]dt$ . Ожидания изменения приведенной стоимости долга на этом интервале будут равны разности между доходами, которые могут принести активы при соблюдении общих или рыночных требований к доходности и купонным доходом государственных облигаций.

$$(16) \quad b(S) = A S^{\beta_1}.$$

Простой подстановкой проверяется, что частное решение неоднородного уравнения - это функция

$$(17) \quad b(S) = \frac{1}{\delta} S.$$

Экономический смысл решения (17) состоит в том, что при отсутствии ограничений на размеры сеньоража текущая приведенная стоимость долга - это стоимость будущих потоков денежной эмиссии, капитализированная из расчета нормы купонной доходности<sup>13)</sup>  $\delta > 0$ . Эта компонента решения в некоторых работах носит название *фундаментальной стоимости* общего объема государственного долга в том смысле, что не содержит спекулятивных составляющих. Интересующее нас решение уравнения (13)

$$(18) \quad b(S) = AS^{\beta_1} + \frac{1}{\delta} S$$

является, таким образом, *коррекцией фундаментальной стоимости объема государственных облигаций*, причем характер коррекции различен у частных инвесторов и у правительства. Однако, прежде чем перейти к анализу этих различий, выведем уравнение для стоимости соответствующих опционов.

В нашей модели опцион в отношении государственного долга у правительства - это стоимость возможности «не продавать» новые долги, иными словами, этот опцион с точки зрения правительства является *стоимостью политики стабилизации государственного долга*. По сути своей, опцион - как «*стабилизационный контракт*» реализуется, т.е. продается частным инвесторам, когда прекращается эмиссия долгов, а значит, и эмиссия денег, что может иметь место при смене поощрительной макроэкономической политики на ограничительную. В таком случае реальной альтернативой эмиссии долга и денег становится спад производства, рост безработицы и неплатежей.

Соответственно для частных инвесторов данный опцион - это *стоимость потенциальной возможности «не покупать» государственные облигации*, а перестроить свои портфели либо на деньги, либо на другие активы. Реализация данного опциона частными инвесторами будет означать, что их доходы от государственного долга (издержки инфляции) равны их потерям от спада, безработицы и неплатежей.

Обозначим стоимость опциона  $f(S)$  и вычислим его величину из соображений арбитража. Поскольку опцион - финансовый актив, производный от стоимости облигации (*derivative security*), то к нему применяются такие же требования, что и к стоимости основного актива - в данном случае государственной облигации. Разница между основным и производным активами состоит лишь в том, что владение опционом не приносит дохода, а в случае реализации лишь увеличивает

---

<sup>13)</sup> Нетрудно заметить, что при отсутствии неопределенности  $\alpha = 0$  и (17) совпадает с  $S = rb(S)$ .



ожидаемую приведенную стоимость опциона. Поэтому для стоимости опциона уравнение (11) модифицируется в следующее:

$$(19) \quad f(S) = E_t \{ f(S + dS) \exp(-r dt) \},$$

где стоимость опциона дисконтируется по той же самой безрисковой ставке процента, что и стоимость облигации. Производя с (19) те же действия, что и с (11), т.е. раскладывая его правую часть в ряд Тейлора и применяя лемму Ито, получаем:

$$(20) \quad \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f''(S) + (r - \delta) S f'(S) - r f(S) = 0.$$

Так как для стохастического процесса динамики опциона справедливы соотношения абсорбции, приведенные выше для определения стоимости облигаций, то стоимость опциона имеет вид:

$$(21) \quad f(S) = B S^{\beta_1},$$

где  $\beta_1 > 1$  - характеристический корень уравнения (15).

Теперь, после того как выведены формулы (18) и (21) для стоимостей долга и опциона, соответственно, конкретизируем их значения для правительства и частных инвесторов. Принципиальным представляется то обстоятельство, что в силу сильной асимметрии финансового рынка в переходной экономике, функции приведенных стоимостей долга и опционов у правительства и частных инвесторов различны, но, хотя они действуют независимо друг от друга, исходя из различных соображений, их поведение приводит к одинаковым результатам.

Идентичность последствий поведения правительства и частных инвесторов на финансовом рынке имеет следующий смысл: *государство переходит к стабилизации своего долга в той самой точке, в которой частные инвесторы решают перестать покупать новые облигации*. Один и тот же уровень сеньоража - рефлексивный барьер  $S^*$  - максимизирует опцион государства и объем активов у частных инвесторов. В этой точке стоимость политики стабилизации долга, или «стабилизационного контракта», равна разности приведенных ожидаемых стоимостей долга у государства и у частных инвесторов:

$$(22) \quad f_g(S^*) = b_g(S^*) - b_p(S^*),$$

где  $f_g(S^*)$  - стоимость опциона стабилизации долга;

$b_g(S^*)$  - приведенная стоимость долга у государства;

$b_p(S^*)$  - приведенная стоимость долга у частных инвесторов.

В следующих разделах данной работы будет доказана справедливость уравнения (22).

### Поведение правительства

Модель оптимального поведения правительства, стремящегося получить максимальный результат от политики заимствования на свободном рынке, может строиться, исходя из следующих соображений. Поскольку государство - монопольный эмитент своих долгов, то ограничений на эмиссию сеньоража у него априори нет. Вместе с тем, естественно полагать, что перепродажей своих долгов правительство не занимается и, следовательно, коррекция фундаментальной стоимости в (18) у правительства отсутствует,  $A_g = 0$ . В таком случае ожидаемая приведенная стоимость долга с позиции государства принимает простой вид:

$$(23) \quad b_g(S) = \frac{1}{\delta} S.$$

Предположим, что известна величина социально-экономических издержек от спада, безработицы и неплатежей, которые общество согласно нести при остановке роста государственного долга, и пусть эта величина для простоты постоянная,  $I = const$ . Политика правительства в отношении долга заключается в следующем: при каждом значении сеньоража ожидаемая приведенная стоимость долга сравнивается с потенциальными издержками спада, безработицы и неплатежей. До тех пор, пока

$$b_g(S) < f_g(S) + I,$$

политика наращивания долга (увеличения сеньоража) оправдана, так как издержки инфляции, вызванные ростом долга, ниже альтернативных издержек из-за спада, безработицы и неплатежей.

В точке оптимума, где эти величины равны, правительство реализует опцион. Оно получает приведенную стоимость государственного долга, за которую платит издержками спада производства, роста безработицы и неплатежей, причем издержки последних увеличиваются на величину опциона стабилизации, от которого правительство «отказывается», начиная проводить политику стабилизации долга. Таким образом, в точке оптимума (*optimal or theoretical exercise point*) опцион оптимально реализуется, поскольку здесь выполняются условия равенства значений (*value matching conditions*):

$$(24) \quad b_g(S^*) = f_g(S^*) + I,$$

и условия гладкости (*smooth pasting conditions*):

$$(25) \quad b'_g(S^*) = f'_g(S^*).$$

Эти условия при подстановке в них значений стоимостей долга и опциона правительства в совокупности дают следующую систему уравнений:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\delta} S^* &= B_g S^{*\beta_1} + I \\ \frac{1}{\delta} &= \beta_1 B_g S^{*\beta_1-1} \end{aligned}$$

Решением этой системы являются значения константы опциона правительства  $B_g$  и точки его оптимальной реализации  $S^*$ :

$$(27) \quad S^* = \frac{\beta_1}{\beta_1-1} \delta I \quad \text{и} \quad (28) \quad B_g = \frac{(\beta_1-1)^{(\beta_1-1)}}{\beta_1 \delta} I^{(1-\beta_1)}.$$

Поведение правительства графически представлено на рис.1, на котором видно, что значение опциона всюду больше, чем  $(b_g(S) - I)$ , кроме точки оптимума  $S^*$ , где происходит стабилизация долга.

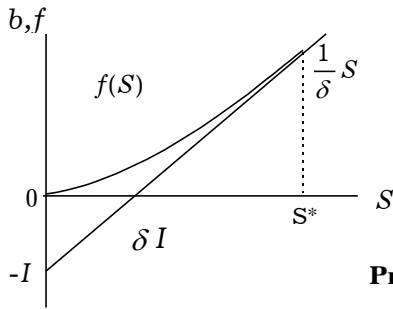


Рис.1.

Обратим внимание на то, что константа  $B_g$  положительна, следовательно, стоимость опциона правительства — экспоненциально возрастающая функция, имеющая в точке оптимума общую касательную с функцией приведенной ожидаемой стоимости государственного долга, оцениваемого с позиций правительства. В точке оптимума

$S^*$  опциона получена взаимосвязь между предельно допустимыми издержками спада производства, безработицы и неплатежей и размерами сеньоража, при которых оптимально реализовать опцион  $f_g(S^*)$ , т.е. осуществить стабилизацию долга.

Величина параметра  $q^* = \frac{\beta_1}{\beta_1-1} > 1$  — пропорция между ценой сделки и оп-

тимальной ценой реализации опциона (*the ratio of the theoretical exercise price to the strike price of an option*) характеризует отношение, по сути дела, аналогичное коэффициенту  $q$  Тобина [ 6, 11 ].

### Поведение частных инвесторов

В отличие от государства, которое монопольно эмитирует долги, частные инвесторы конкурируют, покупая государственные облигации, строя свое поведение в зависимости от колебаний купонного дохода, т.е. сеньоража. Поскольку их поведение рационально, то типичный инвестор понимает, что слишком большие размеры денежной эмиссии приведут к инфляции, а значит, к снижению реальной стоимости государственных облигаций. Поэтому рационально действующий инвестор ожидает от правительства ограничения роста сеньоража, но не знает, когда это произойдет. Возможная политика стабилизации долга со стороны пра-

вительства - это барьер для увеличения сеньоража для частного инвестора. Следовательно, фундаментальная стоимость долга с позиции частного инвестора корректируется в меньшую сторону: барьер «съедает» часть фундаментальной стоимости долга, и динамика последнего для инвестора представляется в виде:

$$(29) \quad b_p(S) = A_p S^{\beta_1} + \frac{1}{\delta} S,$$

где константа  $A_p$  должна быть отрицательной. Первая компонента в (29) отражает уменьшение приведенной стоимости долга для инвесторов из-за ожиданий его возможной стабилизации, откуда и следует, что  $A < 0$ .

Формально для частного инвестора в точке оптимума опциона должны выполняться условия равенства значений и гладкости, аналогичные условиям (24) и (25) для правительства. Кроме того, в соответствии с (10) для частного инвестора точка оптимума является рефлексивным барьером  $\tilde{S}$ , где производная долга равна нулю. Следовательно, для частного инвестора справедливы уравнения:

$$(30) \quad \begin{aligned} b_p(\tilde{S}) &= f_p(\tilde{S}) + I \\ b'_p(\tilde{S}) &= f'_p(\tilde{S}) = 0 \end{aligned}$$

Подставляя в (30) значения долга и опциона из (29) и (21), получаем:

$$(31) \quad \begin{aligned} A_p S^{\beta_1} + \frac{1}{\delta} S &= B_p S^{\beta_1} + I \\ \beta_1 A_p S^{\beta_1-1} + \frac{1}{\delta} &= \beta_1 B_p S^{\beta_1-1} = 0 \end{aligned}$$

По сравнению с системой (26) здесь новым является равенство нулю производной функции приведенной стоимости долга для частных инвесторов в точке рефлексивного барьера  $\tilde{S}$  в соответствии с (10). С учетом этого из второго уравнения в системе (31) сразу же находим, что  $B_p = 0$  и  $A_p = -\frac{1}{\beta_1 \delta} \tilde{S}^{1-\beta_1}$ . Подставляя найденные значения констант в первое уравнение, получаем:

$$(32) \quad \tilde{S} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \delta I.$$

Стоимость опциона «не покупать облигации» для частного инвестора оказывается равной нулю,  $f_p(S) = 0$ , а значение сеньоража в точке рефлексивного барьера  $\tilde{S}$  - пропорциональным издержкам спада производства, безработицы и неплатежей. Поведение частного инвестора представлено на рис. 2.

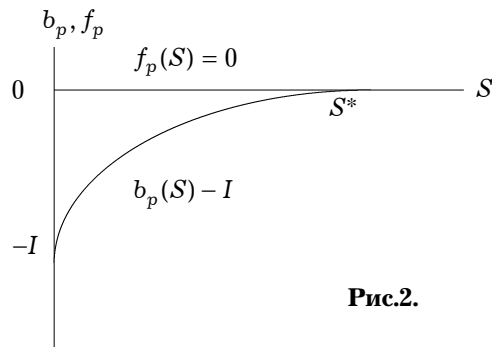


Рис.2.

Как видно из данного графика, частный инвестор систематически занижает фундаментальную стоимость долга из-за ожиданий инфляции, переставая покупать облигации в точке рефлексивного барьера.

### Совместное поведение правительства и инвесторов

Прежде всего напомним, что правительство и инвесторы действуют на одном финансовом рынке, и следовательно, общие условия у них одинаковые: параметры доходности активов  $r > 0, \alpha > 0$  и  $\delta > 0$ , положительный корень  $\beta_1 > 1$  характеристического уравнения (15), отражающий неопределенность, а также альтернативные издержки спада, безработицы и неплатежей  $I > 0$ . Сравнивая, поэтому, выражения (27) и (32) для значений сеньоража в точке оптимума опциона правительства и рефлексивного барьера для частного инвестора, можно заключить, что это - одна и та же точка,  $S^* \equiv \tilde{S}$ .

Оптимально построенная политика правительства, направленная на стабилизацию долга, полностью совпадает с желанием инвесторов перестать покупать долги правительства. При этом, однако, правительство, формируя политику заимствований, максимизирует ожидаемую приведенную стоимость долга и соответствующий опцион. Частный инвестор в точке оптимума, где правительство прекращает эмитировать долги, не имеет альтернативы - покупать или не покупать. Продолжать покупать он не может, так сказать, физически, тогда как предельный долг уже равен нулю и в дальнейшем может лишь снижаться. Следовательно, для него соответствующий опцион покупки долгов равен нулю.

Рассматривая положение финансового рынка в граничной (оптимальной) точке, можно вывести равновесное соотношение между предложением долгов и спросом на них. Сравнивая (24) и (30), мы получаем, что предложение долгов за вычетом стоимости опциона для правительства равно спросу на долги за вычетом стоимости опциона для инвесторов:

$$b_g(S^*) - f_g(S^*) = b_p(S^*) - f_p(S^*) = I,$$

откуда, с учетом нулевой стоимости опциона для инвесторов  $f_p(S^*) = 0$ , находим, как и утверждалось ранее, что:

$$(22) \quad f_g(S^*) = b_g(S^*) - b_p(S^*),$$

или, эквивалентно,

$$(33) \quad b_g(S^*) - f_g(S^*) = b_p(S^*).$$

Из соотношения (33) следует, что рефлексивный барьер является точкой равновесия финансового рынка, где предложение долгов (левая часть) равно спросу на них, а оптимальная политика стабилизации долга предстает как разность приведенных стоимостей долга для правительства и инвестора. Максимизируя ожидаемую приведенную стоимость долга, правительство воздействует на спрос частных инвесторов, побуждая их к покупке долгов вплоть до точки рефлексивного барьера. Эквивалентная интерпретация (33), поэтому, состоит в том,

что частные инвесторы оплачивают в точке оптимума политику стабилизации государственного долга.

В точке оптимума правительство «продает» опцион, следовательно, ожидаемая приведенная стоимость его портфеля, состоящего из долгов  $b_g(S^*)$  и короткой позиции по опциону  $-f_g(S^*)$ , равна  $[b_g(S^*) - f_g(S^*)]$ . Соответственно, частный инвестор «покупает стабилизационный контракт» в точке оптимума, и ожидаемая приведенная стоимость его портфеля равна  $[b_p(S^*) + f_g(S^*)]$ . С учетом факта покупки-продажи «стабилизационного контракта» в точке оптимума равновесие для правительства и частных инвесторов на рынке государственных долгов может быть записано альтернативным образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} S^* &= \frac{1}{\beta_1 \delta} S^* + I && \text{для правительства;} \\ -\frac{1}{\beta_1 \delta} S^* + \frac{1}{\delta} S^* &= I && \text{для частного инвестора.} \end{aligned}$$

Опцион - это частная сделка, которая, пока заключается между лицами, не эмитирующими долги, не влияет на стоимость самих долгов [ 18 ]. Только в точке оптимума, где государство «продает» политику стабилизации - «долговой контракт» - происходит изменение цены, т.е. ожидаемой приведенной стоимости долгов. Точнее, государство должно увеличить альтернативные издержки политики

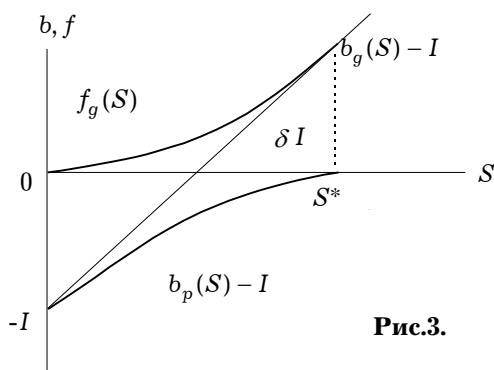


Рис.3.

стабилизации на величину стоимости «контракта»- опциона стабилизации, тогда как частный инвестор должен уменьшить на такую же величину фундаментальную стоимость приобретаемых долгов.

Совместное поведение правительства и частных инвесторов на финансовом рынке показано на рис. 3, на котором точка рефлексивного барьера оптимизирует ожидаемую приведенную стоимость долга и опциона.

### Хеджирование портфелей активов правительства и инвесторов

Уравнение Беллмана для опциона стабилизации долга можно получить, используя технику хеджирования портфеля активов (*contingent claims analysis*), находящихся в распоряжении либо правительства, либо частного инвестора. При таком подходе экономические мотивы поведения правительства и частных инвесторов видны более отчетливо, а, кроме того, в их совместном поведении проявляются признаки нестабильности, характерные вообще для экономики переходного периода.

Рассмотрим поведение правительства, которое эмитирует сеньораж и ис-

пользует колл-опцион для страхования своей короткой позиции. Стоимость портфеля активов правительства будет равна

$$\Phi = f(S) - hS,$$

где  $h$  - коэффициент хеджирования равный  $h = f'(S)$ .

Сама по себе эмиссия денег (как бы их «продажа» правительством или центральным банком) дополнительных затрат не требует, но в нашей модели сеньораж - это источник купонных выплат правительства инвесторам в размере  $-\delta f'(S)S$ . Следовательно, короткая позиция правительства по сеньоражу в этом случае должна соответствовать длинной позиции инвесторов по долгам.

В течение бесконечно малого периода времени  $dt$  стоимость портфеля правительства изменится, и составит величину:

$$d\Phi = df - hdS = f'(S)dS + \frac{1}{2}f''(S)(dS)^2 - f'(S)dS = \frac{1}{2}\sigma^2S^2f''(S)dt.$$

Для получения этого результата к стохастическому процессу сеньоража применяем, как и было сделано ранее, лемму Ито. С учетом купонных выплат изменение стоимости портфеля правительства будет равно величине:

$$[\frac{1}{2}\sigma^2S^2f''(S) - \delta Sf'(S)]dt.$$

Хеджирование портфеля делает его безрисковым, а поэтому требования к его рыночной доходности (стоимости обслуживания долга)

$$r\Phi dt = r[f(S) - f'(S)S]dt$$

должны равняться изменению его стоимости в течение периода времени  $dt$ , т.е.

$$(34) \quad r[f(S) - f'(S)S]dt = [\frac{1}{2}\sigma^2S^2f''(S) - \delta Sf'(S)]dt.$$

Из условия (34) сразу же получаем уравнение

$$(35) \quad \frac{1}{2}\sigma^2S^2f''(S) + (r - \delta)Sf'(S) - rf(S) = 0,$$

которое вполне аналогично уравнению<sup>14)</sup> (20).

Абсолютно аналогичные рассуждения можно применить к хеджированию портфеля частного инвестора с зеркальными заменами короткой позиции на длинную и выплат - на получение купонного дохода. Частные инвесторы хеджируют свои портфели от снижения их реальной стоимости, а значит, для них опцион - это длинный пут-опцион (*long put option*). Итоговое уравнение и в этом случае, естественно, такое же, что и (35).

---

<sup>14)</sup> Строго говоря, в уравнении (34) безрисковая ставка процента должна быть заменена на норму доходности с учетом рыночной цены полностью диверсифицированного риска.

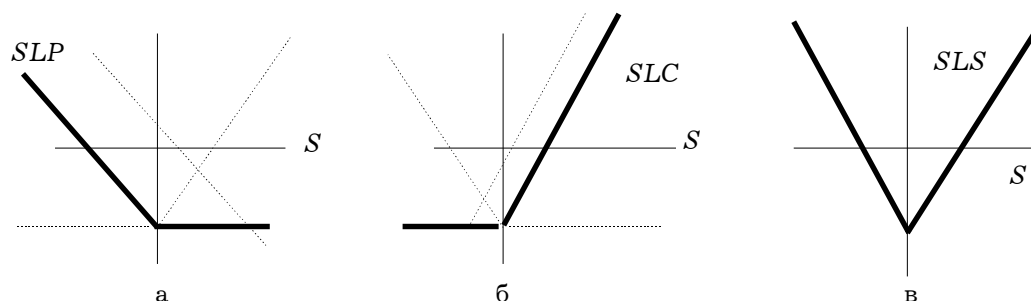


Рис.4.

На рис. 4 представлены профили прибылей-убытков для правительства (а), частных инвесторов (б) и их совместного поведения (в). Отметим, что купонные выплаты и длинный колл-опцион порождают синтетический длинный пут-опцион (*synthetic long put option*), который определяет стратегию хеджирования частных инвесторов. Соответственно, купонный доход инвесторов и длинный пут-опцион порождают синтетический длинный колл-опцион (*synthetic long call option*), являющийся стратегией хеджирования для правительства. Совместное хеджирование правительства и инвесторов определяется синтетическим опционом страддл (*synthetic long straddle*).

Анализ данных результатов показывает, что если использовать аналогию с финансовыми инструментами, то система государственных долгов демонстрирует признаки нестабильности. Действительно, опцион «страддл» используется в тех случаях, когда его покупатель ожидает значительного изменения цены актива, но не знает направления этого изменения. При этом небольшие колебания цены актива приносят покупателю убытки, и лишь значительные изменения позволяют надеяться на получение прибыли. Значит, и правительство, и частные инвесторы, действующие на рынке государственных долгов, заинтересованы как бы в «раскачивании» системы, что и делает ее потенциально нестабильной. В переходной экономике, следовательно, можно вычислить оптимальную величину опционов и ожидаемую приведенную стоимость долга, но сама точка оптимума (рефлексивный барьер) обладает признаками неустойчивости.

### Долг, опцион и сеньораж: численный пример

Проведем для нашей модели расчет значений сеньоража, долга, опционов и их соотношений в точке оптимума (рефлексивного барьера), используя некоторые фактические данные развития экономики России [ 1, табл. 6, П8 ]. Данный расчет имеет иллюстративный характер, преследуя лишь ограниченную цель общей характеристики некоторых теоретических пропорций финансового рынка в переходный период.

	1994 г.	1995 г.	1996 г.	1997 г.	1998 г.
Дефлятор ВВП, процентов	307	178	46	18	13
Деньги M2					
трлн. рублей	135,1	272,6	367,4	488,6*)	
процентов	200	126	34	33	

\*) Наша оценка по прогнозу среднего роста M2 за год.



По данным этой таблицы рассчитан средний ожидаемый темп роста сеньоража (ежегодного прироста реальной денежной массы), который составил 1,29, или 29 процентов в среднем за год. Для экономики переходного периода характерна высокая неопределенность, которая оценена двумя способами. В частности, стандартное отклонение доходности ГКО за 1996-1997 гг. составило примерно 62 процента в год, причем уровень доходности в среднем за этот период составил 60 процентов годовых. По второму способу для ряда (реальный дефицит от ВВП: в 1994 г. - 10,6 процента, в 1995 г. - 5,3, в 1996 г. - 7,8, в 1997 г. - 6,4 процента) [1, с.313] посчитана вариация динамики сеньоража по формуле, предложенной Миллером и Зангом [11]:

$$\sigma^2 = -\frac{2}{N} \sum_{i=1}^N [\ln S_{t_{i+1}} - \ln S_{t_i}],$$

которая составила 34 процента в год. Стандартное отклонение, равное примерно 58 процентам в год, оказывается при этом величиной вполне сопоставимой с колебаниями доходности ГКО. Она принимается в качестве меры неопределенности в нашей модели.

Все переменные модели пронормированы на 1 млн. рублей альтернативных издержек  $I$  от спада производства, безработицы и неплатежей. В целом, основные параметры модели следующие:

$$r = 0,60 \quad \sigma = 0,58$$

$$\alpha = 0,29 \quad \sigma^2 = 0,34$$

$$\delta = 0,31 \quad I = 1,0$$

При данных параметрах финансового рынка и неопределенности положительный корень характеристического уравнения (15), или

$$\beta^2 + 0,7\beta - 3,5 = 0,$$

равен  $\beta_1 = 1,55$ , а оптимальное значение коэффициента  $q^*$  Тобина:

$$q^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} = 2,8.$$

Константы интегрирования находятся из граничных условий и равны соответственно:

$$A_g = 0; B_g = 2I^{-0,55} \text{ и } A_p = -2I^{-0,55}; B_p = 0.$$

Как было сказано выше, вполне допустимо рассматривать политику стабилизации долга как своеобразный процесс инвестирования, где результатом является величина ожидаемой приведенной стоимости долга для правительства, а затратами - альтернативные издержки спада производства, безработицы и неплатежей, которые считаются допустимыми при стабилизации долга. В детерминированной ситуации, когда потери от инфляции в силу роста долга и сеньоража составляют 31 процент альтернативных издержек, макроэкономическая политика

роста долга, т.е. политика, стимулирующая инфляцию, может смениться на ограничительную, т.е. стабилизирующую рост долга, при пороговом размере сеньоража  $\tilde{S} = 0,31I$ , как и утверждает простое правило инвестирования Маршалла.

*Высокая неопределенность, свойственная экономике переходного периода, увеличивает оптимальное значение сеньоража почти в 3 раза.* Оптимальное (барьерное) значение сеньоража с учетом неопределенности повышается почти до 90 процентов альтернативных издержек от спада, безработицы и неплатежей:

$$S^* = 0,9I.$$

Неопределенность, следовательно, усиливает инерционный характер макроэкономической политики в переходный период: если правительство проводит политику активного привлечения средств через заимствование на свободном рынке, то оно будет более склонно проводить ее по сравнению с детерминированной ситуацией. При возрастании неопределенности значение положительного корня характеристического уравнения (15) стремится к единице, что увеличивает критическое значение сеньоража, при котором долг может быть стабилизирован. Значит, рост неопределенности является фактором, работающим в пользу продолжения инфляционной политики, если она уже проводится.

Из этого, в частности, следует, что в точке (детерминированного оптимума)  $\tilde{S} = 0,31I$  реализация опциона, т.е. стабилизация долга, *неоптимальна* и сеньораж может быть увеличен, поскольку здесь значение опциона для правительства сохраняется положительным, и значит, имеет место неравенство:

$$f_g(\tilde{S}) > b_g(\delta I) - I = 0.$$

В точке оптимума  $S^*$  приведенная, ожидаемая с позиции правительства, стоимость государственного долга составляет:

$$b_g(S^*) = \frac{1}{\delta} S^* = 3,2(0,9I) \cong 3I,$$

что говорит о возможности нарастить долг втрое в сравнении с альтернативными издержками спада, безработицы и неплатежей. В этой точке оптимальная величина стоимости политики стабилизации долга, или опциона для правительства, равна

$$f_g(S^*) = \frac{1}{\beta_1 \delta} S^{*\beta_1} = (2I^{-0,55})(0,9I)^{1,55} \cong 1,6I.$$

Таким образом, в точке оптимума значительная часть ожидаемой приведенной стоимости долга представляет ожидаемую приведенную стоимость потенциальной политики его стабилизации.

Ожидаемая приведенная стоимость долга с позиций частного инвестора составляет:

$$b_p(S^*) \cong (-2I^{-0,55})(0,9I)^{1,55} + 3I = 1,4I.$$

Поскольку точка оптимума - это равновесие финансового рынка, то здесь в силу (33) имеет место равенство предложения долгов правительством и спроса на долговые обязательства со стороны частных инвесторов:

$$3I = 1,6I + 1,4I .$$

Таким образом, правительство, максимизируя свой опцион, на самом деле стимулирует спрос инвесторов: в составе спроса на долги решающая часть состоит из приведенной ожидаемой стоимости политики стабилизации. В переходной экономике правительство может это делать, используя свое монопольное положение на сильно асимметричном финансовом рынке. С другой стороны, частные инвесторы, добровольно покупая долги правительства, полностью оплачивают стабилизационную политику правительства, предоставляя последнему возможность остановить рост государственного долга.

\*        \*  
\*  
\*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Экономические Обзоры ОЭСР. Российская Федерация, 1997». Париж: Центр ОЭСР, 1998.
2. Sargent, T. and Wallace, N. Some Unpleasant Monetarist Arithmetic // *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 5, 1981.
3. Walsh, C. Optimal Contracts for Central Bankers // *The American Economic Review*, 85, 1, 1995.
4. Lockwood, B. State-Contingent Inflation Contracts and Unemployment Persistence // *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 29, 3, 1997.
5. Svensson, L. Optimal Inflation Targets, «Conservative» Central Banks and Linear Inflation Contracts // *The American Economic Review*, 87, 1, 1997.
6. Dixit, A. And Pindyck, R. *Investment under Uncertainty* // Princeton University Press, 1994.
7. Turnovsky, S. *Methods of Macroeconomic Dynamics* // The MIT Press, 1995.
8. Bertola, G. and Drazen, A. Trigger Points and Budget Cuts: Explaining the Effects of Fiscal Austerity // *The American Economic Review*, 83, 1, 1993.
9. Бессонов В. О смещениях в оценках роста российских потребительских цен / Доклад на научно-исследовательском семинаре ВШЭ, 1998.
10. Tuckwell, H. *Elementary Applications of Probability Theory*. 2<sup>nd</sup> Edition. Chapman & Hall, 1995.
11. Blake, D. *Financial Market Analysis*. McGraw Hill, London, 1990.
12. Miller, M. and Zhang, L. Hyperinflation and Stabilisation: Cagan Revisited // *The Economic Journal*, 107, March, 1997.
13. Dixit, A. A Simplified Treatment of the Theory of Optimal Regulation of Brownian Motion // *Journal of Economic Dynamics and Control*, 15, 1991.
14. Смирнов А.Д. *Инфляция и бюджетный дефицит в переходной экономике* - М.: Изд. ВШЭ, 1997.

15. Смирнов А.Д. Инфляционные режимы динамики переходной экономики // *Экономический журнал ВШЭ*, № 1, 1997.
16. Merton, R. *Continuous Time Finance*. Blackwell, Cambridge, Mass, 1990.
17. Dixit, A. *Optimization in Economic Theory*. 2<sup>nd</sup> Edition. Oxford University Press, 1990.
18. Eichberger, J. and Harper, I. *Financial Economics*. Oxford University Press, 1997.