О расширенных предпочтениях в задаче голосования[1)]

Карабекян Д.С.

Рассматриваются предпочтения на множествах альтернатив (расширенные предпочтения). Анализируется ряд известных свойств, которым должны удовлетворять алгоритмы получения расширенных предпочтений из предпочтений на множестве альтернатив. Затем описываются существующие и предлагаются новые методы расширения предпочтений. Выделено три группы методов: лексикографические, вероятностные и усреднения рангов, которые исследуются на соответствие известным свойствам. Если лексикографические и вероятностные методы для любого числа альтернатив позволяют сравнить все возможные множественные коллективные выборы, то метод усреднения рангов требует дополнительных ограничений при числе альтернатив не менее трех. Вводятся лексикографические и вероятностные дополнения, а также дополнения, основанные на упорядочении по мощности и по отношению к риску. Анализируются свойства выделенных методов расширения предпочтений.

Ключевые слова: предпочтение, расширенное предпочтение, голосование, манипулирование, коллективный выбор.

Введение

Проблема манипулирования при голосовании заключается в том, что избиратель, намеренно исказив свои истинные предпочтения, может добиться лучшего для себя коллективного решения. Продемонстрируем манипулирование на примере. Пусть в голосовании по четырем альтернативам принимают участие пять человек. Предположим, что каждый избиратель может сравнить все альтернативы и имеет строгие предпочтения. Представим искренние предпочтения в виде следующей таблицы:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
a	d	d	a	c
c	c	b	c	d
d	a	a	d	b
b	b	c	b	a,

[1)] Автор выражает огромную благодарность Алескерову Ф.Т. за ценные замечания и предложения. Работа частично поддержана Научным фондом ГУ ВШЭ (грант № 08-04-0008), РФФИ (грант № 08-01-00039а) и Институтом фундаментальных междисциплинарных исследований ГУ ВШЭ.

Карабекян Д.С. – преподаватель кафедры высшей математики на факультете экономики ГУ ВШЭ.

Статья поступила в Редакцию в январе 2009 г.

где P_i – это строгое предпочтение i-го участника, причем чем выше в ранжировании альтернатива, тем лучше она для этого участника. Пусть для принятия решения используется правило относительного большинства, тогда будет выбрана альтернатива, за которую подано больше всего голосов. В данной ситуации таких альтернатив две – a и d, за каждую из которых подано по два голоса. Так как неизвестно, каким образом будет выбрана альтернатива среди набравших равное число голосов, можно сказать, что выбором при голосовании по правилу относительного большинства (без дополнительных условий) является набор $\{a, d\}$.

Рассмотрим предпочтения пятого участника. С его точки зрения, выбор при искренних предпочтениях содержит как вторую наилучшую альтернативу, так и худшую для него альтернативу, причем, как уже упоминалось ранее, неизвестно, какая из них будет выбрана в итоге. Заметим, что участник 5 может исказить свои предпочтения – а именно, заявить, что лучшей альтернативой для него является альтернатива d, а не c. В этом случае за альтернативу d будет подано 3 голоса и она станет единственным выбором. Заметим, что в данном случае, манипулируя, пятый участник гарантирует, что будет выбрана его вторая наилучшая альтернатива. С точки зрения разумных соображений, о которых в дальнейшем пойдет речь, можно сказать, что результат для участника 5 будет лучше, чем набор, содержащий вторую наилучшую и худшую альтернативы, т.е. пятому избирателю выгодно манипулировать.

Стоит заметить, что существует множество разных подходов к определению манипулирования. В рамках данной работы, как и в большинстве работ по теории манипулирования, предполагается, что каждый участник имеет один голос и несколько участников не могут договариваться о совместном изменении предпочтений. Остальные предпосылки будут описаны позднее в соответствующем разделе.

Теоретические исследования проблемы манипулирования были начаты в работах [5, 16]. В них было доказано, что любая разумная процедура не защищена от манипулирования со стороны участников голосования. В статьях [1, 9] был впервые поставлен вопрос о степени манипулируемости схем голосования. Однако оценка уровня манипулируемости на практике – это сложная вычислительная задача, для облегчения решения которой в исследованиях принимается ряд упрощающих предпосылок. Самой главной и жесткой из них является рассмотрение проблемы манипулирования в условиях однозначного выбора путем введения условия устранения несравнимости. Данное условие заключается в том, что из множества выигрывающих альтернатив, согласно заранее определенному правилу, будет выбран единственный победитель. Например, в работе [1] рассматривается устранение несравнимости в соответствии с алфавитным порядком. В приведенном выше примере итоговым выбором тогда будет набор $\{a\}$.

Такой способ встречается наиболее часто, но он порождает множество проблем, например, неравноправность участников голосования (избиратели, которые больше всего предпочитают первые альтернативы по алфавиту, заранее находятся в выигрышном положении), что может значительно исказить результаты количественной оценки уровня манипулируемости. Более мягким условием устранения несравнимости можно считать метод, предложенный в работе [13]. Он заключается в том, что в итоговом множественном выборе появление всех альтернатив равновероятно и выигрывающая альтернатива выбирается случайным образом.

Задача манипулирования в ситуации множественного выбора почти не рассматривалась не только ввиду сложности вычислений, но и из-за отсутствия методологии множественного выбора.

В указанном выше примере утверждение, что пятому участнику выгодно манипулировать, строится на том, что набор $\{d\}$ при неискренних предпочтениях пятого участника предпочитается набору $\{a, d\}$ при искренних. Однако этот факт напрямую не следует из предпочтений, поскольку у участника голосования имеются предпочтения лишь на множестве альтернатив, но предпочтения на множествах альтернатив неизвестны. Целью данной работы является описание известных, а также разработка и предложение различных новых схем расширения предпочтений, позволяющих сравнить всевозможные коллективные выборы для любого числа альтернатив.

Работа имеет следующую структуру. Сначала вводятся основные обозначения, используемые в рамках данной работы, и формулируется определение манипулирования для случая множественного выбора. Во втором разделе на основе анализа существующей литературы приводятся основные предположения относительно предпочтений на множествах альтернатив и анализируется соотношение между ними. В третьем разделе рассматриваются методы расширения предпочтений, позволяющие сравнить все наборы альтернатив. В четвертом разделе анализируются свойства расширенных предпочтений. В пятом разделе на примере показывается значение расширенных предпочтений при оценке манипулируемости схем агрегирования. В заключении сделаны выводы о проведенной работе в целом и описаны перспективы применения исследования.

1. Основные обозначения и определения

Проблема манипулирования исследуется на основе обозначений и постановки задачи, предложенной в статье [1]. Имеется множество A, состоящее из m альтернатив $(m > 2)$. Множество всех непустых подмножеств множества A мы будем обозначать $\mathbf{A} = 2^A \setminus \{\varnothing\}$[2]. Участники из конечного множества $N = \{1,..., n\}$, $(n > 1)$ имеют предпочтения P_i на множестве альтернатив из A и расширенное предпочтение EP_i на множестве $\mathbf{A}$.

Предполагается, что предпочтение P_i является линейным порядком, т.е. удовлетворяет следующим условиям:

- антирефлексивности ($\forall x \in A,\ \ x\overline{P}x$);
- транзитивности ($\forall x, y, z \in A\ \ xPy$ и $yPz \Rightarrow xPz$);
- связности ($\forall x, y \in A\ \ x \neq y$ либо xPy, либо yPx).

Иначе говоря, предполагается, что все альтернативы сравнимы и предпочтения строгие. Вектор $\vec{P}$, состоящий из предпочтений n участников, называется профилем. Коллективный выбор формируется с помощью функции коллективного выбора в соответствии с профилем $\vec{P}$ и является элементом множества $\mathbf{A}$. Обозначим множество всех линейных порядков на A как $\mathbf{L}$. Таким образом, функцию коллективного выбора можно представить как отображение $F : \mathbf{L}^n \to \mathbf{A}$.

---

[2] Заметим, что, следуя традиции, мы не рассматриваем пустое множество в качестве возможного выбора, поскольку практически все правила принятия решений не дают пустое множество в качестве результата голосования.

Дадим теперь определение манипулирования для случая множественного выбора. Пусть

$$\vec{P} = \{P_1, \ldots, P_i, \ldots, P_n\}$$

является профилем истинных предпочтений агентов, тогда как

$$\overrightarrow{P_{-i}} = \{P_1, \ldots, P_{i-1}, P_i', P_{i+1}, \ldots, P_n\}$$

будет профилем, в котором все участники, кроме i-го, заявляют свои истинные предпочтения. Обозначим сформированные выборы для этих профилей $\vec{P}$ и $\overrightarrow{P_{-i}}$ через $C(\vec{P})$ и $C(\overrightarrow{P_{-i}})$ соответственно. Будем говорить, что имеет место манипулирование, если для i-го агента $C(\overrightarrow{P_{-i}}) EP_i C(\vec{P})$, где EP_i – это расширенные предпочтения участника i. Другими словами, мы предполагаем, что коллективный выбор в условиях отклонения предпочитается выбору при истинных предпочтениях.

Также в работе будут использоваться в качестве примера лексикографические предпочтения, под которыми будут пониматься предпочтения P_i вида $x_1 P_i x_2 P_i x_3 P_i \ldots P_i x_n$ или $aP_i bP_i cP_i \ldots P_i z$.

Таким образом, мы описали основные предпосылки нашего анализа. Теперь необходимо изучить существующие в литературе условия, которым должны удовлетворять предпочтения на множестве альтернатив.

2. Основные предпосылки сопоставления наборов альтернатив

В этой части исследования нам необходимо сформулировать основные предпосылки, описывающие то, как взаимосвязаны предпочтения на множестве альтернатив с расширенными предпочтениями на множестве коллективных выборов. Первое условие основано на работе [2].

Условие 1. *Пусть* $i \in N$. *Пусть* $xP_i y$ *для каких-либо* $x, y \in A$. *Тогда* $\forall \vec{P}, \vec{P'} \in \mathbf{L}^n$, *если* $C(\vec{P}) = \{x\}$ *и* $C(\vec{P'}) = \{x, y\}$, *тогда* $C(\vec{P})\, EP_i\, C(\vec{P'})$; *если* $C(\vec{P}) = \{x, y\}$ *и* $C(\vec{P'}) = \{y\}$, *тогда* $C(\vec{P})\, EP_i\, C(\vec{P'})$; *если* $C(\vec{P}) = \{x\}$ *и* $C(\vec{P'}) = \{y\}$, *тогда* $C(\vec{P})\, EP_i\, C(\vec{P'})$.

Это условие можно свести к более простому виду. Пусть $i \in N$. Пусть $xP_i y$ для каких-либо $x, y \in A$. Тогда $\forall \vec{P}, \vec{P'} \in \mathbf{L}^n$, $\{x\} EP_i \{x, y\} EP_i \{y\}$ и $\{x\} EP_i \{y\}$. Данное предположение вполне логично, так как переход, например, от $\{x, y\}$ к $\{x\}$ не ухудшит положение индивида. При этом в наборе $\{x, y\}$ существует такой результат y, который в случае выбора ухудшит положение индивида по сравнению с $\{x\}$. Аналогично можно описать и оставшиеся отношения.

Следующее условие было представлено в работе [8] и известно как аксиома доминирования.

Аксиома доминирования Келли.

$\forall i \in N$ *и* $\forall \vec{P}, \vec{P'} \in \mathbf{L}^n$, *если* ($\forall x \in C(\vec{P})$ *и* $\forall y \in C(\vec{P'}) \Rightarrow xP_i y$), *тогда* $C(\vec{P})\, EP_i\, C(\vec{P'})$.

Если все элементы первого коллективного выбора нестрого предпочитаются всем элементам второго, то и сам первый коллективный выбор будет предпочитаться второму. Нет сомнений в том, что данное условие должно быть выполнено, если мы сравниваем множества альтернатив.

Условие 2. $\forall i \in N$ *и* $\forall \vec{P}, \vec{P}' \in \mathbf{L}^n$, *если*

$$\begin{bmatrix} \left(\forall x \in C(\vec{P})\ и\ \forall y \in C(\vec{P}') \Rightarrow\ xP_i y\ или\ x = y\right)\ и \\ \left[\left(\exists z \in C(\vec{P}), что\ \forall y \in C(\vec{P}') \Rightarrow\ zP_i y\right)\ или \left(\exists z \in C(\vec{P}'), что\ \forall x \in C(\vec{P}) \Rightarrow\ xP_i z\right)\right] \end{bmatrix},$$

тогда $C(\vec{P}) EP_i C(\vec{P}')$.

Данное условие было представлено в [10]. Используя аксиому доминирования Келли, условие 2 можно представить в более простом виде.

Условие 2'. $\forall i \in N$ *и* $\forall \vec{P}, \vec{P}' \in \mathbf{L}^n$, *если*

$\left[\left(\forall x \in C(\vec{P})\ и\ \forall y \in C(\vec{P}') \Rightarrow\ xP_i y\ или\ x = y\right)\ и \left(\exists z \in C(\vec{P})\ и\ \exists w \in C(\vec{P}') \Rightarrow\ zP_i w\right)\right]$, тогда $C(\vec{P}) EP_i C(\vec{P}')$.

Нетрудно показать, что из выполнения условия 2 следует выполнение условия 1. Стоит заметить, что данная предпосылка позволяет сравнивать общественные выборы, имеющие не более одного пересечения, так как у нас рассматриваются строгие предпочтения. Например, для лексикографических предпочтений это условие позволит сделать вывод, что $\{x_1, x_6\} EP_i \{x_6, x_9\}$, но не позволит сравнить множества $\{x_1, x_6, x_7\}$ и $\{x_6, x_7, x_9\}$.

Условие 3. $\forall i \in N$ *и* $\forall \vec{P}, \vec{P}' \in \mathbf{L}^n$, *если* $C(\vec{P}') \subset C(\vec{P})$

$$и\ если\ \left(\forall x \in \left(C(\vec{P}) - C(\vec{P}')\right)\ и\ \forall y \in C(\vec{P}') \Rightarrow\ xP_i y\ или\ x = y\right)$$
$$и\ \left(\exists z \in \left(C(\vec{P}) - C(\vec{P}')\right), что\ \ \forall y \in C(\vec{P}') \Rightarrow\ zP_i y\right),\ то\ C(\vec{P})\ EP_i\ C(\vec{P}').$$

Условие 4. $\forall i \in N$ *и* $\forall \vec{P}, \vec{P}' \in \mathbf{L}^n$, *если* $C(\vec{P}) \subset C(\vec{P}')$ *и если*

$$\left(\forall x \in C(\vec{P})\ \ и\ \forall y \in \left(C(\vec{P}') - C(\vec{P})\right) \Rightarrow\ xP_i y\ или\ x = y\right)$$
$$и\ \ \left(\exists z \in \left(C(\vec{P}') - C(\vec{P})\right), что\ \forall x \in C(\vec{P}) \Rightarrow\ xP_i z\right),\ то\ C(\vec{P})\ EP_i\ C(\vec{P}').$$

Последние два условия позволяют сравнивать наборы следующего вида: $\{x_1, x_6, x_7\} EP_i \{x_6, x_7\}$ (по условию 3) и $\{x_6, x_7\} EP_i \{x_6, x_7, x_9\}$ (по условию 4). В случае, когда расширенные предпочтения удовлетворяют условию транзитивности, можно сравнить наборы $\{x_1, x_6, x_7\} EP_i \{x_6, x_7, x_9\}$, т.е. множества, содержащие в пересечении более чем одну альтернативу. Таким образом, условия 3 и 4 при наличии транзитивности являются более сильными по сравнению с условиями 1 и 2. Сформулируем лемму.

Лемма 1. *Из выполнения условия 2 следует выполнение условия 1 и аксиомы доминирования Келли. Из выполнения условий 3 и 4, а также условия транзитивности расширенных предпочтений следует выполнение условия 2. То есть:*

$$условия\ 3\ и\ 4 + транзитивность\ EP_i \Rightarrow условие\ 2 \Rightarrow условие\ \ 1\ и\ аксиома\ Келли.$$

Доказательство леммы следует из определения самих условий, поэтому будет опущено.

Следующее условие было представлено в разных видах в работах [7, 14] как аксиома монотонности.

Аксиома монотонности. $\forall i \in N,\ \forall \vec{P} \in \mathbf{L}^n$ *и* $\forall x, y \in A \setminus C(\vec{P})$

$$\left(C(\vec{P}) \cup \{x\}\right) EP_i \left(C(\vec{P}) \cup \{y\}\right), \text{ если и только если } xP_i y.$$

Другими словами, если два коллективных выбора отличаются только одной альтернативой, то тот набор, который содержит более предпочитаемую альтернативу, должен быть более предпочтительным в смысле расширенных предпочтений.

Принцип Гэрденфорса. $\forall i \in N,\ \forall \vec{P} \in \mathbf{L}^n$ *и* $\forall y \in A \setminus C(\vec{P})$

1. $\left(C(\vec{P})\right) EP_i \left(C(\vec{P}) \cup \{y\}\right)$, *когда* $\forall x \in C(\vec{P})$ *выполнено* $xP_i y$;

2. $\left(C(\vec{P}) \cup \{y\}\right) EP_i \left(C(\vec{P})\right)$, *когда* $\forall x \in C(\vec{P})$ *выполнено* $yP_i x$.

Можно заметить, что первая часть этого определения является частным случаем условия 4, а вторая часть − частным случаем условия 5. Данный принцип, представленный в [4], известен как принцип Гэрденфорса. Его можно проинтерпретировать следующим образом. Если мы добавляем к некоторому набору альтернативу, которая более (менее) предпочтительна, чем все альтернативы в изначальном наборе, то итоговый набор должен быть более (менее) предпочтительным в смысле расширенных предпочтений.

Все указанные выше условия являются не слишком ограничительными и не позволяют сравнить все наборы. Например, не поддаются сравнению как наборы, соотношения между которыми кажутся вполне логичными ($\{x_1, x_6\}$ и $\{x_2, x_7\}$), так и наборы с явно неопределенными соотношениями ($\{x_1, x_6, x_7\}$ и $\{x_2, x_4\}$). Таким образом, необходимо доопределить данные предпосылки, а точнее ввести новые правила расширения предпочтений, которые бы не противоречили всем условиям и позволяли бы однозначно определить отношения предпочтения между элементами множества $\mathbf{A}$. Ниже описывается несколько известных и новых методов расширения предпочтений, которые можно разделить на три группы − лексикографические, вероятностные и методы усреднения рангов. Метод усреднения рангов сам по себе не позволяет сравнить все возможные наборы альтернатив и поэтому требует дополнительных ограничений. Было предложено 8 типов таких ограничений, с помощью которых можно получить различные расширенные предпочтения в виде линейного порядка.

3. Методы расширения предпочтений

3.1. Лексикографические методы

3.1.1. Лексимин

Данный метод расширения предпочтения был предложен П. Паттанаиком и Б. Пелегом в [11]. Однако здесь мы будем использовать его в виде, представленном в [15]. Основу этого способа составляет принцип сравнения худших альтернатив двух коллективных выборов. Если худшие альтернативы совпадают, то необходимо сравнивать вторые худшие альтернативы и так далее. Если дальнейшее сравнение невозможно, т.е. когда один из коллективных выборов является подмножеством другого, то больший по мощности набор предпочитается меньшему.

Математически данный способ выглядит следующим образом. Для данных предпочтений $P_i \in \mathbf{L}$ строятся расширенные предпочтения по принципу лексимин EP_i с использованием нижеприведенного алгоритма.

Сравниваются два общественных выбора $X, Y \in \mathbf{A}$:

1. Пусть оба множества содержат одинаковое число элементов $|X| = |Y| = k$, где $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Упорядочим элементы общественного выбора в порядке убывания предпочтения, т.е.: $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, где $x_j P_i x_{j+1}$ и $y_j P_i y_{j+1}$ $\forall j \in \{1, \dots, k-1\}$. Соотношение $X\ EP_i\ Y$ имеет место, если и только если $x_h P_i y_h$ для наибольшего $h \in \{1, \dots, k\}$, такого, что $x_h \neq y_h$.

2. Пусть $|X| \neq |Y|$. Теперь упорядочим элементы общественного выбора в порядке возрастания предпочтения, т.е.: $X = \{x_1, \dots, x_{|X|}\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_{|Y|}\}$, где $x_{j+1} P_i x_j$ $\forall j \in \{1, \dots, |X|-1\}$ и $y_{j+1} P_i y_j$ $\forall j \in \{1, \dots, |Y|-1\}$. Далее возможны два случая:

а) $x_h = y_h$ $\forall h \in \{1, \dots, \min\{|X|, |Y|\}\}$. То есть один набор является подмножеством другого. Тогда, как уже было сказано выше, будет предпочитаться больший по мощности общественный выбор. То есть $X\ EP_i\ Y$ тогда и только тогда, когда $|X| > |Y|$.

б) $\exists h \in \{1, \dots, \min\{|X|, |Y|\}\}$, для которого $x_h \neq y_h$. Тогда $X\ EP_i\ Y$, если и только если $x_h P_i y_h$ для наименьшего из $h \in \{1, \dots, \min\{|X|, |Y|\}\}$, для которого $x_h \neq y_h$.

Например, для случая трех альтернатив и лексикографических предпочтений расширенные предпочтения, построенные по принципу лексимин, будут иметь следующий вид:

$$\{a\} EP_i \{a,b\} EP_i \{b\} EP_i \{a,c\} EP_i \{a,b,c\} EP_i \{b,c\} EP_i \{c\}.$$

3.1.2. Лексимакс

Этот способ расширения предпочтений аналогичен лексимину, только сравниваются наилучшие элементы двух общественных выборов. Если они равны, то рассматриваются вторые наилучшие и т.д. При невозможности дальнейшего сравнения, когда один из наборов является подмножеством другого, то меньший по мощности набор предпочитается большему.

Предложим также математическое описание этого метода в соответствии с [15]. Для данных предпочтений $P_i \in \mathbf{L}$ строятся расширенные предпочтения по принципу лексимакс EP_i следующим способом.

Сравниваются два общественных выбора $X, Y \in \mathbf{A}$.

1. Пусть оба множества содержат одинаковое число элементов $|X| = |Y| = k$, где $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Упорядочим элементы общественного выбора в порядке убывания предпочтения, т.е.: $X = \{x_1, \dots, x_k\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, где $x_j P_i x_{j+1}$ и $y_j P_i y_{j+1}$ $\forall j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Соотношение $X\ EP_i\ Y$ имеет место, если и только если $x_h P_i y_h$ для наименьшего $h \in \{1,\ldots,k\}$, такого, что $x_h \neq y_h$.

2. Пусть $|X| \neq |Y|$. Аналогично упорядочим элементы общественного выбора в порядке убывания предпочтения, т.е.: $X = \{x_1,\ldots,x_{|X|}\}$ и $Y = \{y_1,\ldots,y_{|Y|}\}$, где $x_j P_i x_{j+1}$ $\forall j \in \{1,\ldots,|X|-1\}$ и $y_j P_i y_{j+1}$ $\forall j \in \{1,\ldots,|Y|-1\}$. Далее возможны два случая:

а) $x_h = y_h$ $\forall h \in \{1,\ldots,\min\{|X|,|Y|\}\}$. То есть один набор является подмножеством другого. $X\ EP_i\ Y$ тогда и только тогда, когда $|X| < |Y|$.

б) $\exists h \in \{1,\ldots,\min\{|X|,|Y|\}\}$, для которого $x_h \neq y_h$. Тогда $X\ EP_i\ Y$, если и только если $x_h P_i y_h$ для наименьшего из $h \in \{1,\ldots,\min\{|X|,|Y|\}\}$, для которого $x_h \neq y_h$.

Например, для случая трех альтернатив и лексикографических предпочтений расширенные предпочтения, построенные по принципу лексимакс, будут иметь следующий вид:

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\{a,b,c\}EP_i\{a,c\}EP_i\{b\}EP_i\{b,c\}EP_i\{c\}.$$

Оба способа расширения позволяют сравнить все возможные наборы.

3.2. Вероятностные методы

Введем новые методы расширения предпочтений. Данные способы упорядочивания альтернатив отличаются от методов «лекси» тем, что участник голосования ориентируется не на наличие альтернативы в итоговом выборе, а на вероятность того, что именно эта альтернатива выиграет в итоге. Предполагается, что вероятности победы каждой альтернативы равны между собой и соответственно равны $\frac{1}{m}$ и что все участники голосования знают это. Итоговая вероятность в наборе будет считаться по правилу Байеса. Например, в наборе $\{a,b,c\}$ − вероятность, что в итоговом выборе будет альтернатива a, равна $\dfrac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m}} = \frac{1}{3}$.

Здесь различаются два способа: упорядочение по убыванию вероятности наилучшей альтернативы и по возрастанию вероятности наихудшей. Рассмотрим эти способы.

3.2.1. Упорядочение по убыванию вероятности наилучшей альтернативы

Суть метода заключается в сравнении двух множественных выборов поэлементно. Если в упорядоченных наборах на первом месте стоят одинаковые альтернативы, то предпочитается тот набор, в котором вероятность окончательного выбора данной альтернативы выше. При равных вероятностях смотрят на соотношение остальных элементов.

Обсудим данный метод на примере. Как уже было сказано ранее, в наборе $\{a,b,c\}$ – вероятность, что в итоговом выборе будет альтернатива a, равная $\frac{1}{3}$ (полагаем, что вероятности победы каждой альтернативы из одного множественного выбора равны), в наборе $\{a,c\}$ вероятность равна $\frac{1}{2}$. Таким образом, при расширенных предпочтениях, построенных по принципу убывания вероятности наилучшей альтернативы, будет наблюдаться следующее соотношение между этими двумя наборами: $\{a,c\}EP_i\{a,b,c\}$. В общем виде для случая трех альтернатив и лексикографических предпочтений расширенные предпочтения выглядят следующим образом:

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\{a,c\}EP_i\{a,b,c\}EP_i\{b\}EP_i\{b,c\}EP_i\{c\}.$$

Предложим математическое описание данного метода. Для данных предпочтений $P_i \in \mathbf{L}$ строятся расширенные предпочтения по принципу убывания вероятности наилучшей альтернативы EP_i следующим способом. Сравниваются два коллективных выбора $X,Y \in \mathbf{A}$.

Упорядочим элементы коллективного выбора в порядке убывания предпочтения, т.е.: $X=\{x_1,\ldots,x_{|X|}\}$ и $Y=\{y_1,\ldots,y_{|Y|}\}$, где $x_jP_ix_{j+1}$ $\forall j\in\{1,\ldots,|X|-1\}$ и $y_jP_iy_{j+1}$ $\forall j\in\{1,\ldots,|Y|-1\}$. Далее производим следующие сопоставления:

1) если $x_1P_iy_1$, то $(X,Y)\in EP_i$;

2) если $x_1=y_1$ и $|X|<|Y|$, то $(X,Y)\in EP_i$;

3) если $x_1=y_1$ и $|X|=|Y|=k$, где $k\in\{2,\ldots,m-1\}$, то соотношение $(X,Y)\in EP_i$ имеет место, если и только если $x_hP_iy_h$ для наименьшего $h\in\{2,\ldots,k\}$, такого, что $x_h\neq y_h$.

Данное определение представлено в виде алгоритма. Из самой формулировки видно, что сравнению поддаются все наборы.

3.2.2. Упорядочение по возрастанию вероятности наихудшей альтернативы

Этот метод расширения аналогичен предыдущему с точностью до порядка сравнения элементов. Здесь основное внимание сосредоточено не на наличии лучшего, а на отсутствии худшего результата. Соответственно минимизируется вероятность выбора худших альтернатив. Предложим математическое описание метода и приведем пример.

Для данных предпочтений $P_i \in \mathbf{L}$ строятся расширенные предпочтения по принципу возрастания вероятности наихудшей альтернативы EP_i следующим способом. Сравниваются два коллективных выбора $X,Y\in\mathbf{A}$.

Упорядочим элементы коллективного выбора в порядке убывания предпочтения, т.е.: $X=\{x_1,\ldots,x_{|X|}\}$ и $Y=\{y_1,\ldots,y_{|Y|}\}$, где $x_jP_ix_{j+1}$ $\forall j\in\{1,\ldots,|X|-1\}$ и $y_jP_iy_{j+1}$ $\forall j\in\{1,\ldots,|Y|-1\}$. Далее производим следующее сопоставление:

1) если $x_{|X|} P_i y_{|Y|}$, то $(X,Y) \in EP_i$;

2) если $x_{|X|} = y_{|Y|}$ и $|X| > |Y|$, то $(X,Y) \in EP_i$;

3) если $x_{|X|} = y_{|Y|}$ и $|X| = |Y| = k$, где $k \in \{2,\ldots,m-1\}$, то соотношение $(X,Y) \in EP_i$ имеет место, если и только если $x_h P_i y_h$ для наибольшего $h \in \{2,\ldots,k\}$, такого, что $x_h \neq y_h$.

Расширенные предпочтения, построенные по этому методу для трех альтернатив и лексикографических предпочтений, имеют вид:

$$\{a\} EP_i \{a,b\} EP_i \{b\} EP_i \{a,b,c\} EP_i \{a,c\} EP_i \{b,c\} EP_i \{c\}.$$

В данном случае можно также утверждать, что расширенные предпочтения, построенные по вероятностным методам, также будут линейным порядком.

3.3. Метод усреднения рангов с дополнительными ограничениями

Существует другой подход к расширению предпочтений участников, основанный на назначении полезности каждой альтернативе и последующей максимизации ожидаемой полезности. Это известный подход, предложенный фон Нейманом и Моргенштерном. Определим этот метод для коллективного выбора в соответствии с [10].

Способ назначения полезностей. $\forall i \in N$ *существует функция* U^i, *принимающая действительные значения, такая, что* $\forall \vec{P}, \vec{P'} \in \mathbf{L}^n$,

$$C(\vec{P}) EP_i C(\vec{P'}) \Leftrightarrow \sum_{x \in C(\vec{P})} p_x U^i(x) > \sum_{y \in C(\vec{P'})} p_y U^i(y),$$

где $\forall x \in C(\vec{P})$, p_x *– это вероятность того, что* x *будет в конечном счете выбран из* $C(\vec{P})$ *и* $\forall y \in C(\vec{P'})$, p_y *– это вероятность того, что* y *будет в конечном счете выбран из* $C(\vec{P'})$.

Этот способ, очевидно, должен быть дополнен для использования в практических целях, т.е. необходимо описать механизм назначения полезности и процесс присвоения вероятностей.

Введем дополнительные условия.

1. Каждой альтернативе приписывается полезность в соответствии с местом, которое она занимает в предпочтениях участника. Таким образом, мы производим ранжирование: наиболее предпочитаемой альтернативе присваивается ранг m (общее количество альтернатив), следующей – $m-1$ и т.д. Наименее предпочитаемой альтернативе присваивается ранг 1.

2. Все альтернативы в коллективном выборе равновероятны. Таким образом, полезность набора альтернатив равна средней полезности всех альтернатив, входящих в коллективный выбор.

С учетом названных дополнительных условий данный метод упорядочения альтернатив можно назвать методом усреднения рангов. Следует заметить, что этот метод не позволяет сравнивать все коллективные выборы при $m > 2$. Например, для трех альтернатив при стандартных предпочтениях существуют наборы $\{a,b,c\}$, $\{a,c\}$ и $\{b\}$, которые имеют одинаковую полезность. Необходимо рассмотреть дополнительные условия устранения несравнимости, т.е. дополнительные алгоритмы, которые будут накладываться на множества, оставшиеся несравнимыми после упорядочения в соответствии с методом усреднения рангов. Метод усреднения рангов в сформулированном виде ранее не использовался для сравнения множеств альтернатив.

3.3.1. Лексимин и лексимакс дополнения

Этот способ устранения несравнимости предполагает применение лексикографических дополнений на тех наборах, которые имеют равную полезность. В частности, для случая трех альтернатив полученные расширенные предпочтения будут соответствовать предпочтениям, полученным по правилам лексимин или лексимакс, в зависимости от применяемого метода. Однако на больших множествах эти два типа расширенных предпочтений не будут совпадать. Например, для случая четырех альтернатив и стандартных предпочтений расширенные предпочтения, построенные по принципу лексимакс, выглядят следующим образом:

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\{a,b,c\}EP_i\{a,b,c,d\}EP_i\{a,b,d\}EP_i\{a,c\}EP_i\{a,c,d\}EP_i\{a,d\}EP_i$$
$$EP_i\{b\}EP_i\{b,c\}EP_i\{b,c,d\}EP_i\{b,d\}EP_i\{c\}EP_i\{c,d\}EP_i\{d\}.$$

Расширенные же предпочтения, построенные методом усреднения рангов с дополнением лексимакс, имеют следующий вид (подчеркнуты группы наборов с одинаковым средним рангом, к которым применяется дополнение):

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\underline{\{a,b,c\}EP_i\{a,c\}EP_i\{b\}}EP_i\{a,b,d\}EP_i\underline{\{a,b,c,d\}EP_i\{a,d\}EP_i\{b,c\}}EP_i$$
$$EP_i\{a,c,d\}EP_i\underline{\{b,c,d\}EP_i\{b,d\}EP_i\{c\}}EP_i\{c,d\}EP_i\{d\}.$$

Несовпадение полученных предпочтений очевидно. Аналогичные результаты получаются и при обращении к методу лексимин.

3.3.2. Вероятностные дополнения

Этот метод заключается в использовании вероятностных дополнений на те множества, которые нельзя сравнить методом усреднения рангов. Например, для четырех альтернатив и стандартных предпочтений расширенные предпочтения, построенные методом усреднения рангов с дополнительным упорядочением по возрастанию вероятности наихудшей альтернативы, имеют следующий вид (подчеркнуты группы наборов с одинаковым средним рангом, к которым применяется дополнение):

$$\{a\}EP_i\{a,b\}EP_i\underline{\{b\}EP_i\{a,b,c\}EP_i\{a,c\}}EP_i\{a,b,d\}EP_i\underline{\{b,c\}EP_i\{a,b,c,d\}EP_i\{a,d\}}EP_i$$
$$EP_i\{a,c,d\}EP_i\underline{\{c\}EP_i\{b,c,d\}EP_i\{b,d\}}EP_i\{c,d\}EP_i\{d\}.$$

3.3.3. Рискофил и рискофоб дополнения

Данный метод основан на отношении участника голосования к риску, когда известно, что несколько исходов принесут ему одинаковую ожидаемую полезность. Построение расширенных предпочтений основано на том, что сравнивается дисперсия выигрыша. Склонный к риску участник голосования будет предпочитать наиболее рискованный набор, несклонный – наименее. Таким образом, подсчет дисперсий и упорядочение по их возрастанию или убыванию позволяет устранить несравнимость наборов с одинаковым средним рангом.

Для трех, четырех, пяти и шести альтернатив рискофил-дополнение аналогично методу упорядочения по убыванию вероятности наилучшей альтернативы, а рискофоб-дополнение – методу упорядочения по возрастанию вероятности наихудшей. Для семи альтернатив такого совпадения уже не наблюдается.

Приведем пример. Для четырех альтернатив и стандартных предпочтений метод усреднения рангов с рискофил-дополнением упорядочит всевозможные наборы следующим способом (подчеркнуты группы наборов с одинаковым средним рангом, к которым применяется дополнение):

$$\{a\} EP_i \{a,b\} EP_i \underline{\{a,c\} EP_i \{a,b,c\} EP_i \{b\}} EP_i \{a,b,d\} EP_i \underline{\{a,d\} EP_i \{a,b,c,d\} EP_i \{b,c\}} EP_i$$
$$EP_i \{a,c,d\} EP_i \underline{\{b,d\} EP_i \{b,c,d\} EP_i \{c\}} EP_i \{c,d\} EP_i \{d\}.$$

3.3.4. Дополнения в виде упорядочения по мощности[3)]

Влияние мощности набора на предпочтение наборов тесно связано с понятием свободы выбора, которое обсуждалось в [6, 12, 16]. Данный способ заключается в упорядочении наборов, имеющих одинаковый ранг, по убыванию/возрастанию мощности. Этот метод основан на возможных предпочтениях участника голосования на наборах с одинаковым ожидаемым выигрышем по принципу определенности итогового выбора. То есть участник может предпочитать набор из одной альтернативы набору из трех (когда у них одинаковый ранг), так как в первом случае исход голосования известен. Также возможна и обратная ситуация, когда участник хочет оставить надежду, что исход будет состоять из более предпочитаемой альтернативы и, соответственно, предпочитает набор больший по мощности меньшему.

Аналогично предыдущему типу дополнения при трех альтернативах наблюдается совпадение результатов с другими способами. В частности, принцип упорядочения по возрастанию мощности для трех альтернатив дает такой же результат, что лексимин и метод усреднения рангов с дополнением лексимин. Принцип упорядочения по убыванию мощности совпадет с лексимаксом и методом усреднения рангов с дополнением лексимакс соответственно. Однако при увеличении числа альтернатив возникает сразу несколько проблем. Помимо несовпадения расширенных предпочтений, построенных по этому методу, с другими способами возникает несравнимость некоторых наборов. Эта несравнимость устраняется использованием одного из тех дополнений, которые были описаны выше.

В качестве примера приведем расширенные предпочтения, построенные методом усреднения рангов с первым дополнением в виде упорядочения по убыванию мощности и вторым дополнением лексимакс (одной чертой указаны множества, к которым применяется первое дополнение; двойной чертой обозначены множества, оставшиеся несравнимыми после применения первого дополнения, и на которые накладывается второе):

---

3) Данный метод разработан совместно с Ф.Т. Алескеровым.

$$\{a\}\, EP_i \{a,b\}\, EP_i \underline{\{a,b,c\}\, EP_i \{a,c\}\, EP_i \{b\}}\, EP_i \{a,b,d\}\, EP_i \underline{\{a,b,c,d\}\, EP_i \underline{\{a,d\}\, EP_i \{b,c\}}}\, EP_i$$

$$EP_i \{a,c,d\}\, EP_i \underline{\{b,c,d\}\, EP_i \{b,d\}\, EP_i \{c\}}\, EP_i \{c,d\}\, EP_i \{d\}.$$

В данном случае расширенные предпочтения совпадают с методом усреднения рангов с дополнением лексимакс, но на пяти и более альтернативах данные способы приводят к различным результатам.

4. Исследование различных способов расширения предпочтений

Сформулируем несколько утверждений.

Лемма 2. *Если обычные предпочтения P являются линейным порядком, то и расширенные предпочтения, построенные по принципу лексимин, лексимакс или любым из вероятностных методов, будут линейным порядком.*

Это условие для отношений P, удовлетворяющих антисимметричности, связности и транзитивности, и лексикографических методов было показано в работе [15]. Доказательство леммы в общем виде следует из определения всех способов.

Лемма 3. *Если обычные предпочтения P являются линейным порядком, то расширенные предпочтения, построенные по методу усреднения рангов с дополнениями, будут являться линейным порядком, если*

1) последнее дополнение является лексимин, лексимакс или вероятностным дополнением;

2) последнее дополнение является упорядочением по мощности и количество альтернатив $m = 3$;

3) последнее дополнение является рискофил/рискофоб-дополнением и $3 \le m \le 6$.

Первый пункт леммы 3 является следствием леммы 2, так как если алгоритм позволяет сравнить любые элементы множества $\mathbf{A}$, то он позволит сравнить и все элементы любого его подмножества. Второй и третий пункты доказываются последовательным применением метода усреднения рангов с необходимым дополнением на все большем числе альтернатив. Начиная с определенного m появляются множества, не поддающиеся сравнению. Например, для пункта 2 при $m = 4$ появляются несравнимые для данного дополнения множества $\{a,d\}$ и $\{b,c\}$. Для рискофил/рискофоб-дополнений несравнимы наборы $\{a,e,f\}$ и $\{b,c,g\}$ при $m = 7$. Нетрудно показать, что если при $m = \overline{m}$ появляются несравнимые наборы, то и при $m = \overline{m}+1$ эти наборы также будут несравнимы. Таким образом, можно считать лемму доказанной.

Стоит упомянуть, что часть алгоритмов расширения предпочтений при малом числе альтернатив дают одинаковые результаты. В частности, для 3, 4 и 5 альтернатив можно построить 4, 10 и 12 способов расширения предпочтений соответственно. Однако количество способов при большем числе альтернатив неизвестно. Основываясь на результатах леммы 3, можно лишь утверждать, что при достаточно больших m для одних и тех же обычных предпочтений может быть построено не более 56 различных расширенных предпочтений в соответствии с предложенными нами методами. Более подробную информацию о возможных совпадениях способов можно получить только путем последовательного применения всех алгоритмов для разных m.

5. Значение расширенных предпочтений

Покажем на примере, как может влиять выбранный метод расширения предпочтений на результат оценки манипулируемости схем голосования. Рассмотрим случай, когда имеется пять участников голосования и четыре альтернативы. Пусть предпочтения являются линейными порядками и выглядят следующим образом:

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
a	b	d	a	b
c	c	b	c	d
d	a	a	d	c
b	d	c	b	a.

Пусть выбор производится в соответствии с правилом Борда, тогда результатом голосования будет набор $\{a,b\}$. Рассмотрим пятого участника голосования. Указанные альтернативы стоят в его обычных предпочтениях на четвертом и первом местах соответственно. То есть для пятого участника этот выбор мы можем представить в виде $\{x_1, x_4\}$, что говорит о наличии в итоговом выборе альтернатив, стоящих на соответствующих местах. Заметим, что пятый участник может исказить предпочтения, например, поменяв альтернативы d и c местами. В этом случае коллективный выбор примет вид набора $\{a,b,c\}$ или, с точки зрения упорядоченных искренних предпочтений манипулирующего участника, $\{x_1, x_3, x_4\}$. Будет ли в данном случае происходить именно такое манипулирование, зависит от того, как предпочитаются наборы $\{x_1, x_3, x_4\}$ и $\{x_1, x_4\}$. В разных расширенных предпочтениях их отношение различно. Например, в случае предпочтений по принципу лексимакс и по возрастанию вероятности наихудшей альтернативы $\{x_1, x_3, x_4\} EP_i \{x_1, x_4\}$, что говорит о том, что пятому участнику будет выгодно исказить предпочтения указанным выше способом. При всех остальных методах такое искажение невыгодно.

Заключение

В работе предложено несколько схем расширения предпочтений. Было выделено три группы методов расширения предпочтений: лексикографические, вероятностные и метод усреднения рангов с дополнениями.

Два лексикографических метода (лексимин и лексимакс) можно найти в [10, 15], в то время как два вероятностных алгоритма – упорядочение по убыванию вероятности наилучшей альтернативы и по возрастанию вероятности наихудшей – не рассматривались ранее. Основным преимуществом данных методов является полное устранение несравнимости. Доказано, что если обычные предпочтения являются линейными порядками, то расширенные предпочтения, построенные любым из названных способов, тоже будут линейными порядками.

Известный ранее способ присвоения полезностей альтернативам, основанный на теории ожидаемого выигрыша, адаптирован для использования в поставленной задаче. Рассмотрен частный случай данного метода – метод усреднения рангов, который в то же время не решает поставленных задач: построенные расширенные предпочтения не обладают свойством связности. Для устранения оставшейся несравнимости предложены несколько типов дополнений:

- лексимин – лексимакс дополнения;
- вероятностные дополнения;
- рискофил/рискофоб-дополнения;
- дополнения, основанные на упорядочении по мощности.

Первые два типа дополнений преобразованы из лексикографических и вероятностных методов, поэтому построенные на их основе расширенные предпочтения также являются линейными порядками. В работе показано, что третий тип дополнений не позволяет сравнить все наборы, если для выбора предлагается семь и более альтернатив. Для больших наборов проблема устраняется последующим наложением на несравнимые наборы еще одного дополнения.

Последний вид дополнения не позволяет сравнить все выборы уже при четырех альтернативах, поэтому требует введения последующих дополнений. На множествах мощностью до шести альтернатив несравнимость устраняется дополнительным наложением одного из первых трех способов. Однако только первые два метода позволяют полностью устранить несравнимость на множествах с большим числом альтернатив. Таким образом, при достаточно большом числе альтернатив, среди которых производится выбор, можно выделить 56 способов расширения предпочтений, различающихся порядком наложения дополнений.

Стоит заметить, что метод усреднения рангов с дополнениями ранее для построения расширенных предпочтений на множествах альтернатив не рассматривался.

Предпочтения могут применяться в достаточно широком круге задач, включающих в себя не только теорию голосования и коллективных действий, но и модели выбора в условиях неопределенности.

Результаты данного исследования позволяют также решить проблему оценки манипулируемости схем агрегирования предпочтений в условиях множественного выбора.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aleskerov F., Kurbanov E.* Degree of Manipulability of Social Choice Procedures // Alkan A. et al. (eds.) Current Trends in Economics. Berlin Heidelberg, N.Y.: Springer, 1999.

2. *Barbera S.* The Manipulability of Social Choice Mechanisms that do not Leave Too Much to Chance // Econometrica. 1977. Vol. 45. P. 1572–1588.

3. *Favardin P., Lepelley D.* Some Further Results on the Manipulability of Social Choice Rules // Social Choice and Welfare. 2006. Vol. 26. P. 485–509.

4. *Gärdenfors P.* Manipulation of Social Choice Functions // Journal of Economic Theory. 1976. Vol. 13. P. 217–228.

5. *Gibbard A.* Manipulation of Voting Schemes // Econometrica. 1973. Vol. 41. P. 587–601.

6. *Jones P., Sugden R.* Evaluating Choice // International Review of Law and Economics. 1982. № 2. P. 47–69.

7. *Kannai Y., Peleg B.* A Note on the Extension of an Order on a Set to the Power Set // Journal of Economic Theory. 1984. № 32. P. 172–175.

8. *Kelly J.* Strategy-proofness and Social Choice Functions Without Single Valuedness // Econometrica. 1977. № 45. P. 439–446.

9. *Kelly J.* Almost All Social Choice Rules Are Highly Manipulable, But Few Aren't // Social Choice and Welfare. 1993. Vol. 10. P. 161–175.

10. *Pattanaik P.* Strategy and Group Choice. Amsterdam: North-Holland, 1978.

11. *Pattanaik P.K., Peleg B.* An Axiomatic Characterization of the Lexicographic Maximin Extension of an Ordering Over a Set to the Power Set // Social Choice and Welfare. 1984. № 1. P. 113–122.

12. *Pattanaik P.K., Xu Y.* On Ranking Opportunity Sets in Terms of Freedom of Choice // Recherches Economiques de Louvain. 1990. № 56. P. 383–390.

13. *Pritchard G., Wilson M.* Exact Results on Manipulability of Positional Voting Rules: CDMTCS Research Report Series. 2005.

14. *Roth A., Sotomayor M.A.O.* Two-sided Matching: A Study Ingame Theoretic Modelling and Analysis. Cambridge University Press, 1990.

15. *Sanver R., Ozyurt S.* A General Impossibility Result on Strategy-proof Social Choice Hyperfunctions // Games and Economic Behavior. Forthcoming.

16. *Satterthwaite M.* Strategy-proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions // Journal of Economic Theory. 1975. Vol. 10. P. 187–217.

17. *Sen A.* Maximization and the Act of Choice // Econometrica. 1997. Vol. 65. № 4. P. 745–779.