Модель жизненного цикла с «близоруким» принятием решений

Борзых Д.А., Шоломицкий А.Г.

Рассматривается динамическая модель индивидуального потребления, сбережений и предложения труда при наличии обязательного пенсионного страхования. Особенностью модели является «близорукий» подход к принятию решений, когда горизонт планирования индивидуума ограничен двумя периодами: текущим периодом t и следующим за ним – $t+1$-ым периодом. Получено аналитическое решение задачи двухпериодного планирования для случая логарифмических функций полезности. Модель порождает кривые предложения труда и дохода в зависимости от возраста, формы которых соответствуют эмпирическим данным.

Ключевые слова: модель жизненного цикла; межвременное потребление; модели потребления и сбережений; предложение труда.

1. Введение

Задача моделирования потребления и сбережений в течение жизненного цикла индивидуума известна в экономической теории давно – по крайней мере, начиная с работ Ирвинга Фишера (например, [10]), которым впервые была поставлена задача межвременного потребления как задача оптимизации потребления в течение индивидуальной жизни. Более поздние авторы, в частности, Модильяни [14], Фридман [11], заложили основы современной теории межвременного потребления, основываясь на модели дисконтированной полезности.

Модель дисконтированной полезности в ее дискретной форме можно описать функционалом полезности вида

$$U = \sum_t v^t u(\overline{x}_t), \qquad (1)$$

где $\overline{x}_t$ – векторный аргумент функции полезности $u,$ который может включать в себя компоненты, связанные с потреблением, сбережением, в некоторых моделях – трудом или такими его аналогами, как уровень усилий.

Борзых Д.А. – аспирант кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ, преподаватель кафедры математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ. E-mail: borzykh.dmitriy@gmail.com

Шоломицкий А.Г. – канд. физ.-мат. н., доцент кафедры Управления рисками и страхования НИУ ВШЭ. E-mail: ASholomitsky@yandex.ru

Статья поступила в Редакцию в мае 2011 г.

Модели жизненного цикла оказали значительное влияние на теорию функций потребления. Нужно заметить, что подобные модели предполагают перераспределение заработанного в течение индивидуального жизненного цикла богатства путем создания сбережений и перераспределения потребления по периодам жизни. В частности, известное заключение этой теории состоит в том, что в ранние годы жизни индивидуум обычно финансирует свое потребление путем заимствований (в разной форме, включая заимствования у более старших поколений, например, внутрисемейные и другие), в более зрелом возрасте его доходы возрастают, но в значительной степени отвлекаются от потребления на создание сбережений, за счет которых финансируется потребление в старших возрастах.

Создание сбережений с указанной целью является задачей систем социального страхования (например, пенсионных фондов). Подобные системы могут быть как добровольными, так и обязательными. Поэтому естественно возникают задачи моделирования жизненного цикла при наличии систем социального страхования и, в частности, изучения влияния последних на экономическое поведение (в терминах потребления, сбережения, предложения труда) (например, [6; 7]).

В настоящей работе мы рассматриваем модель жизненного цикла, включающую обязательное социальное страхование. Однако принятие решений в описанной ниже модели основано на ином принципе, чем модель дисконтированной полезности (1).

Следует сказать, что модель дисконтированной полезности (1), хотя и позволила получить многие важные результаты, является достаточно ограниченной моделью межвременного выбора. Эта модель основана на достаточно сильных предположениях. В частности, предполагается постоянство коэффициента дисконта, разделимость и даже аддитивность функции по аргументам, относящимся к разным моментам времени, и т.д. К настоящему времени существует уже достаточно много свидетельств того, что реальные предпочтения и реальное экономическое поведение в ситуациях межвременного выбора более сложны, чем предписываемые моделью дисконтированной полезности (так называемые парадоксы межвременного выбора); существует ряд моделей выбора, обобщающих теорию дисконтированной полезности. По поводу обзора см., например, [8].

Если говорить именно о межвременном выборе в модели жизненного цикла, то можно обсуждать неизменность функции полезности и однократность принятия решения, на чем, в частности, основано применение принципа выбора (1). Действительно, решая задачу оптимизации на основе (1), мы предполагаем, что выбор индивидуума осуществляется однократно и на всю жизнь, причем функция полезности известна наперед. Хотя можно развить модель (1), предполагая разные функции полезности для разных периодов жизни, это качественно не меняет ситуацию. Очевидно, что такой подход является сильно упрощенным. На самом деле, конечно, решения индивидуума принимаются неоднократно в течение жизни и предпочтения могут меняться.

Если обратить внимание на вид функции полезности, а именно, на то, как включается в нее коэффициент дисконта, то становится понятным, что индивидуум «ценит» более удаленные года своей жизни сравнительно невысоко. Если к тому же учесть, что решение о распределении труда и сбережений принимается однократно на всю жизнь, то нетрудно понять, что такая постановка задачи порождает в поведении индивидуума сравнительное безразличие к своему благосостоянию в старости.

В описанной ниже модели допускается возможность корректировки индивидуумом своих планов в свете переопределившихся предпочтений, что можно назвать «скользящим планированием». При этом рассматривается «близорукая» стратегия поведения: горизонт принятия решений включает лишь текущий и будущий периоды. Можно считать, что индивидуум, проживая год, перестает испытывать удовлетворение от потребления и отдыха данного года. Полезность принесет лишь потребление и досуг в предстоящий год жизни.

Следует отметить, что вариант данной модели, в которой горизонт планирования простирался до конца жизни индивидуума, был рассмотрен ранее первым из авторов данной статьи. Несмотря на существенное упрощение, модель с «близорукой» стратегией дает качественно те же результаты. При этом последняя модель проще, и для нее удается получить аналитическое решение, которое можно исследовать как функцию от экзогенных параметров модели. Эта возможность представляется нам важным достоинством модели с «близоруким» горизонтом планирования.

2. Описание модели

Рассматривается индивидуум возраста $t \in [a, T-1]$ лет. Пусть в возрастах a, p, T лет индивидуум вступает в пенсионную схему, выходит на пенсию и умирает соответственно. Находясь в возрасте t, он обладает суммой денег, равной $(1+r)s_{0t}$, которая возникла в результате инвестиций, сделанных им в возрасте $t-1$ под ставку процента r, либо, если $t=a$, то $(1+r)s_{0a}$ – начальная сумма денег (считаем эту величину заданной).

Предполагается, что в возрастах $t=a,...,p-1$ индивидуум может получать трудовой доход $(1-\gamma)w_t L_{1t}$, зависящий от количества отработанных дней в году L_{1t}, дневной ставки заработной платы w_t и ставки обязательного пенсионного страхования γ. При этом величины $\gamma w_t L_{1t}$ – это отчисления в фонд обязательного пенсионного страхования, производимые в возрастах $t=a,...,p-1$. Они определяют размер пенсионных выплат по достижении пенсионного возраста p.

Таким образом, в возрасте $t=a,...,p-1$ индивидуум располагает суммой, равной $(1+r)s_{0t}+(1-\gamma)w_t L_{1t}$, которую он распределяет между потреблением q_{1t} и сбережением s_{1t} в соответствии со своими предпочтениями, определяемыми функцией полезности индивидуума.

По достижении пенсионного возраста p доходы индивидуума складываются из пенсионных выплат b_t и процентов по инвестициям $s_{1(t-1)}$, сделанных в предыдущем периоде $(t-1)$. В пенсионном возрасте перед индивидуумом стоит та же задача о распределении доходов между потреблением и сбережением, которую он решает исходя из максимизации функции полезности.

Зададим последовательность функций полезности $\{U_t\}_{t=a}^{t=T-1}$, относящихся к возрастам $a, a+1,...,T-1$ соответственно. Для этого разделим жизнь индивидуума на два отрезка, на которых функции U_t имеют одинаковую структуру. Первый отрезок жизни есть $[a, p)$. На этом участке индивидуум трудится. Второй отрезок жизни – $[p, T-1]$. На нем он получает пенсию.

Функция полезности индивидуума возраста t лет $(t = a, ..., p-1)$ есть функция вида

(2) $$U_t = U_t(q_t, q_{t+1}, R_t, R_{t+1}) = u_t(q_t, R_t) + \delta_t u_{t+1}(q_{t+1}, R_{t+1}).$$

Она зависит от годового уровня потребления q_j $(j = t, t+1)$ и количества свободного от работы времени R_j $(j = t, t+1)$.

Предполагается, что функции $u_j : R_+^2 \to R$ – некоторые возрастающие по q_j и по R_j функции, где $R_+^2 = \{(x, y): x > 0, y > 0\}$.

При этом:

$$\begin{cases} q_t = (1+r)s_{0t} - s_{1t} + w_t L_{1t} - \gamma w_t L_{1t}, \\ q_{t+1} = (1+r)s_{1t} + w_{t+1} L_{2t} - \gamma w_{t+1} L_{2t}, \\ q_t \geq \underline{q} > 0, \\ q_{t+1} \geq \underline{q} > 0, \\ A \geq R_t = A - L_{1t} \geq A - \overline{A} > 0, \\ A \geq R_{t+1} = A - L_{2t} \geq A - \overline{A} > 0, \end{cases}$$

где $A = 365$ – общее число дней в году;

$\overline{A} \in [0, 365]$ – максимальное число дней в году, которое физически может отработать индивидуум ($\overline{A} < A$);

$\delta_t = \delta(t) \in (0,1)$ – коэффициент дисконта функции полезности;

$w_t = w(t) \in (0, +\infty)$ – величина заработной платы в возрасте t лет (за один отработанный день);

$r \in (0, +\infty)$ – годовая ставка процента по депозиту в банке;

$\underline{q} \in (0, +\infty)$ – величина прожиточного минимума (годовая сумма);

$\gamma \in (0,1)$ – доля отчислений в фонд обязательного пенсионного страхования;

L_{1t} – количество дней, отработанных в возрасте t;

L_{2t} – количество дней, планируемых (в момент t) отработать в возрасте $t+1$;

s_{1t} – финансовые вложения в возрасте t под ставку процента r;

$(1+r)s_{0t}$ – сумма, которой обладает индивидуум в начале t-го года жизни.

Кроме этого, считаем выполненными следующие тождества:

$$s_{1t} \equiv s_{0(t+1)} \text{ при } t = a, ..., (T-1); \; s_{1,(T-1)} \equiv 0.$$

Функция полезности индивидуума возраста t лет $(t = p,...,T-1)$ задается выражением

(3) $$U_t = U_t(q_t, q_{t+1}, R_t, R_{t+1}) = u_t(q_t, R_t) + \delta_t u_{t+1}(q_{t+1}, R_{t+1}),$$

где

$$\begin{cases} q_t = (1+r)s_{0t} - s_{1t} + b_t, \\ q_{t+1} = (1+r)s_{1t} + b_{t+1}, \\ q_t \geq \underline{q} > 0, \\ q_{t+1} \geq \underline{q} > 0, \\ R_t = R_{t+1} = A. \end{cases}$$

$$b = b_t = \frac{\sum_{k=0}^{p-a-1}\left(\gamma \cdot w_{a+k} \cdot L^*_{1,(a+k)}\right) \cdot \nu^k \cdot {}_k p_a}{\sum_{j=p-a}^{T-a} \nu^j \cdot {}_j p_a} = const,$$

$\nu \in (0,1)$ – коэффициент дисконта аннуитетов $\left(\nu = \dfrac{1}{1+r_a}\right)$, где $r_a \in (0,1)$ – соответствующая ставка дисконта аннуитетов, которая в общем случае не равна процентной ставке r; ${}_k p_a$ – вероятность для человека возраста ровно a лет прожить еще k лет.

Величины $\left\{L^*_{1t}\right\}_{t=a}^{p-1}$ следует воспринимать как константы. О том, каким образом они определяются, будет сказано далее.

Отметим, что все рассматриваемые в модели величины считаются заданными в реальных ценах.

Параметры $\delta_t, \underline{q}, r, r_a, s_{0a}, a, p, T, w_t, \gamma, {}_k p_a, A$ являются экзогенно заданными величинами. Пусть $\theta = \left(\delta_t, \underline{q}, r, r_a, s_{0a}, a, p, T, w_t, \gamma, {}_k p_a, A\right)$.

Управляемыми переменными в модели являются последовательности величин сбережений $\left\{s_{1t}\right\}_{t=a}^{T-1}$ и предложения труда $\left\{L_{1t}\right\}_{t=a}^{p-1}$, $\left\{L_{2t}\right\}_{t=a}^{p-1}$.

Будем изучать поведение индивидуума начиная с возраста a лет $(a < p < T)$ в следующих предположениях.

1. По достижении возраста p лет индивидуум выходит на пенсию.

2. Начиная с возраста a лет и вплоть до достижения p лет индивидуум вносит взносы в фонд пенсионного страхования, которые представляют собой определенную (фиксированную) долю γ от величины трудовых доходов $(w_t L_{1t})$.

3. По достижении возраста p лет и вплоть до смерти индивидуума в начале каждого года из пенсионного фонда производятся пенсионные выплаты равными частями. Эти выплаты представляют собой фиксированную часть дохода индивидуума, находящегося в пенсионном возрасте.

4. Помимо трудовых доходов и пенсии, на протяжении всей жизни индивидуум может получать доход на вложенный (например, в банк) капитал.

3. Задача двухпериодного планирования

В разделе 2 мы специфицировали функцию полезности для каждого момента времени t. Ниже ставится задача выбора. Фактически она представляет собой задачу выбора между трудом и потреблением, а также трудом и потреблением в будущем.

Определение (задачи двухпериодного планирования). *Пусть задан вектор экзогенных параметров* θ, *задана последовательность функций*

$$\left\{U_t = u_t\left(q_t, R_t\right) + \delta_t u_{t+1}\left(q_{t+1}, R_{t+1}\right)\right\}_{t=a}^{T-1}$$

и последовательность множеств X_t:

$$\left\{X_t = \left\{\begin{array}{l} s_{0t} = s^*_{1,(t-1)},\ t \ge a+1 \\ q_t = \left(1+r\right)s_{0t} - s_{1t} + w_t L_{1t} - \gamma w_t L_{1t}, \\ q_{t+1} = \left(1+r\right)s_{1t} + w_{t+1} L_{2t} - \gamma w_{t+1} L_{2t}, \\ q_t \ge \underline{q} > 0, \\ q_{t+1} \ge \underline{q} > 0, \\ A \ge R_t = A - L_{1t} \ge A - \overline{A} > 0, \\ A \ge R_{t+1} = A - L_{2t} \ge A - \overline{A} > 0, \end{array}\right\}\right\}_{t=a}^{p-1}$$

$$\left\{X_t = \left\{\begin{array}{l} s_{0t} = s^*_{1,(t-1)}, \\ q_t = \left(1+r\right)s_{0t} - s_{1t} + b_t, \\ q_{t+1} = \left(1+r\right)s_{1t} + b_{t+1}, \\ q_t \ge \underline{q} > 0, \\ q_{t+1} \ge \underline{q} > 0, \\ R_t = R_{t+1} = A. \end{array}\right\}\right\}_{t=p}^{T-1}$$

Тогда задачу нахождения траекторий $\left\{L^*_{1t}\right\}_{t=a}^{p-1}$, $\left\{L^*_{2t}\right\}_{t=a}^{p-1}$, $\left\{s^*_{1t}\right\}_{t=a}^{T-1}$, *отвечающих требованиям*

1) $\left(L^*_{1t}, L^*_{2t}, s^*_{1t}\right) \in \underset{(L_{1t}, L_{2t}, s_{1t}) \in X_t}{\arg\max}\ U_t$ *при* $t = a, \ldots, \left(p-1\right)$;

2) $s^*_{1t} \in \underset{s_{1t} \in X_t}{\arg\max}\, U_t$ *при* $t = p, \ldots, \left(T-1\right)$,

будем называть задачей двухпериодного планирования с вектором параметров θ *и последовательностью функций полезности* $\left\{U_t\right\}_{t=a}^{T-1}$.

Определение (решение задачи двухпериодного планирования). *Любую последовательность* $\left\{L^*_{1t}\right\}_{t=a}^{p-1}$, $\left\{L^*_{2t}\right\}_{t=a}^{p-1}$, $\left\{s^*_{1t}\right\}_{t=a}^{T-1}$, *удовлетворяющую условиям*

1) $\left(L_{1t}^{*}, L_{2t}^{*}, s_{1t}^{*}\right) \in \underset{(L_{1t}, L_{2t}, s_{1t}) \in X_t}{\arg\max}\, U_t$ *при* $t = a, \ldots, (p-1)$ *;*

2) $s_{1t}^{*} \in \underset{s_{1t} \in X_t}{\arg\max}\, U_t$ *при* $t = p, \ldots, (T-1)$ *,*

будем называть решением задачи двухпериодного планирования с вектором параметров θ *и последовательностью функций полезности* $\{U_t\}_{t=a}^{T-1}$.

При этом последовательность $\left\{L_{1t}^{*}\right\}_{t=a}^{p-1}$ *будем называть траекторией предложения труда, а последовательность* $\left\{s_{1t}^{*}\right\}_{t=a}^{T-1}$ *будем называть траекторией сбережений.*

Замечание. Задача двухпериодного планирования не имеет решения, если $\exists t_0 = a, \ldots, T-1:\ X_{t_0} = \varnothing$ или $\underset{(L_{1t}, L_{2t}, s_{1t}) \in X_{t_0}}{\arg\max}\, U_{t_0} = \varnothing$.

Например, задача двухпериодного планирования не имеет решений, если выбрать такое соотношение экзогенных параметров, что выполняется неравенство

$$(1+r)s_{0a} + (1-\gamma)w_a \overline{A} < \underline{q}.$$

Данное неравенство имеет следующий смысл: уровень начальной наделенности индивидуума $(1+r)s_{0a}$, а также ставка заработной платы w_a настолько низки, что даже при максимальной трудовой нагрузке его доход в возрасте a лет $(1+r)s_{0a} + (1-\gamma)w_a \overline{A}$ окажется меньше минимального уровня потребления $\underline{q}$.

Теорема 1 (достаточные условия существования и единственности решения задачи двухпериодного планирования).

А) Пусть функции полезности U_t *непрерывны по переменным* L_{1t}, L_{2t}, s_{1t} *при* $t = a, \ldots, (p-1)$ *и непрерывны по переменной* s_{1t} *при* $t = p, \ldots, (T-1)$. *Пусть также* $\forall t = 1, \ldots, (p-1)$ *выполнены неравенства* $(1-\gamma)w_t \overline{A} \geq \underline{q}$ *и*

$$b = \frac{\sum_{k=0}^{p-a-1}\left(\gamma \cdot w_{a+k} \cdot L_{1,(a+k)}^{*}\right) \cdot \nu^k \cdot {}_k p_a}{\sum_{j=p-a}^{T-a} \nu^j \cdot {}_j p_a} \geq \underline{q}.$$

Тогда задача двухпериодного планирования имеет решение.

В) Если, в дополнение к указанным выше условиям, выполняется условие строгой вогнутости функций U_t *по переменным* L_{1t}, L_{2t} *и* s_{1t} *при* $t = 1, \ldots, (p-1)$ *и строгой вогнутости функций* U_t *по* s_{1t} *при* $t = p, \ldots, (T-1)$, *то решение задачи двухпериодного планирования единственно.*

Доказательство. В задаче двухпериодного планирования последовательно производится максимизация функций U_t на множествах X_t. При этом множества X_t – непустые компакты, а функции U_t непрерывны.

4. Предположение о поведении индивидуума

Будем считать, что индивидуум, находясь в возрасте t лет, действует согласованно с решением задачи двухпериодного планирования. Это означает, что в возрасте $t = a, ..., p-1$ он выбирает предложение труда на уровне L_{1t}^*, уровень сбережений на уровне s_{1t}^*, такие что $\left(L_{1t}^*, L_{2t}^*, s_{1t}^*\right) \in \underset{(L_{1t}, L_{2t}, s_{1t}) \in X_t}{\arg\max}\, U_t$, а в возрасте $t = p, ..., (T-1)$ – выбирает уровень сбережений на уровне s_{1t}^*: $s_{1t}^* \in \underset{s_{1t} \in X_t}{\arg\max}\, U_t$.

5. Задача двухпериодного планирования для класса логарифмических функций полезности

В разделе 4 были описаны достаточные условия существования и единственности решения задачи двухпериодного планирования для класса произвольных непрерывных и вогнутых функций полезности. Тем не менее вопрос о получении решения задачи в явном виде, как функции от экзогенных параметров θ, остается открытым. Эту задачу удается решить, если сузить класс рассматриваемых функций полезности до класса логарифмических функций полезности.

Итак, будем рассматривать функции полезности вида

$$U_t = \ln(q_t) + m_t \ln(R_t) + \delta_t \ln(q_{t+1}) + \delta_t m_t \ln(R_{t+1}), \tag{4}$$

где $m_t = m(t) \in (0, +\infty)$ – коэффициент дисконта, распределяющий предпочтение между потреблением и отдыхом.

Утверждение 1 (о вогнутости логарифмической функции полезности).

А. Функция полезности индивидуума возраста t лет $\left(t = \overline{a, (p-1)}\right)$

$$U_t = \ln\left((1+r)s_{0t} - s_{1t} + w_t L_{1t} - \gamma w_t L_{1t}\right) + m_t \ln\left(\overline{A} - L_{1t}\right) +$$
$$+\delta_t \ln\left((1+r)s_{1t} + w_{t+1} L_{2t} - \gamma w_{t+1} L_{2t}\right) + \delta_t m_t \ln\left(\overline{A} - L_{2t}\right)$$

строго вогнута по переменным L_{1t}, L_{2t}, s_{1t}.

B. Функция полезности индивидуума возраста t лет $\left(t = \overline{p, (T-1)}\right)$

$$U_t = \ln\left((1+r)s_{0t} - s_{1t} + b_t\right) + m_t \ln(A) + \delta_t \ln\left((1+r)s_{1t} + b_t\right) + \delta_t m_t \ln(A)$$

строго вогнута по переменной s_{1t}.

Доказательство пунктов А и В утверждения следует из отрицательной определенности матриц вторых производных функций U_t на всей области определения.

Следствие из Утверждения 1. Из теоремы 1 и Утверждения 1 следует существование и единственность решения задачи двухпериодного планирования для случая функций полезности вида

$$U_t = \ln(q_t) + m_t \ln(R_t) + \delta_t \ln(q_{t+1}) + \delta_t m_t \ln(R_{t+1}) \quad \left(t = \overline{a,(T-1)}\right)$$

и вектора экзогенных параметров θ, удовлетворяющих условиям теоремы 1:

$$\forall t = 1,\dots,(p-1) \Rightarrow (1-\gamma) w_t \overline{A} \geq \underline{q} \ \text{ и } \ b = \frac{\sum_{k=0}^{p-a-1}\left(\gamma \cdot w_{a+k} \cdot L^*_{1,(a+k)}\right) \cdot \nu^k \cdot {}_k p_a}{\sum_{j=p-a}^{T-a} \nu^j \cdot {}_j p_a} \geq \underline{q}.$$

Утверждение 2 (о координатах глобального максимума логарифмических функций полезности).

Функции полезности

$$U_t = \ln(q_t) + m_t \ln(R_t) + \delta_t \ln(q_{t+1}) + \delta_t m_t \ln(R_{t+1}) \quad \left(t = \overline{a,(T-1)}\right),$$

где

$$\begin{cases} q_t = (1+r)s^*_{0t} - s_{1t} + w_t L_{1t} - \gamma w_t L_{1t},\ t = a,\dots,(p-1), \\ q_{t+1} = (1+r)s_{1t} + w_{t+1} L_{2t} - \gamma w_{t+1} L_{2t},\ t = a,\dots,(p-1), \\ q_t = (1+r)s^*_{0t} - s_{1t} + b_t,\ t = p,\dots,(T-1), \\ q_{t+1} = (1+r)s_{1t} + b_t,\ t = p,\dots,(T-1), \\ R_t = \overline{A} - L_{1t},\ t = a,\dots,(p-1), \\ R_{t+1} = \overline{A} - L_{2t},\ t = a,\dots,(p-1), \\ R_t = A,\ t = p,\dots,(T-1), \\ R_{t+1} = A,\ t = p,\dots,(T-1) \end{cases}$$

достигают своего глобального максимума (на всей области определения) в точке, координаты которой вычисляются следующим образом.

А. *При* $t = \overline{a,(p-1)}$

(5) $$L^*_{1t} = \frac{(1-\gamma) w_t A (1+r)(1+\delta_t + m_t\delta_t) - (1-\gamma) w_{t+1} A m_t - s_{0t} m_t (1+r)^2}{(1-\gamma) w_t (1+r)(1+\delta_t)(1+m_t)},$$

(6) $$L^*_{2t} = \frac{A(1+m_t+\delta_t)(1-\gamma) w_{t+1} - A m_t \delta_t (1+r)(1-\gamma) w_t - m_t \delta_t (1+r)^2 s_{0t}}{(1-\gamma) w_{t+1} (1+\delta_t)(1+m_t)},$$

(7) $$s^*_{1t} = \frac{\delta_t (1+r)^2 s_{0t} + \overline{A}\delta_t (1+r)(1-\gamma) w_t - \overline{A}(1-\gamma) w_{t+1}}{(1+r)(1+\delta_t)}.$$

В. *При* $t = \overline{p,(T-1)}$

(8) $$s_{1t}^{*} = \frac{b(\delta_t + r\delta_t - 1) + \delta_t s_{0t}(1+r)^2}{(1+r)(1+\delta_t)}.$$

Доказательство. Формулы (5), (6), (7) и (8) получаются непосредственно из необходимых условий экстремума дифференцируемой функции.

Замечание. Если точка глобального максимума функций

$$U_t = \ln(q_t) + m_t \ln(R_t) + \delta_t \ln(q_{t+1}) + \delta_t m_t \ln(R_{t+1}),$$

координаты которой рассчитываются по формулам (5)–(8), попадает в допустимое множество $\{X_t\}_{t=a}^{T-1}$, то она является решением задачи двухпериодного планирования.

6. Сопоставление результатов, получаемых при помощи модели, и эмпирических данных

Такое сопоставление может быть проведено, если мы будем исходить из модели «репрезентативного агента», поведение которого описывается построенной выше моделью. Конечно, как хорошо известно, модель репрезентативного агента применима лишь при определенных ограничениях на распределение доходов в экономике, которое должно быть постоянным во времени или, по крайней мере, быть детерминированной функцией времени [12]. Однако, даже если нельзя с полной уверенностью утверждать, что эти условия выполнены (как в нашем случае), модели репрезентативного агента могут быть достаточно полезны, в частности, при изучении потребления (как, например, было показано в статье [15]).

В данном разделе рассмотрим числовую реализацию предлагаемой модели и проведем сопоставление получаемых результатов с эмпирическими данными.

Пусть $a = 30$; $p = 60$; $T = 70$ и вектор экзогенных параметров Θ:

$$m_t = 0{,}000389 \cdot t^2 - 0{,}0325 \cdot t + 0{,}7;$$

$$w_t = -0{,}06333 \cdot t^2 + 6{,}7667 \cdot t - 80;$$

$$r_a = 0{,}06;\ \ \delta = 0{,}99;\ \ s_{0a} = 0;\ \ \overline{A} = 300;\ \ \gamma = 0{,}05.$$

На рис. 1 представлен график кривой сбережений в зависимости от возраста индивидуума.

В связи с изучением кривой сбережений отметим следующий интересный эффект «растрачивания» начального благосостояния s_{0a}. Пусть $a = 30$; $p = 60$; $T = 70$ и вектор экзогенных параметров Θ тот же, что и выше, за исключением параметра s_{0a}. Положим $s_{0a} = 2000$. Смоделированная кривая сбережений показана на рис. 2.

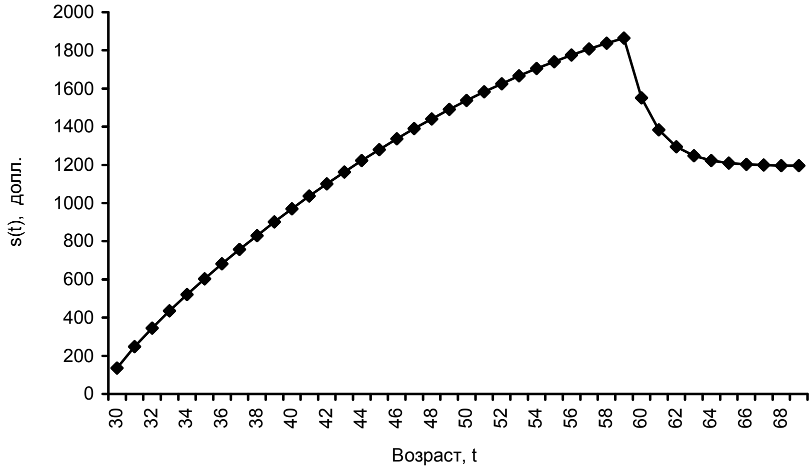

Рис. 1. Кривая сбережений в зависимости от возраста индивидуума $(s_{0a} = 0)$

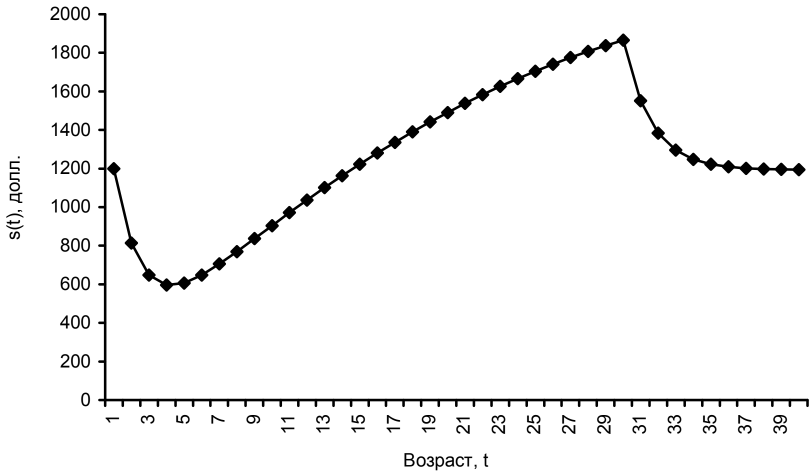

Рис. 2. Кривая сбережений в зависимости от возраста индивидуума $(s_{0a} = 2000)$

Из рис. 2 видно, что индивидуум постепенно растрачивает имеющуюся в его распоряжении величину $s_{0a} = 2000$.

Для дальнейшего анализа использованы следующие параметры модели:

$$a = 30; \quad p = 60; \quad T = 70;$$

$$\Theta: \ m_t = 0{,}000389 \cdot t^2 - 0{,}0325 \cdot t + 0{,}7;$$

$$w_t = -0{,}06333 \cdot t^2 + 6{,}7667 \cdot t - 80;$$

$$r_a = 0{,}06; \quad \delta = 0{,}99; \quad s_{0a} = 0; \quad \overline{A} = 300; \quad \gamma = 0{,}05.$$

Перейдем к рассмотрению кривых предложения труда и потребления в зависимости от возраста индивидуума.

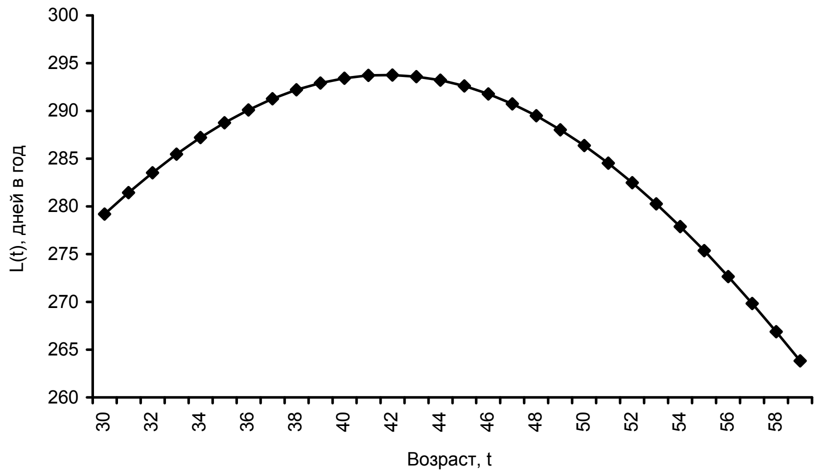

Рис. 3. Кривая предложения труда в зависимости от возраста индивидуума

На рис. 3 приведена смоделированная кривая предложения труда. Полученная форма кривой соответствует результатам теории предложения труда, основанной на жизненном цикле (см., например, [2]), которая объясняет это формой кривой распределения зарплат. А именно, так как кривая зарплат является кривой альтернативных издержек часа свободного времени, и поскольку в начале и в конце жизни эти издержки невелики, то человек предпочитает в большей степени отдых, а в середине жизненного цикла альтернативные издержки часа отдыха довольно высоки и человек предпочитает работу досугу.

Отметим также, что форма полученной нами кривой предложения труда по возрастам соответствует аналогичному показателю участия в рабочей силе, построенной по эмпирическим данным в работе [1].

Интересно также сопоставить результаты, полученные при помощи описанной выше модели, с эмпирическими данными о распределении доходов по возрастам. Для этого заметим, что в описанной выше модели величина годовых доходов индивидуума может быть выражена в виде

$$I_t = \begin{cases} w_t \cdot L_{1t}^* + r \cdot s_{0t}^*, & t = \overline{a,(p-1)} \\ b_t + r \cdot s_{0t}^*, & t = \overline{p,(T-1)} \end{cases}.$$

График этой величины при указанных выше параметрах приведен на рис. 5.

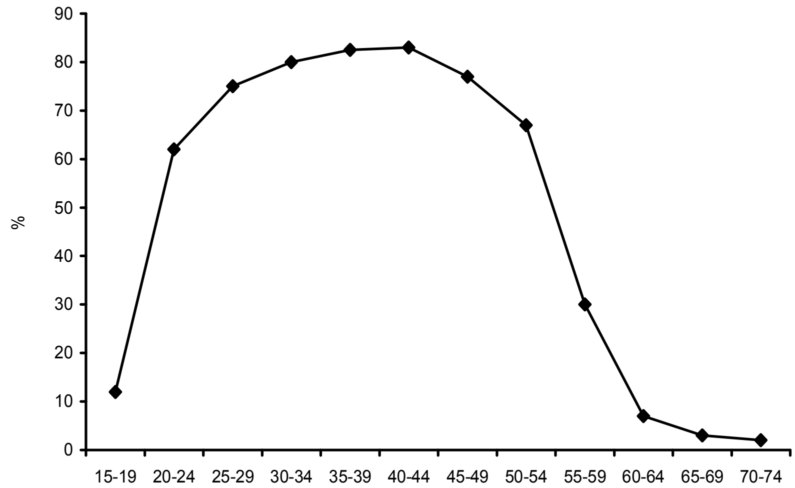

Рис. 4. Участие в рабочей силе по возрасту, 1999 г., % (согласно [1])

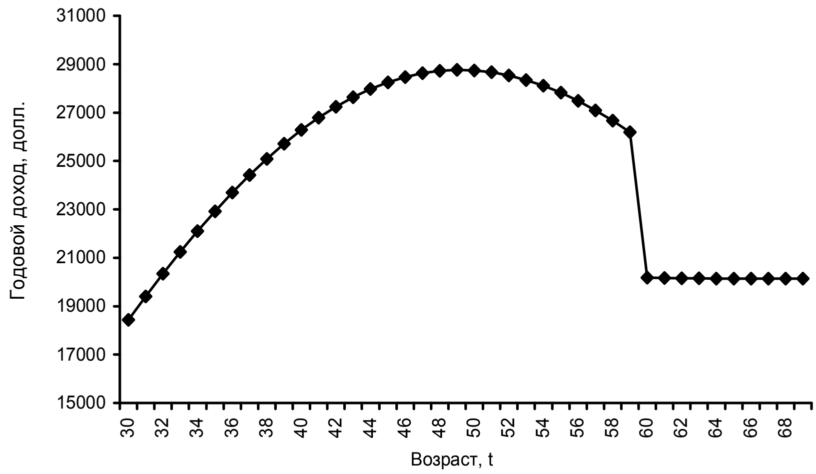

Рис. 5. Распределение доходов в зависимости от возраста индивидуума

Для сопоставления воспользуемся кривыми распределения доходов, приведенными в работе [13]. Авторы этой статьи оценивают динамику уровня доходов в течение жизни (в качестве начала трудовой жизни выбран возраст 21 год, возраст выхода на пенсию – 65 лет, максимальный возраст – 100 лет) для людей с различным уровнем образования (неоконченное среднее образование, оконченное среднее образование, оконченное образование в колледже). Авторы используют данные PSID (Panel Study of Income Dynamics)[1] – панельного исследования, проводимого в США с 1968 г. и включающего социально-экономические характеристики для 9000 домохозяйств.

[1] http://psidonline.isr.umich.edu/

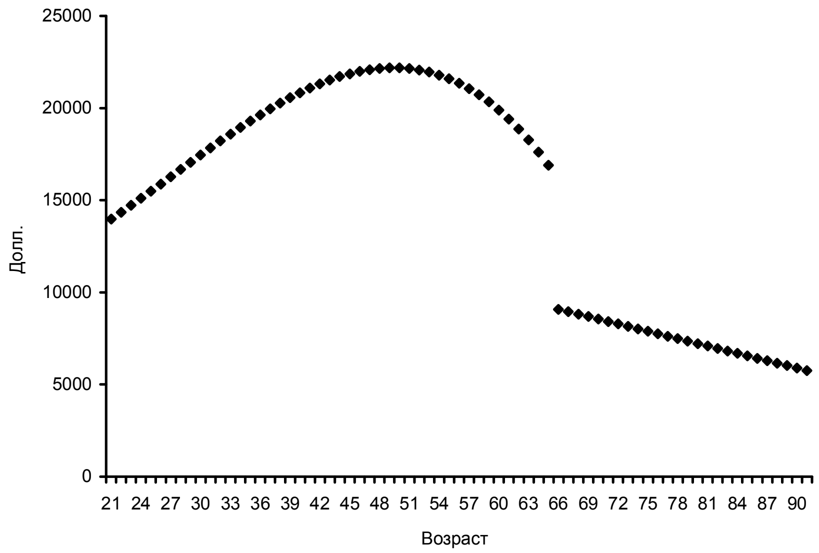

Рис. 6. Распределение доходов по возрастам (согласно [13])

Как видно из рис. 5 и 6, кривая распределения доходов индивидуума по возрастам, получаемая при помощи рассматриваемой модели, имеет схожую форму с кривыми, приведенными в работе [13].

Для полноты картины на рис. 7 ниже изображена смоделированная кривая потребления в зависимости от возраста индивидуума.

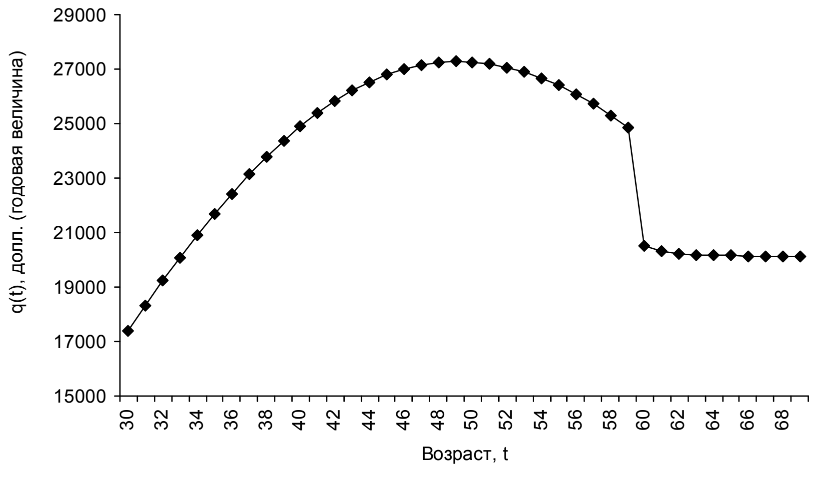

Рис. 7. Кривая потребления в зависимости от возраста индивидуума

6. Заключение

В общем случае для произвольных функций полезности сформулированная выше задача двухпериодного планирования решается численно. Однако если рассмотреть специальный класс функций полезности, то удается получить аналитические формулы решения задачи. Указанные формулы приводятся в Утверждении 2.

Будем считать, что зарплата w_t и коэффициент m_t, распределяющий предпочтение между потреблением и отдыхом, заданы (т.е. могут быть приближены) многочленами второй степени $w_t = \omega_2 \cdot t^2 + \omega_1 \cdot t + \omega_0$ $(\omega_2 < 0)$ и $m_t = \mu_2 \cdot t^2 + \mu_1 \cdot t + \mu_0$ $(\mu_2 > 0)$; коэффициент дисконта $\delta_t = \delta = const \in (0,1)$ и ставка процента $r \in (0,1)$ не меняются во времени. Тогда верно следующее[2].

1. Траекторию сбережений s_{1t}^* следует искать в классе функций

$$s_{1t}^* = \begin{cases} \alpha \cdot \lambda^t + \psi \cdot t^2 + \nu \cdot t + \tau, & t = a,\ldots,p-1, \\ \beta \cdot \lambda^t + B, & t = p,\ldots,T-1, \end{cases}$$

где $\alpha, \lambda, \psi, \nu, \tau, \beta, B \in \mathbb{R}$ – некоторые константы.

2. Траекторию межвременного предложения труда L_{1t}^* следует искать в классе функций: $L_{1t}^* = \dfrac{Q_2(t) \cdot \lambda^t + P_4(t)}{G_4(t)}$, $(t = a,\ldots,p-1)$, где $Q_2(t)$ – вещественный многочлен степени не выше двух, а $P_4(t)$ и $G_4(t)$ – вещественные многочлены не выше четвертой степени.

Результаты сопоставления с эмпирическими данными позволяют заключить, что предлагаемая нами модель способна порождать кривые предложения труда и распределения доходов, на качественном уровне схожие с аналогичными кривыми, получаемыми по эмпирическим данным. Приведенный выше результат о классе функций, в котором следует искать $\{s_{1t}^*\}$ и $\{L_{1t}^*\}$, указывает на возможные спецификации регрессионных моделей, которые могут быть использованы при эконометрическом моделировании потребления, сбережений, предложения труда и доходов домохозяйств.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гимпельсон В.Е.* Экономическая активность населения России в 1990-е годы: препринт WP3/2002/01. М.: ГУ ВШЭ, 2002.

[2] Доказательство данного утверждения мы не приводим.

2. *Шоломицкий А.Г.* Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005.

3. *Эрнберг Р.Дж., Смит Р.С.* Современная экономика труда. Теория и государственная политика. М.: Издательство Московского университета, 1996.

4. *Blundell R., Pashardes P., Weber G.* What do We Learn about Consumer Demand Patterns from Microdata? // American Economic Review. 1993. 83. P. 570–597.

5. *Breeden D.* An Intertemporal Asset Pricing Model with Stochastic Consumption and Investment // Journal of Financial Economics. 1979. September. 7. P. 265–296.

6. *Carrol C.* A Theory of the Consumption Function, with and without Liquidity Constraints // Journal of Economic Perspectives. 2001. 15. P. 23–45.

7. *Deaton A.* Understanding Consumption. Oxford, 1992.

8. *Duesenberry J.* Income, Saving and Theory of Consumer Behavior. Cambridge, 1949.

9. *Feldstein M.* Social Security and Savings: The Extended Life Cycle Theory // American Economic Review, Papers and Proceedings. 1976. 66. P. 77–86.

10. *Fisher I.* The Nature of Capital and Income. N.Y., 1927.

11. *Friedman M.* A Theory of the Consumption Function. Princeton: Princeton University Press, 1957.

12. *Hall R.E.* Intertemporal Substitution in Consumption // Journal of Political Economy. 1988. Vol. 96.

13. *Hubbard R.G., Skinner J., Zeldes S.P.* The Importance of Precautionary Motives in Explaining Individual and Aggregate Saving: Working Paper № 4516. National Bureau of Economic Research, November 1993.

14. *Modigliani F.* The Life Cycle Hypothesis of Twenty Years Later // Contemporary Issues in Economics. Manchester, 1975.

15. *Ramsey F.* A Mathematical Theory of Saving // Economic Journal. 1928. December. 38. P. 543–559.

16. *Samuelson P.* A. An Exact Consumption-loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money // Journal of Political Economy. 1958. December. 66. P. 467–482.

17. *Stoker T.* Simple Tests of Distributional Effects on Macroeconomic Equations // Journal of Political Economy. 1986. 94. P. 763–795.