

## Осцилляции спредов цен короткого кредита

Смирнов А.Д.

Простая модель случайно изменяющихся спроса и предложения коротких кредитов демонстрирует свойства неравновесия в отношении «физического» количества сделок, совершаемых на рынке. Вместе с тем рынок денег функционирует при положительных и циклически колеблющихся спредах, одной из мер которых является абсолютная величина рассогласования цен спроса и предложения кредитов. На высоколиквидных рынках спреды цен покупки и продажи кредитных продуктов невелики, хотя в периоды кризисов могут достигать очень больших значений. Для изучения циклического характера динамики спредов предлагается использовать модель возмущенного осциллятора первого порядка. Бифуркации таких систем, в частности, могут являться сигналами потрясений, происходящих на рынке кредитов.

**Ключевые слова:** короткие кредиты; рынок денег; спред; колебания; возмущенный осциллятор.

В исследовании проблем осцилляций в экономике Д. Сорнет, Д. Штауфер и Х. Такая-цу применили простой и интересный прием установления соотношения между детерминированным предложением товаров и случайно изменяющимся спросом на них [22; 25]. Пассаж, который можно назвать «задачей о круассоне», написан ими весьма лапидарно, и занимает в обширной статье не более двух страниц. Тем не менее, как представляется, эта задача имеет методологическое значение, поскольку указывает на очевидное несоответствие между гипотезой равновесия и фактическим избытием товаров в странах с развитой экономикой. Вывод авторов о существовании избыточного предложения товаров и услуг представляется убедительным объяснением многих экономических реалий современности.

В данной статье аналогичный подход использован для изучения случайно изменяющихся спроса и предложения коротких кредитов. Для экономиста рынок денег (*money market*) интересен, прежде всего, потому, что именно на этом сегменте сравнительно недавно разыгрались трагические события, оказавшие влияние на всю экономику. «Замерзшие» в IV квартале 2008 г., после краха банка «Леман Бразерс», рынки кредитов, рав-

---

**Смирнов Александр Дмитриевич** – заслуженный деятель науки РФ, д.э.н., профессор, действительный член Российской академии естественных наук, НИУ ВШЭ. E-mail: adsmir@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в октябре 2012 г.

но как и чудовищно высокие спреды цен на кредитные инструменты, лишили всех участников рынка ликвидности, что предопределило дальнейшее разрастание кризисных метастазов по всей экономике. Тем не менее масштабы глобального рынка «коротких» кредитов (money market), который в 2008 г. достигал 14 трлн долл. [14], делают обоснованными, по крайней мере в первом приближении, предположения о его конкурентном характере, высокой ликвидности и независимости участников. Конкурентный характер поведения участников рынка денег, в свою очередь, позволяет использовать простую модель независимо и случайно изменяющихся спроса и предложения коротких кредитов.

Три хорошо известных факта лежат в основе рассуждений, предложенных в настоящей работе. Это – размещение «физических» объемов кредитов по минимуму заказов на их покупку и продажу, «ненаблюдаемость» равновесных цен на финансовых рынках, а также положительность спредов цен активов, получаемых «организаторами рынка». Взятые в совокупности, они приводят к утверждению о наличии комбинации свойств равновесия и неравновесия конкурентных рынков коротких кредитов. Если «физическая» компонента данного рынка, измеряемая числом «заказов» или сделок, оказывается неравновесной, то функционирование рынка возможно лишь при ненулевых спредах между ценами спроса и предложения на короткие кредиты, что подтверждается эмпирически. На рис. 1 приводится график значений спреда ставок LIBOR-LIBID за почти тридцатилетний период<sup>1</sup>.

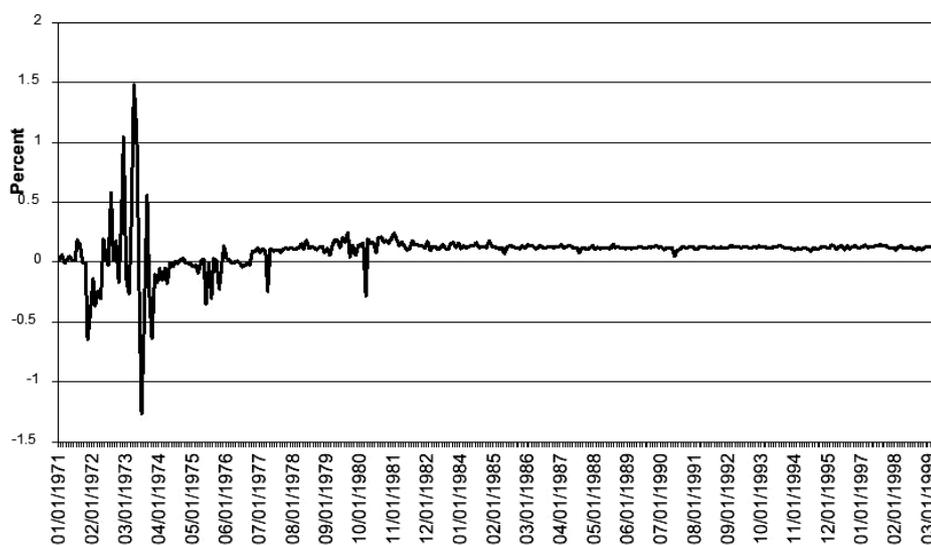


Рис. 1. Трехмесячный спред LIBOR-LIBID

<sup>1</sup> Данные ставки, представляя ожидаемую стоимость и доходность необеспеченных коротких кредитов, исчисляются с середины 1970-х годов. Скандал 2012 г., связанный с манипуляциями ставкой LIBOR, указал на несовершенства их расчетов. Негативные значения спредов в начале приведенного ряда, по-видимому, также отражают эти недостатки.

Из общих соображений следует, что неравновесный рынок либо эволюционирует посредством раздувания финансовых пузырей к своему краху, либо осциллирует посредством иных механизмов, например, возле критического состояния [2; 10; 18; 19; 20]. Предлагаемая модель иллюстрирует общие соображения о *кредитных циклах*, выдвинутые, в частности, в исследовании [28]. В данной статье показывается, что формирование спредов – не формальный атрибут работы биржевых рынков, а эффективный способ размещения на рынке объемов предложения кредитов, априори не совпадающих со спросом на них. Сложные механизмы их динамики изучены, однако, явно недостаточно. Простые гипотезы позволяют моделировать кредитные циклы, в первом приближении, как невозмущенный осциллятор первого порядка. В частности, бифуркации такого осциллятора могут считаться сигналами нежелательных явлений, включая «замерзание» рынка коротких кредитов.

### Характеристики рынка кредитных инструментов

Точного определения рынка денег (*money market*) не существует, но в самом широком смысле под ним подразумевается совокупность банков и других финансовых институтов, нефинансовых корпораций и фондов, группирующихся вокруг центральных банков, которые в совокупности формируют потоки краткосрочного долгового капитала<sup>2</sup>. Рынок денег – это механизм, который позволяет инвестировать, либо занимать денежные средства на короткие периоды времени, не превышающие по длительности одного года. Рынок денег, или кредитов, формируя короткие ставки процента, определяет репрезентативную цену денег. Он тесно связан с другими рынками долгов, но, в силу краткости времени своих оборотов, решает вопросы не финансирования долгосрочных проектов, а обеспечения участников рынка ликвидностью. Вместе с тем, предоставляя инвесторам возможность рефинансирования своей активности на более длительные сроки, он создает условия для нормального функционирования и других сегментов долгового рынка. Экономике, имеющие развитые рынки кредитов, поэтому, как правило, имеют хорошо работающие и высоколиквидные рынки нот и облигаций.

На кредитных рынках обращается огромное количество разнообразных инструментов, включая векселя, банковские поручительства, сертификаты депозитов, акции взаимных фондов, РЕПО и т.д. Эти инструменты, как правило, имеют нулевой купон, а торгуются либо с дисконтом от номинала, либо под ставку процента от текущей рыночной стоимости. Традиционно ставки процента на инструменты рынка денег рассчитываются, с некоторыми модификациями, на дисконтной основе и пересчитываются в стандартные, дискретно или непрерывно начисляемые, годовые ставки доходности к погашению (*yield-to-maturity, YTM*). Подавляющее большинство сделок на рынках кредитов совершается на внебиржевой основе (*over-the-counter, OTC*). Тем не менее работа на этих рынках детально регламентируется, имеет длительные традиции, например, в исчислении ставок доходностей, и даже своего рода ритуалы. Все эти, важные для трейдера, моменты мы оставляем в стороне, отсылая заинтересованного читателя к огромной литературе по данным вопросам.

<sup>2</sup> Существуют различия в терминологии. Для финансиста рынок денег (*money market*) – это рынок краткосрочных кредитных инструментов. Тот же термин в макроэкономике может использоваться для обозначения предельно агрегированного финансового рынка в целом.

На рынке коротких денежных инструментов, несмотря на то, что все сделки совершаются в номинальном выражении, существуют стандарты, или *notional amount* (иногда употребляют термин *modular input-output, MIO*). Методологические аспекты масштабирования (*scaling*) на финансовых рынках исследуются, например, в работе Д. Фармера [11]. Важно иметь в виду, что масштабы единичных сделок на рынке коротких кредитов чрезвычайно велики – они исчисляются, как правило, миллионами долларов. Это делает данный сегмент финансового рынка весьма специфичным, поскольку его участниками, в основном, являются крупные банки и другие финансовые компании. За редким исключением, индивиды присутствуют опосредованно, через деятельность различных фондов, например, взаимных фондов денежного рынка (*money market mutual funds, MMMF*), аккумулирующих огромные средства.

Единицы сделок (*units of account*), совершаемых на рынке денег, публикуются на страницах ведущих финансовых изданий. Эти стандарты, вполне понятно, существенно разнятся, иногда на несколько порядков, для различных инструментов. Аналитически, однако, вполне допустимо вычленить так называемый «физический» объем денежного рынка. Например, если полагать единицей анализа сделку с номиналом в 10 млн долл., то число «физических» сделок на глобальном рынке кредитов, кратном 10 трлн долл., составит величину порядка  $10^6$ . Иными словами, есть все основания полагать рынки кредитов как «глубокими», так и «широкими» в общепринятом понимании. Явно конкурентный характер этих рынков, в первом приближении, делает реалистичными гипотезы независимости значений спроса и предложения кредитов, а также непрерывности и дифференцируемости соответствующих распределений инструментов данного рынка.

Важно иметь в виду, что инструменты рынка денег не торгуются по ценам равновесия, которые относятся к классу так называемых «ненаблюдаемых» переменных (*nonobservable variables*), и непосредственно рынком не регистрируются. Сделки по инструментам коротких кредитов совершаются по ценам покупки (*bid price*) и продажи (*ask or offer price*) с ненулевой разностью между ними, т.е. с так называемым спредом (*spread*). Например, некоторый кредитный продукт, скажем, казначейский вексель с номиналом в один миллион фунтов стерлингов и сроком погашения в 91 день, котируется на дисконтной основе, причем годовая величина дисконта равна 5%. Текущая стоимость такого векселя составит 987534 фунтов:

$$P_{TB} = £1000000 \left(1 - 0.05 \frac{91}{365}\right) = £987534.$$

На ликвидном рынке, если брокер купит такой инструмент за 986 тыс. долл. (*bid price*), а продаст его за 988 тыс. долл. (*ask or offer price*), то величина относительного спреда (*spread*) по данной сделке составит около 20 базисных пунктов.

Спредов рынка денег много. Один из наиболее популярных среди них, так называемый TED-спред, рассчитывается как разность между доходностью по трехмесячному казначейским векселям США (T-bill) и соответствующей ставкой доходности по необеспеченным межбанковским займам на Лондонском финансовом рынке (LIBOR). Динамика этого спреда приводится на рис. 2, взятом из Wikipedia, где содержится и информация о значениях этого индикатора за период 2006–2009 гг. [29]. Если долгосрочное среднее значение этого спреда составляет примерно 30 базисных пунктов, то, как видно на данном графике, в период кризиса значения спреда превысили 400 базисных пунктов,

что отражало резко возросшие кредитные риски и сокращение ликвидности на рынке денег. Способность TED-спреда характеризовать изменение рискованности кредитных операций и объясняет его широкое использование как меры рисков на рынке краткосрочных займов.

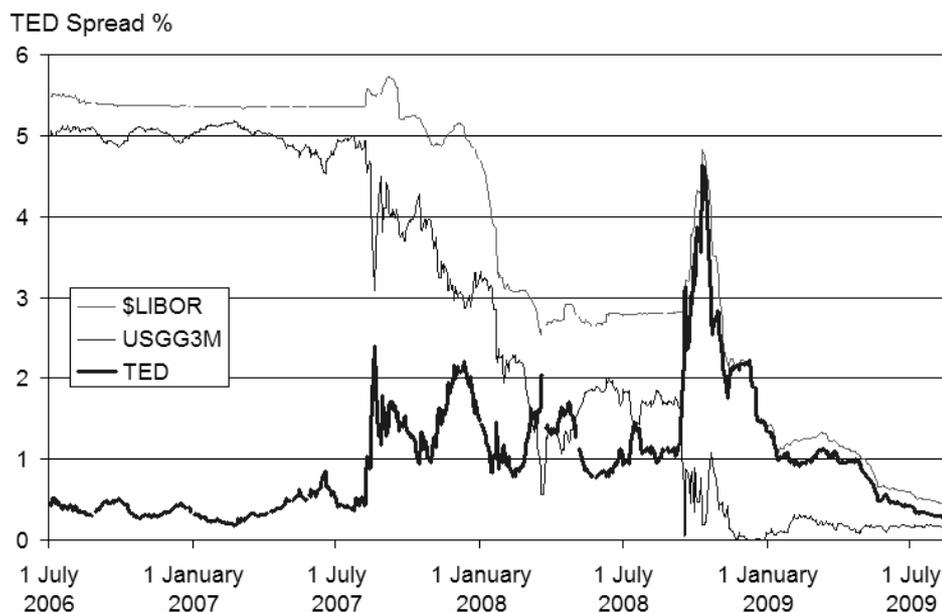


Рис. 2. Динамика TED-спреда в период финансового кризиса 2007–2009 гг.

Хотя TED-спред не полностью соответствует вознаграждению брокеров, его динамика, представленная на рис. 2, подтверждает утверждение о положительности значений спреда. Между тем цены спроса и предложения кредитных продуктов могут быть как больше, так и меньше друг друга, в зависимости от того, кто из участников рынка является инициатором сделки и основным плательщиком спредов.

### «Физический» аспект конкурентного рынка кредитов

Несмотря на то, что товаром на рынке кредитов являются деньги, торговля ими осуществляется, как отмечено выше, в «физических» единицах. «Физический» аспект конкурентного рынка кредитов имеет простые правила. Если спрос на кредиты составляет, скажем, 10 единиц, а предложение – 12 единиц, то фактически размещено на рынке будет лишь 10 единиц; напротив, при спросе в 13 единиц, а предложении 11, объем размещенных заказов составит 11 единиц. Таким образом, рынок размещает кредитные ресурсы, ориентируясь на минимальное значение каждой пары «спрос-предложение» кредитов. Относительный избыток или нехватка кредитных ресурсов вынуждает «организаторов рынка» (*market makers*) постоянно корректировать свои «запасы» активов.

На каждый момент времени формирование тех или иных объемов предложения и спроса на кредитные продукты, помимо чисто экономических факторов, отражает воздействие самых разнообразных обстоятельств – от естественных катаклизмов и неурожая, до социальных волнений и смены политических режимов. Поскольку полные и непротиворечивые описания всех этих факторов не существуют, допустимо предположение о случайном характере изменений, происходящих как на стороне спроса, так и предложения денежных инструментов. Если «физические» объемы спроса на кредиты представить случайной величиной  $X$ , а объемы предложения кредитов – случайной величиной  $Y$ , то функция

$$(1) \quad \min(X, Y) \equiv [X, Y]^{-},$$

аппроксимируя размещение на рынке объемов спроса и предложения кредитов, дает представление о «физическом» аспекте конкурентного рынка таких продуктов. Известно, что для среднего значения (обозначенного через угловые скобки) функции минимума двух случайных переменных  $X$  и  $Y$  имеет место следующее выражение:

$$(2) \quad \langle [X, Y]^{-} \rangle = \langle X | X < Y \rangle + \langle Y | Y < X \rangle.$$

Если случайные переменные  $X$  и  $Y$  независимы, причем  $X$  принимает значения на отрезке  $[0, a]$ , а переменная  $Y$  – на отрезке  $[0, b]$  с плотностью совместного распределения

$$f(x, y) = f(x)f(y),$$

то равенство (2) соответствует вычислению ожидаемого значения функции минимума двух случайных переменных:

$$(3) \quad \langle \min(X, Y) \rangle = \int_0^b f(y) dy \left[ \int_0^y x f(x) dx + \int_y^a y f(x) dx \right].$$

Используем формулу (3) для характеристики «физического» аспекта функционирования стохастического рынка кредитов. Пусть, например, общие объемы спроса и предложения кредитов априори равны, а их конкретные значения равномерно распределены на отрезке  $[0, 10]$ . Для равномерно распределенных случайных переменных выполняется гипотеза независимости, а значит предельные распределения для функции (1) одинаковы, а соответствующие плотности распределений – константы. В силу известных соотношений

$$F(z) = \Pr[Z \leq z] = \int_0^z f(y) dy \quad \text{и}$$

$$F(z) = \Pr[Z \leq z] = 1 - \Pr[Z > z] = 1 - \Pr[X > x] \Pr[Y > y] = 1 - (1 - \Pr[X \leq x])(1 - \Pr[Y \leq y])$$

кумулятивная функция распределения вероятностей для (1) принимает весьма простой вид

$$F(z) = 1 - \left(1 - \frac{z}{10}\right)^2.$$

Соответственно, ожидаемая величина предложения кредитов, либо спроса на кредиты

$$\int_0^s z dF(z) = \frac{s^2}{10} - \frac{s^5}{150}$$

вполне очевидно, имеет максимум, достигаемый в точке  $s^* = 10$ . Априорное равенство спроса и предложения кредитов приводит к тривиальному результату: имеющееся предложение денежных инструментов, соответствуя спросу, на таком рынке размещается полностью. Однако, что не менее очевидно, априорное равенство спроса и предложения кредитов – условие, слишком жесткое и не отражающее объективные свойства рынка. Огромный объем эмпирической информации говорит о том, что спрос на кредиты, равно как и их предложение, формируются под воздействием факторов столь различной природы, что утверждать о наличии их априорного равенства нет абсолютно никаких оснований.

Экономически более естественно полагать, что избыток или нехватка кредитных ресурсов отражают различные состояния экономики, хотя истинные причинно-следственные связи, порождающие подобные рассогласования, остаются не познанными до конца. Например, в преддверии кредитного кризиса 2007–2009 гг. рынок кредитов характеризовался их избытком. В тот период, в значительной мере под влиянием длительной политики низких учетных ставок, на кредитных рынках сформировались огромные количества избыточной ликвидности. Сейчас в это трудно поверить, но выражение «деньги повсюду» было тогда самым популярным среди участников рынка кредитов. Именно нехватка спроса на кредитные продукты породила такие извращенные формы его искусственного стимулирования, как появление разного рода payment-in-kind, NINJA loans и collateralized debt obligations, CDO, т.е. широкой гаммы долговых инструментов, обеспеченных непогашенными долгами. Все это в конечном счете спровоцировало кредитный кризис 2007–2009 гг. и предопределило гигантские потери участников рынка – почти на 5 трлн долл. – из-за последующего «усыхания» стоимости токсичных долговых инструментов. Напротив, в IV квартале 2008 г., в разгар credit meltdown, предложение заемных средств характеризовалось их острым дефицитом, а «испарившаяся» почти мгновенно ликвидность породила избыточный спрос на кредиты.

Избыточное предложение кредитных ресурсов может возникнуть для априори ограниченных объемов спроса, что, как уже было отмечено, имело место в 2003–2007 гг. Рассмотрим простой пример вычисления рыночной (оптимальной) величины ожидаемого предложения кредитов на конкурентном рынке, где объем спроса ограничен величиной в 10 единиц. Необходимое условие оптимума, для случайно изменяющихся спроса и предложения кредитов с одинаковыми предельными распределениями, имеет следующий вид:

$$\frac{d}{ds} \int_0^s f(z) dz (\int_0^y x f(x) dx + \int_y^{10} y f(x) dx) = 0.$$

Для равномерного распределения кредитных продуктов ожидаемое количество сделок на рынке – это функция объемов предложения кредитов

$$\int_0^s \frac{dy}{s} (\int_0^y \frac{x}{10} dx + \int_y^{10} \frac{y}{10} dx) = \frac{s}{2} - \frac{s^2}{60},$$

которая для предельных объемов предложения в 30 единиц удовлетворяет требованию положительности. На рынке случайно изменяющихся спроса и предложения оптималь-

ный объем предложения кредитов составит 15 единиц, что совпадает с его средним значением:

$$\frac{1}{30} \int_0^{30} s \, ds = \frac{0+30}{2} = 15.$$

Таким образом, если рыночное предложение кредитов является оптимальным, то его величина оказывается существенно выше граничного значения спроса. Иными словами, для заданного объема спроса предложение кредитных инструментов становится избыточным, а конкурентный рынок демонстрирует свойство явно выраженного неравновесия. Очевидно, что в силу симметричности функции минимума (1), если рынок задает ограничения на объемы предложения кредитов, то из аналогичных соображений следует существование избыточного спроса на них. Таким образом, в силу разных экономических обстоятельств рынок кредитов может сохранять свойство «физического» неравновесия. Фактические рынки кредитов, как отмечалось выше, функционируют таким образом, что «организаторы рынка» постоянно корректируют свои запасы активов, увеличивая их в ситуациях избытка предложения и сокращая в противном случае.

В первом приближении, выборочные значения спроса и предложения кредитных ресурсов естественно считать распределенными с равными вероятностями на некотором интервале допустимых значений. Однако гипотеза равномерного распределения спроса и предложения кредитов, использованная в предыдущих расчетах, может показаться слишком простой, а, кроме того, равномерное распределение нестабильно. Так, сумма двух равномерно распределенных случайных величин имеет иное, так называемое «треугольное» распределение, или распределение Симпсона. Не влияет ли специфичность данной гипотезы на вывод о неравновесных свойствах рынка? Финансовые процессы обычно принято характеризовать посредством логнормальных распределений, которые гарантируют неотрицательность экономических переменных (цен или объемов сделок). Для наших простых рассуждений логнормальное распределение слишком «вычурно» и требует сложных вычислений. Поэтому рассмотрим нормальное, или гауссовское, распределение со средним значением  $\mu = 5$ , гарантирующим для модели положительность предложения (либо спроса) на кредиты. Для функции плотности спроса и предложения кредитов

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(x-5)^2}{2} \right],$$

распределенных независимо и нормально, предположим, что значения спроса случайно выбираются из отрезка значений  $[0, 10]$ . Следуя изложенной методике расчетов, находим условное значение ожидаемого предложения кредитов, которое программа Mathematica 7 вычисляет как

$$\langle S|X \rangle = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{5s}{2} - (-5+s)s} \left( -\sqrt{2} e^{\frac{1}{2}+5s} (-5+s) + e^{\frac{s^2}{2}} (\sqrt{2} e^{-5+2s}) + e^{13} \sqrt{\pi} ((-26+s(10+s)) * \operatorname{Erf} \left[ \frac{5}{\sqrt{2}} \right] - (26 + (-10+s)s) * \operatorname{Erf} \left[ \frac{-5+s}{\sqrt{2}} \right]) \right),$$

где  $\text{erf}(x)$  является специальной функцией, определяемой как  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp[-t^2] dt$ .

Аналитическое представление предельных изменений предложения кредитов как функции верхнего предела соответствующего интеграла имеет довольно громоздкий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} (S|X) = & \\ & \frac{1}{8\pi} e^{-38+5s-\frac{5s^2}{2}} (e^{-13} (2e^{\frac{1}{2}s(10+s)} (23 + (-10 + s)s) + e^{s^2} (-46 + 30s - 4s^2) - e^{\frac{25}{2}+s^2} \sqrt{2\pi} (120 + s(-78 + \\ & s(5 + s))) \text{Erf}[\frac{5}{\sqrt{2}}]) + e^{\frac{5s}{2}+s^2} \sqrt{2\pi} (-6 + s)(-5 + s)(-4 + s) \text{Erf}[\frac{-5+s}{\sqrt{2}}]). \end{aligned}$$

Эта функция графически представлена на рис. 3. Уравнение необходимого условия оптимальности предложения кредитов имеет три корня: точный,  $s_2^* = 5,34$ , и два приближенных,  $s_1^* \cong 0$  и  $s_3^* \cong 20$ . Из этого следует, что для спроса, ограниченного объемом в 10 единиц, рынок кредитов, в любом случае, остается неравновесным. Наиболее вероятным для гипотезы нормального распределения является значение предложения кредитов в 5 единиц, которое практически совпадает с его средним значением, тогда как элементарные вероятности других оптимальных значений предложения кредитов невелики.

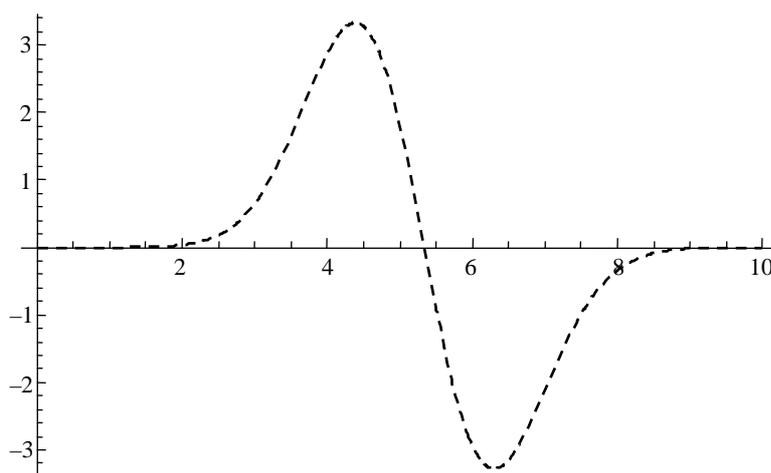


Рис. 3. Первая производная функции условного распределения кредитов

Таким образом, для гауссовского распределения оптимальное значение предложения кредитов стремится к среднему значению, что, естественно, формирует иную экономическую интерпретацию состояния рынка. Тем не менее гипотеза гауссова распределения также не отрицает возможности размещения неравных «физических» объемов кредитных продуктов. В заключение отметим, что современные модели финансового рынка, например, лог-линейная модель Д. Фармера [11], используют факт неравенства спроса и предложения «физических» объемов кредитных продуктов как априорное соотношение,

которое эмпирически подтверждается практикой функционирования рынков. На фактических рынках несовпадение спроса и предложения, кстати, всегда имеющее место, если наряду с рыночными заказами инвесторы формируют «лимитные» заказы (*limit orders*), компенсируется «организаторами рынка», которые корректируют свои запасы активов асимметрично их избыточному спросу или предложению.

### Спреды и фазы рынка кредитов

Из предыдущих рассуждений следует, что рынок находится либо в фазе превышения спроса над предложением, либо избыточного предложения. Иначе, «физический» аспект рынка кредитных продуктов имеет явно выраженные черты циклического развития, в котором равенства спроса и предложения имеют место, но «нетипичны», поскольку вероятности их возникновения весьма малы. Поскольку фактические рынки регистрируют лишь цены покупок и продаж активов, которые не равны друг другу, то это объясняет, по нашему мнению, «ненаблюдаемость» на них цен равновесия. Напомним, что за функцией спроса стоят покупатели продукта (заемщики), а предложение определяется поведением продавцов (кредиторов). По цене спроса участники рынка кредитов (заемщики) покупают у брокеров (дилеров) кредитный продукт с заданными свойствами, а по цене предложения участники рынка (кредиторы) продают данный продукт брокерам (дилерам). Цены спроса и предложения кредитов, которые уплачивают участники рынка, включают премию, которую получают «организаторы рынка» – брокеры или дилеры, работающие с данным кредитным продуктом.

С точки зрения «организаторов рынка» (*market makers*) кредитный продукт приобретает по цене покупки (*bid price*),  $p_b$ , а продается – по цене продажи (*ask or offer price*),  $p_a$ . Размеры цен покупки и продажи определяют поведение так называемых «организаторов рынка», т.е. брокеров или дилеров, работа которых на биржевом и на внебиржевом рынках вознаграждается спредами. Для брокеров/дилеров на нормально функционирующем рынке цена покупки всегда меньше цены продажи актива, а размеры спреда (*bid-ask spread*) – положительная величина:

$$spread \equiv p_a - p_b > 0.$$

Соотношение цен спроса и предложения (в некотором масштабе) асимметрично отражает структуру «физического» аспекта рынка кредитов. Если предложение кредита превышает спрос на них, то неравенство  $p_d > p_s$  делает возможным размещение на рынке избыточного количества заказов. Напротив, если спрос на кредитные продукты превышает их предложение, то неравенство  $p_d < p_s$  позволяет удовлетворить избыточный спрос на кредитные инструменты. Иными словами, неравновесия «физического» рынка кредитов транслируются в соответствующие неравенства цен спроса и предложения, рассогласования которых формируют спреды, являющиеся источником оплаты премий «организаторам рынка».

Пусть  $\varepsilon$  характеризует относительную величину этой премии, или спреда, в составе цены либо спроса, либо предложения. Тогда, в зависимости от состояния «физического» аспекта рынка кредитов, можно выявить две качественно отличные ситуации. Если ог-

раничением рынка является спрос, а предложение кредита превышает спрос на него,  $S^* > \bar{D}$ , то цена покупки (*bid price*) совпадает с ценой предложения кредитов  $p_s$  и

$$(4) \quad \frac{S^*}{\bar{D}} = \frac{p_d}{p_s} = \frac{p_s(1+\varepsilon)}{p_s} = 1 + \varepsilon.$$

Формула (4) показывает, что в условиях избыточного предложения кредитов спред оплачивается их покупателям, т.е. заемщиками. Противоположная ситуация возникает, когда предложение кредита ограничено относительно спроса, иначе, имеет место неравенство  $S^* < \bar{D}$ . В этом случае

$$(5) \quad \frac{D^*}{\bar{S}} = \frac{p_s}{p_d} = \frac{p_s}{p_s(1-\varepsilon)} \cong 1 + \varepsilon.$$

В таких условиях более высокие цены предложения, совпадающие в данном случае с ценами продажи (*ask price*) брокеров, помогают в полном удовлетворении спроса на кредитные продукты при ограниченном предложении. Кредиторы выплачивают премию «организаторам рынка».

Сказанное имеет эквивалентное выражение через «высокую»,  $h$ , и «низкую»,  $l$ , цены, регистрируемые рынком, например, в течение торгового дня. Если высокая цена инициируется покупателем, а низкая – продавцом, то  $\text{Log} \left[ \frac{h}{l} \right] = \text{Log} \left[ \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right] \cong 2\varepsilon$  и единицей цикла

предпочтительнее выбрать два торговых дня. Кроме того, поскольку эмпирические данные говорят о пропорциональности относительных цен и их волатильностей, то достаточно простые уравнения для таких связей можно составить по функциям  $(\text{Log}[z])^2$ ,

$z = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$ . Экономическое обоснование соответствующих уравнений и их решение приводятся, например, в исследовании [7], которое дает полное представление о современном состоянии дел в этой области.

Для нашего исследования основной интерес представляет феномен перманентной коллизии «физических» заказов на кредиты, цен соответствующих инструментов и спредов. С одной стороны, в зависимости от соотношения «физических» заказов на кредиты, цены спроса на кредитные продукты могут быть как выше, так и ниже цен их предложения. Однако в любой из этих ситуаций брокеры (дилеры) получают положительное, хотя и колеблющееся по величине, вознаграждение за свои посреднические услуги.

В исследовании кредитного кризиса 2007–2009 гг. Джон Кассиди вспоминает об эпизоде времен последнего «классического» кризиса 1987 г. [6]. Вольный пересказ этого случая предлагается ниже. Вечером «черного вторника» октября 1987 г. Кассиди, тогда молодой репортер финансовых новостей, поспешил в кафе неподалеку от Уолл-стрит, которое было излюбленным местом встреч брокеров фондовой биржи. По пути он обдумывал, как наиболее деликатно задавать неудобные вопросы участникам фондового рынка, разоренным и убитым горем. К его немалому удивлению, в кафе, однако, царил необычайное, хотя и несколько лихорадочное, веселье. Выстрелы разорившихся самоубийц, по всей видимости, заглушались непрерывным треском пробок, вылетающих из бутылок шампанского. Лишь много времени спустя он понял причину столь разительного откло-

нения реальной обстановки от своих ожиданий. Дело в том, что «организаторы рынка» получают вознаграждение в виде спреда, который является положительной величиной всегда, как в период подъема конъюнктуры («бычий» рынок), так и ее спада («медвежий» рынок). При этом резкая смена конъюнктуры обычно сопровождается расширением спредов, которые, конечно же, всегда оплачиваются инвесторами. Однако эти люди, скорее всего, были завсегдатаями другого кафе.

Коллизия «физических» заказов на кредиты, цен соответствующих инструментов и спредов носит фундаментальный характер и формирует основу того или иного объяснения структуры, организации и функционирования рынка денег и определенных макрофинансовых пропорций. Изучение природы этого явления в последнее время стало привлекать внимание финансистов<sup>3</sup>. Так, в исследовании Лилло и Фармера [15] выдвинута гипотеза о комбинации равновесных и неравновесных свойств у реально работающих рынков акций. На основе статистического анализа высокочастотных данных о торговле рядом акций на Лондонской бирже авторы установили наличие так называемых «длинных» корреляций (неинтегрируемых автокорреляционных функций степенного вида), которые влияют на формирование «заказов» и сделок на финансовых рынках. В отношении «физических» аспектов рынок акций, по мнению авторов, является неравновесной системой, хотя и сохраняет, в определенной степени, свою «эффективность». Последнее оказывается возможным в силу существования своего рода компенсаторных механизмов, объясняющих, в частности, практическую невозможность попыток переиграть рынок.

Рассмотрим, как происходит торговля короткими кредитами. В частности, основная активность суперкороткими, суточными (*overnight*) кредитами приходится на утро каждого делового дня [23]. В это время типичный участник этого рынка – крупный банк или другая финансовая компания – прогнозирует дневную потребность рынка в кредитах и сопоставляет ее с имеющимися у него средствами. Если их достаточно, то компания выдает кредиты, а если кредитные ресурсы дефицитны, то компания занимает недостающие средства. Эта технология может быть выражена формально как

$$LF^s \begin{cases} > \\ < \end{cases} LF^d \Rightarrow \begin{cases} \text{выдать заем;} \\ \text{получить заем,} \end{cases}$$

где переменные  $LF$  соответствуют предложению и спросу кредитных продуктов (*loanable funds*). Разумеется, если прогноз финансовой компании оказался неточным, то она производит необходимую коррекцию своих действий, либо занимая недостающие, либо одалживая избыточные средства. В зависимости от ситуации с «физическими» объемами кредитов «организатор рынка» принимает позиции либо кредитора, либо заемщика, гарантируя тем самым положительность спредов покупки/продажи на каждой сделке. Эти корректирующие действия объясняют положительность спредов, которая не нарушается при аperiodической избыточности либо спроса, либо предложения кредитов из-за случайности происходящих процессов.

<sup>3</sup> Даже лучшие из пособий по финансовым рынкам, например, монография Д. Блейка [5], не рассматривают причины и факторы возникновения спредов, хотя литература по техническим аспектам торговли спредами огромна. Столь же неопределенно трактует взаимосвязи между спредами и ценами предложения и спроса такой весьма компетентный источник, как Investopedia.

Высказанные соображения позволяют считать спреды «абсолютной величиной» рассогласования цен предложения и спроса на кредитные продукты. Из (4) и (5) следует, что относительные спреды  $\varepsilon$ ,

$$(6) \quad \varepsilon = \begin{cases} \frac{p_d}{p_s} - 1, & p_d > p_s \\ 0, & p_d = p_s \\ \frac{p_s}{p_d} - 1, & p_d < p_s, \end{cases}$$

являются положительными величинами, несмотря на циклический характер изменений соотношения цен спроса и предложения кредитов. Если определить переменную  $z = \frac{p_d}{p_s}$ , то из (6) следует, что для малых значений относительного спреда  $\varepsilon$  имеет место равенство

$$(7) \quad \varepsilon \cong Abs[\log z],$$

где символ *Abs* используется для обозначения абсолютной величины. Можно отметить также, что в окрестности единицы значения функции (7) и  $(\text{Log}[z])^2$  довольно близки друг к другу, что видно из рис. 4. Это позволяет утверждать, что эмпирические расчеты спредов, применяемые в практике работы трейдеров, находятся в согласии с утверждениями, сделанными выше.

Спреды и их производные

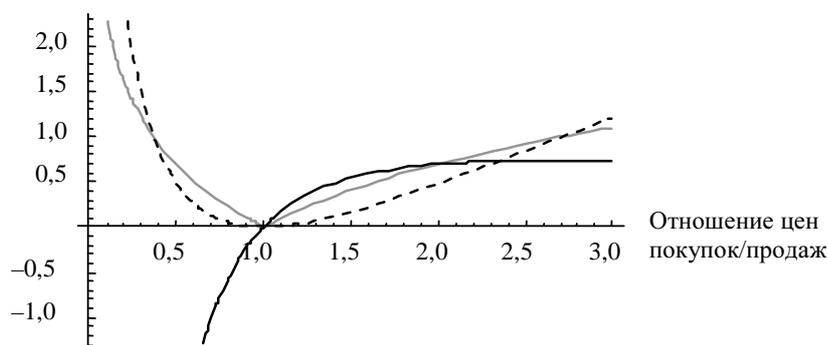


Рис. 4. Циклы изменений относительного спреда

На внебиржевых рынках (*over-the-counter, OTC markets*), где совершается основная масса сделок на покупку и продажу коротких кредитов, так же как и на биржах, возмещение спредов цен покупок и продаж у «организаторов рынка» производится инвесторами. В расчете на единицу сделки высоколиквидные рынки в нормальных условиях демонстрируют, как правило, весьма небольшие величины спредов, исчисляемые долями базисных пунктов. Поскольку спреды являются следствием действий «организаторов рынка» по обеспечению размещения кредитов, то естественным предположением, которое поддерживается эмпирическими данными, является существование механизма цикличности

того или иного вида. Формирование спредов, равно как и способов их уплаты различными участниками рынка, отличаются для различных фаз кредитного цикла: в случае избыточного предложения спред уплачивается кредиторами, главным образом, а в условиях избыточного предложения – заемщиками.

### Простой осциллятор спредов

Фактическая динамика спредов цен на кредитные продукты отражает их непрерывные изменения, которые, в общем случае, носят характер апериодических колебаний. Природа таких колебаний самая разная – они происходят как под влиянием причин общеэкономического характера, так и могут быть вызваны краткосрочными эффектами рыночной конъюнктуры и поведения участников рынка. Вдоль оси реального (астрономического) времени спред цен кредитного инструмента – случайная величина, значения которой измеряют на основе модели Р. Ролла и ее различных модификаций [4; 7; 21]. Особое направление современных исследований в этой области – это так называемый высокочастотный анализ циклов в течение торгового дня (*intraday trade*). Разработки подобного типа активно проводятся, особенно на уровне микроструктуры рынка, и в рамках направления, обычно называемого «стохастическим резонансом» (*stochastic resonance, SR*) [4; 13; 24].

Анализ результатов, полученных в указанных выше областях исследований, далеко выходит за рамки настоящей работы. Тем не менее можно выделить следующий важный результат, подтверждаемый эмпирически. Исследования случайных колебаний на финансовом рынке выявили определенные стереотипы изменений ряда его показателей, которые носят циклический и апериодический характер [12; 20]. В ракурсе анализа спредов цен на короткие кредиты это делает заметным несоответствие между весьма продвинутыми методами расчета их текущих значений, с одной стороны, и представлениями о механизмах, порождающих динамику спредов, с другой. Между тем именно второе направление формирует информацию прогнозного характера, в том числе и о возможных коллизиях на соответствующих рынках. Это закономерно ставит вопросы о характере и структуре процессов изменения спредов, в частности, о возможности их изучения в отсутствие неопределенности.

В первом приближении, как представляется, динамика спредов может исследоваться с помощью осцилляторов. Обычно осцилляторы задаются системами второго порядка, но базовым механизмом такого вида, использующим минимальный объем информации о процессе, считается осциллятор первого порядка. Между тем вдоль оси времени система первого порядка, как известно, осциллировать не может: она эволюционирует либо к точке равновесия (аттрактору), либо от нее, если последняя – репеллер. Циклическая система первого порядка может, тем не менее, функционировать, если собственное время такой системы представлено как бы «скрученным» в окружность. Поскольку астрономическое время повторяется, например, через 24 часа, то для кратких периодов времени (скажем, день или два дня погашения кредитов) это представляется вполне допустимым. Для более длительных периодов такой прием представляется не столь обоснованным, поскольку склонен недоучитывать воздействие целой гаммы факторов самой различной природы<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Данный подход широко используется в изучении феномена явлений, связанных по фазе (*phase-locked phenomena*). Он применяется, например, в электронике для моделирования колеба-

Представление изменений спреда через движение точки по окружности времени делает его динамику периодической со временем цикла  $T_c = 2\pi\omega$ , где  $T_c$  выбирается равным одному или двум торговым дням, либо угловой частотой  $\omega = \frac{2\pi}{T_c}$ . Конечно, такое предположение требует дальнейших и серьезных эмпирических обоснований. В частности, очевидно, что добавление «шума» (*noisy trade*) может существенно модифицировать поведение отдельных участников рынка, равно как и системы в целом. В отсутствие случайности первая компонента ряда Фурье для производной функции  $\text{Log } z$  вычисляется как

$$\frac{1}{2\pi} \left\{ e^{iz} (\text{ExpIntegralEi}[-i\pi] - \text{ExpIntegralEi}[i\pi]) + e^{-iz} (-\text{ExpIntegralEi}[-i\pi] + \text{ExpIntegralEi}[i\pi]) \right\},$$

где  $\text{Ei}[z] = -\int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ . Программа Mathematica7 определяет это выражение как простую синусоиду, представленную на рис. 5. Полагая, что один из параметров угловой частоты изменений спреда,  $\omega$ , постоянен, а возмущение фазы представлено синусоидальной функцией, получаем уравнение возмущенного осциллятора первого порядка:

$$(8) \quad \varepsilon'(T) = \omega - a * \sin[\varepsilon(T)].$$

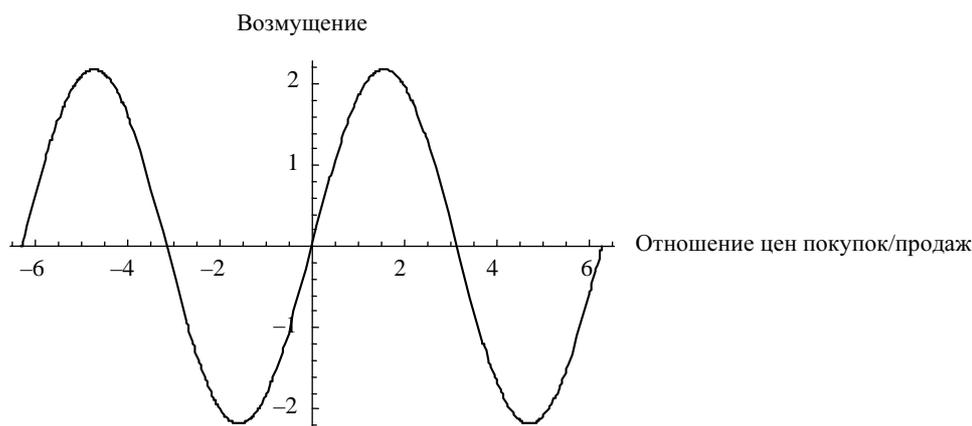


Рис. 5. Возмущение осциллятора спредов

Теория осцилляторов первого порядка хорошо разработана и находит применение во многих областях науки и техники [27]. Для осциллятора (8) величины и характер изменения относительных спредов  $\varepsilon(T)$  определяются соотношениями параметров частоты,  $\omega$ , и амплитуды колебаний,  $a$ . Экономически компонента  $\omega$  отражает краткосрочную тенденцию (*drift*) изменений спреда, которую в отсутствие случайностей на ламинарном рынке

---

ний напряжения в сверхпроводниках; в биологии – для моделирования почти периодических мерцаний большого числа тропических светлячков [27].

естественно полагать некоторой положительной константой. Гармоническая функция в правой части (8) характеризует воздействие различных факторов, влияющих на поведение участников рынка. Амплитуда колебаний  $a > 0$  особенно важна для экономической интерпретации поведения системы. По экономическому смыслу амплитуда колебаний спреда отражает степень адаптивности участников к условиям, складывающимся на рынке. Величина амплитуды, следовательно, характеризует меру синхронности поведения инвесторов, которая, в частности, резко возрастает на гомогенных финансовых рынках. Устойчивость осциллятора (8) в точках равновесия определяется из равенства

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \varepsilon} = -a \cos(\varepsilon^*) = \pm a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2},$$

которое говорит о том, что система устойчива для  $\cos(\varepsilon^*) > 0$  и неустойчива в противном случае.

Нелинейное дифференциальное уравнение (8) обычно исследуется качественно, хотя оно имеет аналитическое решение:

$$(9) \quad \varepsilon(T) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{1}{\omega} (a - \sqrt{\omega^2 - a^2} \operatorname{tg}(0.5 T(-\sqrt{\omega^2 - a^2} - c_1 \sqrt{\omega^2 - a^2}))) \right],$$

где  $c_1$  – один из параметров системы. Функция  $\varepsilon(T)$  изменяется циклически, и для некоторых начальных условий может быть представлена неотрицательными колебаниями спреда, что видно на рис. 6.

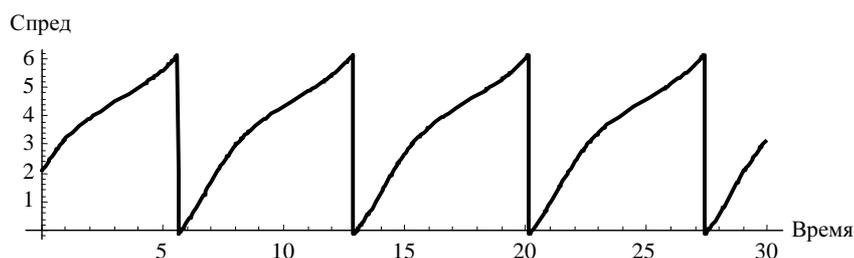


Рис. 6. Циклические изменения спреда для  $\omega > a$

Цикличность рассматриваемого процесса своеобразна. Если частота (8) соответствует рабочему дню торговли некоторым инструментом, то величина спреда сравнительно медленно возрастает в течение дня, весьма быстро падая к его концу<sup>5</sup>. Насколько это представление соответствует эмпирике фактических рынков в общем случае, остается предметом дальнейших исследований. Вместе с тем отметим, что статистические исследования финансовых рынков, которые активно проводятся, особенно для высокочастотных колебаний, выявляют целый ряд образцов подобной периодичности, отражающей различные стереотипы поведения участников рынка. Так, интересный анализ цикличес-

<sup>5</sup> Последнее можно приписать, например, явлениям «коротких продаж» (*short selling*) инструментов, весьма скоротечно происходящим на рынке денег.

ности случайной частоты заявок на сделки, тесно связанных с динамикой спредов цен покупок и продаж для циклов внутрисдневной торговли активами, содержится в исследовании К. Силва и Дж. Юня [24].

Интересным свойством осциллятора (8) являются возможные бифуркации траекторий спредов, которые могут изучаться сравнительно простыми средствами. Одно из следствий бифуркации – появление режима отсутствия осцилляций наряду с режимом колебаний спредов. Для неравенства  $\omega > a$  динамика спредов изменяется почти периодически, однако при равенстве параметров системы,  $\omega = a$ , появляется точка равновесия, которая затем (для  $\omega < a$ ) «раздваивается», удовлетворяя условию

$$\cos[\varepsilon^*] = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}.$$

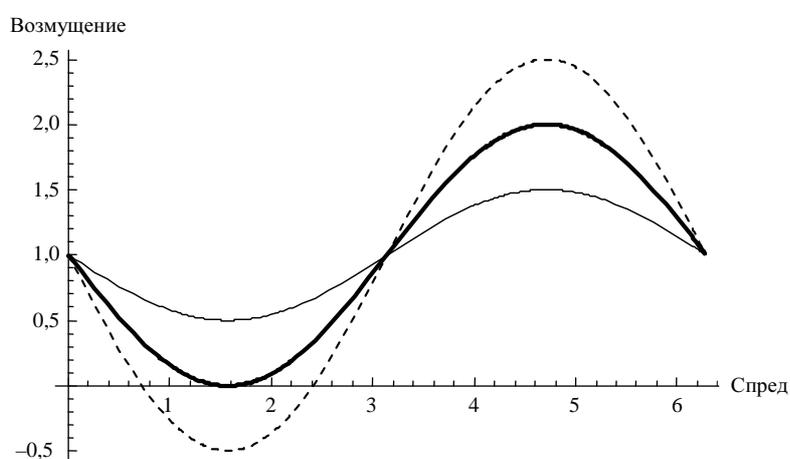


Рис. 7. Бифуркации простого осциллятора спредов

Появление равновесий свидетельствует о прекращении колебаний спредов, значения которых начинают тяготеть к точке устойчивости. Равновесия системы, однако, могут ассоциироваться не только с «нормальным» состоянием рынка, но и его пертурбациями и катастрофами. Например, если амплитуда колебаний относительного спреда увеличилась и стала равной частоте колебаний системы, то рынок кредитов как бы «замерзает» на высоком уровне спредов. Такие спреды, как говорилось выше, носят запретительный характер и свидетельствуют об остром дефиците кредитов и ликвидности. Тем не менее приближение равновесного спреда к нулю означает падение доходов «организаторов рынка», прекращение операций которых тождественно «схлопыванию» соответствующего сегмента финансового рынка. Это напоминает состояние сегмента коммерческих векселей, обеспеченных долгами (*asset-backed commercial papers, ABCP*) в конце 2008 г. В модели осциллятора возникновение подобной ситуации можно объяснить резким ростом адаптивности участников рынка, особенно брокеров/дилеров, которая измеряется параметром  $a > 0$ . Например, процессы «подражания» (*herding*) приводят, как правило, к существен-

ному ускорению однотипных реакций инвесторов, синхронно и в больших количествах покупающих некоторый финансовый актив. Более того, есть основания полагать, что подобная «гиперактивность» инвесторов может стать хаотической, а затем резко измениться на полное отсутствие значимых объемов сделок [1; 26].

### Некоторые выводы

Дискуссии о равновесных и неравновесных свойствах экономических систем, в частности финансовых рынков, занимают видное место в специальной экономической литературе. Помимо теоретического интереса, а финансовые рынки – наилучшее приближение к конкурентным рынкам вообще, ответ на данный вопрос полезен и практически, например, для выбора наилучшей стратегии поведения инвестора.

Обсуждения гипотезы эффективности финансовых рынков, особенно обострившиеся после кризиса 2007–2009 гг., выявили как ее сторонников, так и противников [8]. Вместе с тем за последние годы сформировалась своего рода «третья» позиция, в рамках которой дихотомия – равновесие или неравновесие – рассматривается лишь как указание границ спектра истинных свойств конкурентных рынков [15; 16; 17]. Комбинация свойств равновесия и неравновесия может быть обнаружена у рынка случайно изменяющихся коротких кредитов, что показано в данной работе. С одной стороны, «физические» объемы сделок на рынках кредитов не отражают действия механизмов, априори уравнивающих объемы предложения и спроса на кредиты. Неравновесные рынки, функционируя при несопадающих между собой ценах спроса и предложения, позволяют «организаторам рынка» получать положительные спреды цен покупки и продажи. Колебания величин спредов при этом происходят циклически под влиянием факторов рискованности и ликвидности рынка. Значения спредов формируются, как показывает анализ рынка кредитов, вследствие либо избытка кредитных продуктов (*credit boom*), либо их недостатка (*credit bust*). Именно на этот фактор указывает, в частности, Э. Тернер [28] как на одну из основных причин финансовых потрясений и кризисов.

В отсутствие неопределенности простая гипотеза осциллятора первого порядка представляется вполне допустимой для начала более глубокого и систематического изучения этого процесса. В частности, привлекательной стороной этого осциллятора является возможность простыми средствами изучать его бифуркации, провоцируемые определенными соотношениями между средней частотой и амплитудой колебаний спредов. В зависимости от фазы кредитного цикла бифуркации могут сигнализировать о предстоящих изменениях конфигурации рынка кредитов. Исследование циклической динамики спредов, следовательно, может служить важной составной частью анализа и предсказания развития событий на рынке кредитов.

В предположении, что неопределенность реальных рынков модифицирует, но не устраняет циклический характер колебаний спредов, изучение свойств их периодичности открывает дорогу применению методов спектрального анализа, включая современные методы разложения финансовых процессов по «малым волнам». Эти и другие методы, конечно, позволят повысить качество предсказаний состояний рынка кредитов. С другой стороны, совершенно неочевидно, что усиление «предсказуемости рынка» поможет инвесторам зарабатывать арбитражную прибыль, особенно с учетом налогов и транзакционных

издержек. По сути дела, об этом пишут Ф. Лилло и Д. Фармер [15] как о «компенсаторных» свойствах финансового рынка, оставляющих его в целом эффективным в информационном отношении.

\* \*

\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов А.Д.* Макрофинансы: модели пузырей и кризисов: препринт WP2/2010/03. М.: ГУ ВШЭ, 2010.
2. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized Criticality // *Physical Review A*. 1988. 38. P. 364.
3. *Baxter M., Rennie A.* *Financial Calculus. An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.
4. *Benzi R.* Stochastic Resonance: From Climate to Biology // *Nonlinear Processes in Geophysics*. 2010. 17. P. 431–441.
5. *Bessembinder H., Venkataraman K.* Bid-ask Spreads: Measuring Trade Execution Costs in Financial Markets // *Encyclopedia of Quantitative Finance*. 2009.
6. *Blake D.* *Financial Market Analysis*. L.: McGraw Hill Book Company, 2004.
7. *Cassidy J.* *How Markets Fail. The Logic of Economic Calamities*. L.: Allen Lane, 2009.
8. *Corwin S., Schultz P.* Simple Way to Estimate Bid-ask Spreads from Daily High and Low Prices // *Journal of Finance*. 2011. Forthcoming.
9. *The Economist*. 2009 July 18<sup>th</sup>–24<sup>th</sup>. What Went Wrong with Economics. L., 2009.
10. *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Berlin/Heidelberg: Springer, 2009.
11. *Farmer D.* *Market Force, Ecology and Evolution*. Santa Fe Institute, 2000.
12. *Franses P.H.* *Periodicity and Stochastic Trends in Economic Time Series*. Oxford: Oxford University Press, 1996.
13. *Giammattoni L., Hanggi P., Yung P., Marchesoni F.* Stochastic Resonance, Review of Modern Physics. 1996. 70. P. 223. (doi:10.110/revModPhys.70.223)
14. *Levinson M.* Guide to Financial Markets // *The Economist Newspaper*. 2010. London.
15. *Lillo F., Farmer D.* The Long Memory of the Efficient Market // *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*. 2004. Vol. 8. Iss. 3.
16. *Lux T., Sornette D.* On Rational Speculative Bubbles and Fat Tails // *Journal of Money, Credit and Banking*. 2002. Vol. 34. № 3. P. 589–610.
17. *Lux T.* *Financial Power Laws: Empirical Evidence, Models, and Mechanism*. 2005.
18. *Mandelbrot B., Hudson R.* *The (mis)Behaviour of Markets. A Fractal View of Risk, Ruin and Reward*. L.: Profile Books, 2005.
19. *Mantegna R., Stanley H.E.* *An Introduction to Econophysics*. Cambridge University Press, 2000.
20. *Marschinski R., Matassini L.* Financial Markets as a Complex System: A Short Time Scale Perspective // *Deutsche Bank Research*. 2001. Nov. 09.
21. *Roll R.* A Simple Implicit Measure of the Effective Bid-ask Spread in an Efficient Market // *The Journal of Finance*. 1984. Vol. 39. № 4. P. 1127–1139.
22. *Sakai N., Kudoh H.* *Optimal Supply Against Fluctuating Demand*. 2000.
23. *Siklos P.* *Money, Banking, and Financial Institutions: Canada in the Global Environment*. Toronto: McGraw Hill, 2001.
24. *Silva C., Yen J.* Stochastic Resonance and Trade Arrival Rate of Stocks. 2008. (arXiv:0807.0935v1 [q-fin.TR])

- 
25. *Sornette D., Stauffer D., Takayasu H.* Market Fluctuations II: Multiplicative and Percolation Models, Size Effects and Predictions. 1999. (arXiv:cond-mat/9909439v1)
  26. *Stauffer D.* Percolation Models of Financial Market Dynamics // Schweitzer F. (ed.) Modeling Complexity in Economic and Social Systems. River Edge: World Scientific, 2001.
  27. *Strogatz S.* Nonlinear Dynamics and Chaos. Reading: Addison-Wesley, 1994.
  28. *Turner A. et al.* The Future of Finance. The LSE Report. L., 2010.
  29. Wikipedia. Overnight Market, TED Spread. (Статьи в е-энциклопедии.)