К теории оптимального экономического роста

Лобанов С.Г.

Многочисленные исследования условий длительного экономического роста содержат математическую задачу оптимального управления на неограниченном промежутке времени. В настоящей статье указаны некоторые часто допускаемые при этом принципиальные ошибки. Для производственной функции Кобба-Дугласа приводится полное решение задачи оптимального экономического роста в замкнутой односекторной экономике.

Постановка задачи об оптимальном экономическом росте давно уже входит в учебники. Например, одна из частей монографии [1] целиком посвящена описанию динамики экономического роста и задаче управления этой динамикой. Вместе с тем, надо заметить, что применение принципа максимума Понтрягина для построения оптимального управления в [1] и некоторых других работах ([2], [3]) проводится не последовательно - не учитываются ограничения на управление. Поэтому полученные там выводы справедливы не для всей оптимальной траектории движения, а лишь для тех участков, где оптимальное управление не принимает граничные значения.

В данной работе показано, что в ряде случаев оптимальное управление действительно частично проходит по границе области возможных значений, а затем, не теряя непрерывности по времени, с изломом уходит внутрь области допустимых значений управления. При этом удается получить явные выражения зависимости от времени и для оптимальной траектории движения, и для оптимального управления. Кроме того, оказывается возможным решить задачу синтеза управления, т.е. найти явное выражение зависимости оптимального управления от состояния системы (фазовой координаты). Последнее позволяет сформулировать универсальное “золотое правило” выбора оптимального уровня потребления в зависимости от текущего уровня фондовооруженности, справедливое для всех моментов времени и всех не слишком больших начальных уровней фондовооруженности. Это правило справедливо в неизменном виде и для режима сбалансированного роста, и для нестационарных оптимальных режимов, обеспечивая устойчивое стремление к состоянию сбалансированного роста.

Данная работа стала возможной благодаря Э.Б. Ершову, который привлек внимание автора к теории оптимального экономического роста.

Лобанов С.Г. - доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и эконометрики ГУ ВШЭ.

1. Неоклассическая модель оптимального экономического роста

Напомним постановку задачи. Детальные сведения можно найти в книге [1] (часть 5). Основные классические работы по теории экономического роста собраны в трехтомнике [4]. Много дополнительных сведений на эту тему, в том числе исторического характера, содержится в книгах [6] и [7].

Рассмотрим модель замкнутой односекторной экономики.

Пусть $K(t), L(t), Y(t), C(t), I(t)$ обозначают соответственно величину капитала, количество работников, плотность выпуска продукции, плотность потребления, плотность инвестирования в момент времени t. Это означает, что выпуск продукции за время $[t_1, t_2]$ составит $\int_{t_1}^{t_2} Y(t)dt$. При этом часть выпуска потребляется, остальное инвестируется в соответствии с соотношением $Y(t) = C(t) + I(t)$. Здесь $C(t)$ - управляемая величина.

Кроме того, пусть μ - коэффициент амортизации капитала, т.е. доля капитала, требующая замены.

Изменение капитала за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$ с учетом инвестиций и амортизации составит

$$K(t + \Delta t) - K(t) = \int_t^{t+\Delta t} I(\tau)d\tau - \int_t^{t+\Delta t} \mu K(\tau)d\tau .$$

Предполагая все функции под знаком интеграла непрерывными, найдем производную по Δt обеих частей последнего равенства при $\Delta t = 0$

$$\dot{K}(t) = I(t) - \mu K(t) = Y(t) - C(t) - \mu K(t)$$

Обозначим через $k(t)$ фондовооруженность труда $\frac{K(t)}{L(t)}$, через $y(t)$ производительность труда $\frac{Y(t)}{L(t)}$, через $c(t)$ потребление, приходящееся на одного работника $\frac{C(t)}{L(t)}$.

Предположим, что

$y(t) = f(k(t))$ - производительность труда зависит только от фондовооруженности труда;

$\dot{L} = \nu L, \nu > 0$ - число работников увеличивается с постоянным темпом роста ν.

При выполнении этих предпосылок справедливо соотношение:

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2} = \frac{(Y - C - \mu K)L - K\nu L}{L^2} = f(k) - \lambda k - c,$$

где $\lambda = \mu + \nu$. Полученное уравнение называется в [1] основным дифференциальным уравнением неоклассической модели экономического роста. Для краткости далее это уравнение называется просто уравнением движения.

Обычно в моделях экономического роста рассматривается функция $f(k) = k^{\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$ (функция Кобба-Дугласа). Учитывая это, потребуем, чтобы всюду далее выполнялись условия:

(1) $$f(0) = 0,$$

(2) $$f'(k) > 0, \quad f''(k) < 0 \text{ для всех } k > 0,$$

(3) $$\lim_{k \to 0+} f(k) = +\infty, \quad \lim_{k \to +\infty} f'(k) = 0.$$

Траектория движения однозначно определяется начальным значением $k(0)$ и функцией $c(t)$.

Будем считать величину $c(t)$ управляемой величиной - кусочно-непрерывной функцией, принимающей на промежутке $[0, \infty)$ значения в пределах $0 \le c(t) \le f(k(t))$. Тогда при достаточно больших k правая часть уравнения движения отрицательна и, следовательно, все решения ограничены. Это означает также, что решения определены при всех $t \ge 0$.

Предположим, что задана непрерывная функция $U : [0, \infty) \to [0, \infty)$, дважды дифференцируемая во всех ненулевых точках, причем

(4) $$U'(c) > 0, \quad U''(c) < 0 \text{ для всех } c > 0,$$

(5) $$\lim_{c \to 0+} U'(c) = +\infty, \quad \lim_{c \to +\infty} U'(c) = 0.$$

При всех $t \ge 0$ число $U(c(t))$ интерпретируется как полезность потребления на одного рабочего в момент t. Если считать, что доля работников среди потребителей l не зависит от времени, то на одного потребителя будет приходиться в момент t плотность потребления $lc(t)$. Так что можно интерпретировать $U(c(t))$ как полезность потребления одного потребителя для функции полезности $\widetilde{U}(c) = U(c/l)$, также обладающей свойствами (4)-(5). Характеристикой полезности всей траектории потребления $c(t)$, $t \in [0, \infty)$ будем считать число

(6) $$\int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(c(t))\, dt,$$

где δ - заданное положительное число, называемое нормой дисконтирования. Множитель $e^{-\delta t}$ задает предпочтение потребления для различных моментов времени.

Таким образом, задача о неоклассическом оптимальном росте представляет собой задачу о выборе кусочно-непрерывной траектории потребления на одного рабочего, доставляющей максимальное значение интегралу (6) с учетом ограничений:

(7) $$\dot{k} = f(k) - \lambda k - c,\ k(0) = k_0\,,$$

(8) $$0 \le c(t) \le f(k(t)) = y(t)\,,$$

где k_0, λ, δ - заданные положительные числа, f, U - заданные функции, обладающие свойствами (1)-(5).

2. Необходимые условия оптимальности (принцип максимума для задачи со свободным концом на полупрямой)

В этом разделе рассматривается специальный случай принципа максимума. Полученные здесь результаты будут использованы в следующих разделах для решения задачи об оптимальном экономическом росте.

Для удобства ссылок на книгу Алексеева В.М., Тихомирова В.М., Фомина С.В. [5] воспользуемся принятыми там обозначениями и терминологией.

Пусть $\mathfrak{U}$ - фиксированное подмножество $\mathbb{R}$, функции $f:[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$ и $\varphi:[0,\infty)\times[0,\infty)\times\mathfrak{U}\to\mathbb{R}$ непрерывны по совокупности переменных, частные производные f'_x и φ'_x существуют для всех $x>0$ и непрерывны по совокупности переменных.

Пару $(x(\cdot),u(\cdot))$ будем называть управляемым процессом для задачи

(9) $$\int_0^\infty f(t,x(t),u(t))dt \to \inf\,,$$

(10) $$\dot{x} = \varphi(t,x(t),u(t)), x(0) = x_0\,,$$

(11) $$u \in \mathrm{U}\,,$$

если управление $u(\cdot):[0,\infty)\to\mathfrak{U}$ - кусочно-непрерывная функция, фазовая траектория $x(\cdot):[0,\infty)\to(0,\infty)$ - кусочно-непрерывно дифференцируемая функция и при этом всюду, кроме точек разрыва управления $u(\cdot)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и начальному условию (10).

Управляемый процесс $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ называется оптимальным, если найдется такое $\varepsilon>0$, что для всякого управляемого процесса $(x(\cdot),u(\cdot))$ такого, что $\left|x(t)-\hat{x}(t)\right|<\varepsilon$ при всех $t\ge 0$, выполняется неравенство:

$$\int_0^\infty f(t,x(t),u(t))dt \ge \int_0^\infty f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t))dt\,.$$

Теорема 1. *Пусть* $(\hat{x}(\cdot),\hat{u}(\cdot))$ *- оптимальный управляемый процесс задачи* (9)-(11),

$$\hat{f}(t) = f(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)),$$

$$\hat{\varphi}(t) = \varphi(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)),$$

$$\hat{f}_x(t) = f'_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)),$$

$$\hat{\varphi}'_x(t) = \varphi'_x(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)),$$

сходится интеграл

(12) $$p_0 = \int_0^\infty e^{\int_0^t \hat{\varphi}'_x(\tau)d\tau} f'_x(t)dt.$$

Тогда для решения $\hat{p}(\cdot)$ уравнения

(13) $$-\dot{p}(t) = p(t)\hat{\varphi}'_x(t) - \hat{f}'_x(t),$$

с начальным условием

(14) $$p(0) = p_0,$$

в точках непрерывности управления $\hat{u}(\cdot)$ выполнен принцип максимума

(15) $$\max_{u\in\mathfrak{U}}[\hat{p}(t)\varphi(t,\hat{x}(t),u) - f(t,\hat{x}(t),u)] = \hat{p}(t)\hat{\varphi}(t) - \hat{f}(t).$$

Доказательство. Доказательство данной теоремы без существенных изменений получается из доказательства принципа максимума со свободным концом для конечного промежутка времени, опубликованного в [5] (раздел 1.5.4). Наше начальное условие (12), введенное вместо граничного условия на правом конце отрезка времени $p(t_1) = 0$ из [5], предназначено для тех же целей - оба условия гарантируют обращение в нуль при стремлении t к правой границе рассматриваемого промежутка времени некоторого слагаемого из приведенного в [5] доказательства. □

Тот факт, что начальное условие $p(0) = p_0$ равносильно граничному условию:

(16) $$\lim_{t\to+\infty} p(t)e^{\int_0^t \hat{\varphi}'_x(\tau)d\tau} = 0,$$

найдет применение в одном из последующих разделов статьи.

3. Принцип максимума для задачи оптимального экономического роста

Ограничение на управление $0 \le c(t) \le f(k(t))$ из задачи (6)-(8) не позволяет непосредственно применить принцип максимума, поскольку оно не представляется в виде $c(t) \in \mathfrak{U}$, где $\mathfrak{U}$ - фиксированное подмножество $\mathbb{R}$. Здесь точка $c(t)$ принадлежит отрезку $[0, f(k(t))]$ с подвижным правым концом.

Воспользуемся тем, что $c(t)$ можно единственным способом представить в виде $c(t) = (1-u(t))f(k(t))$, где $u(t)$ - число из отрезка $[0,1]$, которое является коэффициентом сбережения, так как f есть плотность потока выпуска в расчете на одного работника, его часть $(1-u)f$ потребляется, остальное есть $f - c = uf = \dot{k} + \lambda k$.

Таким образом, после изменения знака критерия оптимальности получается приспособленная для применения принципа максимума задача:

$$\int_0^\infty - e^{-\delta t} U((1-u(t))f(k(t)))\,dt \to \inf\ , \tag{17}$$

$$\dot{k} = u(t)f(k) - \lambda k,\ k(0) = k_0\ , \tag{18}$$

$$u(t) \in \mathfrak{U}\ , \tag{19}$$

эквивалентная исходной задаче (6)-(8).

Далее для краткости записи мы часто будем опускать аргумент t функций $x(\cdot)$, $u(\cdot)$, $p(\cdot)$, $\hat{x}(\cdot)$, $\hat{u}(\cdot)$, $\hat{p}(\cdot)$.

Применение теоремы 1 к задаче (17)-(19) приводит к соотношению:

$$p_0 = \int_0^\infty e^{\int_0^t (\hat{u}f'(\hat{k})-\lambda)d\tau} e^{-\delta t} U'((1-\hat{u})f(\hat{k}))(1-\hat{u})f'(\hat{k})\,dt\ ,$$

к дифференциальному уравнению:

$$\dot{p} = p(\lambda - \hat{u}f'(\hat{k})) - e^{-\delta t} U'((1-\hat{u})f(\hat{k}))(1-\hat{u})f'(\hat{k})\ , \tag{20}$$

и условию максимума по $u \in [0,1]$ выражения

$$p(uf(\hat{k}) - \lambda\hat{k}) + e^{-\delta t} U((1-\hat{u})f(\hat{k}))\,.$$

Производная по u последнего выражения есть

$$pf(\hat{k})) - e^{-\delta t} U'((1-\hat{u})f(\hat{k}))f(\hat{k})\,. \tag{21}$$

Пользуясь тем, что функция U' - убывающая, заметим, что (21) отрицательно при всех $u \in [0,1)$ тогда и только тогда, когда оно отрицательно при $u = 0$.

Тем самым найдено условие монотонного убывания (21) по u на всем отрезке $[0,1]$. Вывод: $u=0$ тогда и только тогда, когда

(22) $$p_0 \le U'(f(k_0)).$$

В следующем разделе будут указаны условия на U и f, при выполнении которых неравенство (22) справедливо для всех достаточно больших начальных значений k_0. С учетом автономности уравнения движения (18) последнее, на самом деле, означает, что $u(t)=0$ на некотором примыкающем к нулю промежутке времени.

4. Достаточные условия равенства нулю оптимального коэффициента сбережений

Пусть $f(k)=k^{\alpha}, 0<\alpha<1$, $\beta=1-\alpha$, $\gamma=\alpha/\beta$, $\sigma=(1-\alpha)\lambda$.

Введем новую фазовую переменную $x=k^{\beta}$. Тогда интегральный функционал и уравнение движения примут вид:

$$\int_0^{\infty} - e^{-\delta t}U((1-u)x^{\gamma})dt,$$

(23) $$\dot{x} = \beta u - \sigma x, \quad x(0) = k_0^{\beta} = x_0 .$$

Уравнение (20) преобразуется в уравнение

(24) $$\dot{p} = \sigma p - e^{-\delta t}\gamma U'((1-\hat{u})\hat{x}^{\gamma})(1-\hat{u})\hat{x}^{\gamma-1} .$$

Максимум по u теперь надо искать у функции

$$p(\beta u - \sigma x) + e^{-\delta t}U((1-\hat{u})\hat{x}^{\gamma}) .$$

Неравенству (22) соответствует неравенство

(25) $$p_0 \le \frac{1}{\beta}U'(\hat{x}_0^{\gamma})\hat{x}_0^{\gamma} .$$

Условия следующей теоремы выполняются, например, для любой функции U типа Кобба-Дугласа.

Теорема 2. *Если функция U удовлетворяет условиям* (4)-(5), *а также существуют такие числа $M>0$ и $0<\rho<1$, что*

(26) $$cU'(c) < Mc^{\rho} \text{ при всех } c>0,$$

и такие числа $A, B>0$ и $0<\omega<1$, что

(27) $$Ac^{\rho-\frac{\omega}{\gamma}} \le cU'(c) \text{ при всех } c>B,$$

то найдется такое число $x_0^{\text{крит}}$, *что для всех начальных значений* $x_0 > x_0^{\text{крит}}$ *сразу после начала движения на некотором промежутке времени ненулевой длины управление* $u(t)$ *равно нулю.*

Доказательство. Построим оценку сверху для

$$p_0 = \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-\delta t} \gamma U'((1-\hat{u})\hat{x}^\gamma)(1-\hat{u})\hat{x}^{\gamma-1}\,dt\,.$$

Из условия (26) следует, что при всех $t \ge 0$

$$U'((1-\hat{u})\hat{x}^\gamma)(1-\hat{u})\hat{x}^{\gamma-1} < M\hat{x}^\Omega\,,$$

где $\Omega = \gamma\rho - 1$. Поэтому

$$p_0 < \gamma M \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-\delta t} \hat{x}^\Omega\,dt\,.$$

Сравнивая решения с одинаковыми начальными значениями уравнения движения (23) и уравнений $\dot{x} = -\sigma x$ и $\dot{x} = \beta - \sigma x$ с меньшей и большей правой частью, приходим к оценке:

$$x_0 e^{-\sigma t} \le \hat{x}(t) \le \left(x_0 - \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\sigma t} + \frac{1}{\lambda}\,.$$

Отсюда при $\Omega \ge 0$ и $x_0 \ge \dfrac{1}{\lambda}$

$$p_0 < \gamma M x_0^\Omega \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-\delta t}\,dt = \frac{\gamma M}{\delta + \sigma} x_0^\Omega < \frac{\gamma M}{\delta} x_0^\Omega\,.$$

При $\Omega < 0$

$$p_0 < \gamma M x_0^\Omega \int_0^\infty e^{-\sigma t} e^{-\delta t} e^{-\sigma\Omega t}\,dt = \frac{\gamma M}{\delta + \sigma + \sigma\Omega} x_0^\Omega < \frac{\gamma M}{\delta} x_0^\Omega\,.$$

С другой стороны, условие (27) позволяет заключить, что при $x_0 > B^{1/\beta}$ правая часть неравенства (25) больше $\left(A/\beta\right) x_0^{\gamma\left(\rho - \frac{\omega}{\gamma}\right)} = \left(A/\beta\right) x_0^{\Omega+1-\omega}$. Получается, что в качестве $x_0^{\text{крит}}$ можно взять максимальное из чисел $\dfrac{1}{\lambda}$, $B^{1/\beta}$ и $\left(\dfrac{\alpha M}{A\delta}\right)^{1/(1-\omega)}$.

Полученные результаты нетрудно распространить на случай функций $f(k) = Gk^{\alpha}$, где G - некоторое положительное число. Для этого достаточно ввести новую единицу на оси времени, полагая $t^{\text{нов}} = Gt$. Тогда уравнение движения $\dot{k} = u(t)Gk^{\alpha} - \lambda k$ преобразуется в уравнение $\dot{k} = u(t)k^{\alpha} - \lambda^{\text{нов}} k$, где $\lambda^{\text{нов}} = \lambda/G$, а интеграл $\int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(c(t))\,dt$ преобразуется в интеграл $\frac{1}{G}\int_0^{\infty} e^{-\delta^{\text{нов}} t} U(c(t))\,dt$, где $\delta^{\text{нов}} = \delta/G$. Таким образом, достаточно во всех выводах, полученных в этом и следующем разделах статьи, заменить параметры λ, δ и время t соответственно на $\lambda/G, \delta/G$ и Gt.

5. Пример

Пусть $U(c) = c^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $f(k) = k^{\alpha}$, $\beta = 1 - \alpha$, $\gamma = \alpha/\beta$, $\sigma = (1-\alpha)\lambda$.

Здесь важно, что функции U и f имеют в сумме равные единице показатели степени. Именно в этом случае удается получить явное выражение для оптимального процесса.

Тогда после замены фазовой переменной $x = k^{\beta}$, как и ранее, получится уравнение движения:

$$\dot{x} = \beta u - \sigma x, x(0) = k_0^{\beta} = x_0,$$

а интегральный функционал и уравнение для функции p примут вид:

$$\int_0^{\infty} -e^{-\delta t}(1-u)^{\beta} x^{\alpha}\,dt,$$

$$(28) \qquad \dot{p} = \sigma p - e^{-\delta t}\alpha(1-\hat{u})^{\beta}\hat{x}^{-\beta}.$$

Точкам максимума по u во внутренних точках отрезка $[0,1]$ соответствует равенство нулю производной

$$p(\beta u - \sigma\hat{x}) + e^{-\delta t}(1-u)^{\beta}\hat{x}^{\alpha},$$

т.е.

$$(29) \qquad \beta p - \beta e^{-\delta t}(1-u)^{-\alpha}\hat{x}^{\alpha} = 0.$$

Обозначим через D число $\alpha/(\delta+\sigma)$. В следующей теореме доказывается, что множество значений оптимального процесса $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ на плоскости с координатами x, u образует часть непрерывной ломаной, составленной из отрезка с вершинами в точках $(0,1)$, $(D,0)$ и полупрямой на оси x, образованной точками с координатами $x \geq D$.

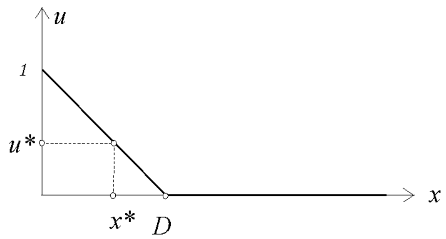

Рис. 1.

Теорема 3. *Компоненты оптимального процесса* $\hat{x}$ *и* $\hat{u}$ *при всех* $x_0 > 0$ *и* $t \geq 0$ *связаны соотношением:*

$$(30) \qquad \hat{u} = \begin{cases} 1 - \hat{x}/D, & \text{при } 0 < \hat{x} \leq D \\ 0, & \text{при } \hat{x} > D \end{cases}.$$

Функция $\hat{x}(\cdot)$ *является решением дифференциального уравнения:*

$$(31) \qquad \dot{x} = \begin{cases} \beta - \dfrac{\delta + \lambda}{\gamma} x, & \text{при } 0 < x \leq D \\ -\sigma x, & \text{при } x > D \end{cases}$$

с начальным значением x_0.

Доказательство. Обозначим число $\alpha/(\delta + \lambda)$ через x^*. Тогда $x^* < D$, т.к. $x^* - D = \dfrac{-\alpha\lambda D}{\delta + \lambda} < 0$. Поскольку при $x = x^*$ правая часть уравнения (31) обращается в нуль, точка x^* - положение равновесия (точка покоя) этого уравнения. Поэтому решения уравнения (31) с начальным значением из промежутков $0 < x_0 < x^*$ или $x^* < x_0 \leq D$ при всех $t \geq 0$ не покидают указанных промежутков.

Убедимся в том, что так построенная функция $\hat{x}(\cdot)$ и связанная с ней формулой (30) функция $\hat{u}(\cdot)$ удовлетворяют условиям оптимальности.

Укажем функцию, которая является подходящим решением дифференциального уравнения (28):

$$(32) \qquad \hat{p}(t) = D^{\alpha} e^{-\delta t}.$$

Действительно, по построению $\hat{x}$ и $\hat{u}$ справедливо тождество $(1-\hat{u})^{\beta} \hat{x}^{-\beta} = D^{-\beta}$. Поэтому уравнение (28) в данном случае эквивалентно уравнению:

$$\dot{p} = \sigma p - \alpha D^{-\beta} e^{-\delta t}.$$

То, что функция (32) удовлетворяет этому уравнению, проверяется непосредственно.

Граничное условие (16) в данном случае выполнено, т.к. здесь

$$e^{\int_0^t \hat{\varphi}'_x(\tau) d\tau} = e^{-\sigma t}.$$

Проверка выполнения условия внутреннего максимума (29) также сводится к непосредственной проверке с использованием явных выражений (32) и (30) для функции $\hat{p}(t)$ и связи $\hat{x}$, $\hat{u}$.

Предположим теперь, что $x_0 > D$.

Для проверки выполнения принципа максимума в этом случае достаточно убедиться в том, что для оптимального решения выполняется неравенство (25), которое теперь может быть записано в виде

$$p_0 \le x_0^{\alpha}.$$

Поскольку при $x_0 = D$, как проверено выше, имеет место равенство $p_0 = D^{\alpha} = x_0^{\alpha}$, то достаточно доказать строгое убывание p_0 как функции переменной x_0 при $x_0 > D$.

Пусть T - тот момент времени, когда выполняется равенство $D = x_0 e^{-\sigma t}$. Тогда

$$p_0 = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-\delta t} \alpha (1-\hat{u})^{\beta} \hat{x}^{-\beta} dt = \int_0^{T} e^{-\sigma t} e^{-\delta t} \alpha (x_0 e^{-\sigma t})^{-\beta} dt + \int_T^{\infty} e^{-\sigma t} e^{-\delta t} \alpha D^{-\beta} dt.$$

Поскольку изначально p_0 не зависит от T, то

$$\frac{dp_0}{dx_0} = \frac{\partial p_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x_0} + \frac{\partial p_0}{\partial x_0} = 0 + \int_0^{T} e^{-2\sigma t} e^{-\delta t} \alpha (-\beta)(x_0 e^{-\sigma t})^{-\beta-1} dt < 0,$$

что и требовалось доказать. □

В теореме 3 получено описание оптимального процесса для задачи с преобразованной фазовой переменной. Для исходной задачи связь $\hat{x}(\cdot)$ и $\hat{u}(\cdot)$ описывается соотношением

$$\hat{u} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{D}\hat{k}^{\beta}, & \text{при } 0 < \hat{k} \le D^{1/\beta} \\ 0, & \text{при } \hat{k} > D^{1/\beta} \end{cases}.$$

Соответствующее множество значений оптимального процесса $(\hat{k}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ на координатной плоскости с координатами k, u изображено на рис. 2.

Интересно, что для оптимального процесса $(\hat{k}(\cdot),\hat{c}(\cdot))$ связь $\hat{k}(\cdot)$ и $\hat{c}(\cdot)$ на

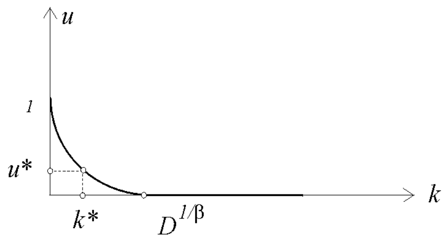

Рис. 2.

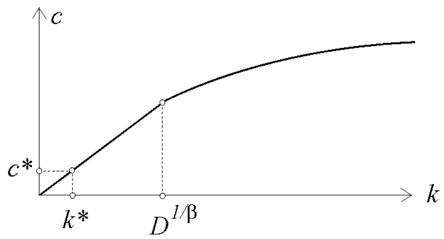

Рис. 3.

промежутке $0 < \hat{k} \le D^{1/\beta}$ оказывается линейной при всех значениях параметров α, δ, λ (см. рис. 3).

$$\hat{c} = \begin{cases} \frac{1}{D}\hat{k}, \text{ при } 0 < \hat{k} \le D^{1/\beta} \\ 0, \text{ при } \hat{k} > D^{1/\beta} \end{cases}. \tag{33}$$

Таким образом, справедливо “золотое правило потребления”:

если начальная фондовооруженность k_0 *не превосходит* $D^{1/\beta}$, *то в любой момент времени потребление на одного рабочего должно быть пропорционально фондовооруженности с постоянным коэффициентом* $\frac{\delta + (1-\alpha)\lambda}{\alpha}$.

Это правило универсально, оно применимо для всех значений $k_0 \le D^{1/\beta}$, в том числе для особого значения k^*, о котором говорится ниже.

Условие $k_0 \le D^{1/\beta}$ можно интерпретировать как ограничение на фондоемкость в начальный момент (замечено Э.Б. Ершовым). Действительно, в эквивалентном неравенстве $k_0^\beta \le D$ слева находится

$$k_0^{1-\alpha} = \frac{k_0}{k_0^\alpha} = \frac{k_0}{f(k_0)} = \frac{k_0}{y_0}.$$

Соответствующее неравенство для фондоотдачи

$$\frac{y_0}{k_0} \ge \frac{\delta + \sigma}{\alpha}$$

позволяет указать пороговое значение нормы дисконтирования, при превышении которого на некотором начальном промежутке времени прекращается какое-либо инвестирование:

$$\delta_{\text{крит}} = \alpha \frac{y_0}{k_0} - (1-\alpha)\lambda .$$

Как уже отмечалось, уравнение (31) имеет точку покоя $x^* = \alpha/(\delta+\lambda)$. Ей соответствует оптимальный процесс (k^*, u^*) с независящими от времени компонентами

$$k^* = \left(\frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right)^{1/\beta}, \qquad u^* = \frac{\alpha\lambda}{\delta+\lambda}.$$

Соответствующий уровень потребления c^* находится по формуле (33):

$$c^* = \frac{1}{D}k^* = \frac{\delta+(1-\alpha)\lambda}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right)^{1/\beta}.$$

В этом случае говорят, что происходит оптимальный сбалансированный рост, так как капитал K, рабочая сила L и потребление C возрастают с одинаковым темпом ν.

Если начальная фондовооруженность k_0 не равна k^*, то оптимальный процесс $(\hat{k}(t), \hat{u}(t))$ стремится к (k^*, u^*) при $t \to +\infty$. Это свойство оптимального процесса составляет суть так называемой теоремы о магистрали. В рассматриваемом случае мы можем увидеть все детали, так как можем записать явное выражение для оптимальной фондовооруженности как функции времени. В случае $k_0 \le D^{1/\beta}$ оно имеет вид:

$$\hat{k}(t) = \left[\left(k_0^\beta - \frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right)e^{-\left(\frac{\delta+\lambda}{\gamma}\right)t} + \frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right]^{1/\beta}.$$

При $k_0 > D^{1/\beta}$ на отрезке $[0,T]$, где $T = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{k_0}{D^{1/\beta}}$, действует формула $\hat{k}(t) = k_0 e^{-\lambda t}$, а при $t > T$

$$\hat{k}(t) = \left[\left(D - \frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right)e^{-\left(\frac{\delta+\lambda}{\gamma}\right)(t-T)} + \frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right]^{1/\beta}.$$

Заметим также, что потребление в начальный момент времени $t = 0$

$$c(0) = \frac{\delta+(1-\alpha)\lambda}{\alpha}k_0 \qquad (34)$$

возрастает с ростом нормы дисконтирования δ. Ясно, что тот же эффект будет наблюдаться и на некотором начальном промежутке времени, как и следовало ожидать. Однако такая тенденция не сохраняется бесконечно, поскольку предельный уровень потребления c^* убывает при возрастании δ. На это указывает производная c^* по δ

$$(c^*)'_\delta = -\left(\frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right)^{1/\beta}\frac{\delta}{\delta+\lambda} < 0 .$$

Максимальный предельный уровень c^* получается при $\delta = 0$, но надо иметь в виду начальный уровень потребления (34). Он не должен опускаться ниже некоторого минимального уровня потребления.

В заключение укажем для полноты картины выражение для максимального значения интеграла (6) (при условии $k_0 \le D^{1/\beta}$)

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}(\hat{c}(t))^\beta dt = \frac{1}{D^\beta}\left[\left(k_0^\beta - \frac{\alpha}{\delta+\lambda}\right)\frac{\alpha}{\delta+\sigma} + \frac{\alpha}{\delta(\delta+\lambda)}\right].$$

В частности, для сбалансированного роста получается число $\frac{1}{D^\beta}\frac{\alpha}{\delta(\delta+\lambda)}$.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975.

2. Колемаев В.А. Математическая экономика. - М.: ЮНИТИ, 1998.

3. Zelibotti F.A. Rostovian model of endogenous growth and underdevelopment traps, European Economic Review 39, 1569-1602.

4. Growth Theory (edited by R.Becker, E.Burmeister), - GB-USA (The International Library of Critical Writings in Economics – 10), 1991

Vol 1. Descriptive Growth Theories

Vol 2. Optimal Growth Theories

Vol 3. Equilibrium Growth Theories.

5. Алексеев В.М.,Тихомиров В.М.,Фомин С.В. Оптимальное управление. - М.: Наука, 1979.

6. Столерю Л. Равновесие и экономический рост. - М.: Статистика, 1973.

7. Barro R.J., Sala-i-Martin X. Economic Growth, McGraw-Hill, Inc, 1995.