Композитные производственные функции

Ершов Э.Б.

Предложен подход к введению производственных функций, в форме представления которых существенно учитываются соотношения используемых ресурсов. Композитная производственная функция определяется как максимум выпуска при использовании нескольких технологий, между которыми распределяются объемы ресурсов. Их свойства исследуются для технологий, характеризуемых базовыми производственными функциями, в качестве которых рассматриваются общие однородные неоклассические производственные функции (ПФ) и ПФ Кобба – Дугласа, CES и Леонтьева. Такие композитные ПФ получаются в виде непрерывных сплайнов, образуемых частями изоквант базовых ПФ и линейных ПФ, порождаемых в композиционных режимах распределениями ресурсов между несколькими базовыми ПФ.

Ключевые слова: распределение ресурсов между технологиями; базовые и композитные производственные функции; детерминированная граница производственных возможностей.

1. Введение

Используемые в производстве материалы обладают различными свойствами. Это порождает задачу создания из нескольких уже имеющихся материалов новых, так называемых *композитных* материалов, обладающих желательными свойствами. Известны примеры таких материалов, имеющих преимущества перед комбинируемыми в них составляющими.

В теории производственных функций такими базовыми составляющими являются производственные функции (ПФ) из их простейших классов. Класс определяется как параметрически задаваемое семейство функций нескольких действительных переменных, называемых факторами. Наиболее известными и применяемыми в практике моделирования экономических процессов являются классы линейных ПФ, ПФ Леонтьева, Кобба – Дугласа, транслоговых ПФ и ПФ с постоянной эластичностью замещения факторов (CES PF).

Ершов Эмиль Борисович – д.э.н., ведущий научный сотрудник научно-учебной лаборатории макроструктурного моделирования экономики России НИУ ВШЭ, профессор кафедры математической экономики и эконометрики факультета экономики НИУ ВШЭ. Email: emborer33@gmail.com.

Статья поступила в Редакцию в ноябре 2012 г.

Транслоговый и CES классы производственных функций можно рассматривать как включающие в себя более простые классы, получаемые из них предельными переходами в пространстве параметров.

Предлагались и исследовались также и другие обобщения ПФ Кобба – Дугласа и CES, в том числе ПФ LES с линейной эластичностью замещения факторов, ПФ Аллена и Сато [3], ПФ VES с переменной эластичностью замещения факторов [14], ПФ CMS [6], трансцендентальная ПФ [9], «вложенные» CES ПФ [13; 15], многорежимные ПФ [3; 4] и класс неявно задаваемых в аддитивной форме ПФ [10; 11; 12], включающий ПФ CRESH. Рассматривались также линейные по параметрам гибкие функциональные формы производственных функций [7; 8]. Но все эти классы ПФ предполагают фиксированное аналитическое представление ПФ в пространстве значений факторов.

В этих условиях гипотеза постоянства параметров для ПФ из выбранного класса не всегда удачно сочетается с обнаруживаемой изменчивостью изучаемой связи результирующего показателя производственной деятельности выделенной системы экономических объектов с динамичной совокупностью производственных факторов. Возможности адекватно моделировать такую связь с помощью ПФ из выбранного класса, значения параметров которых дискретно изменяются, а сам процесс изменения их значений во времени не объясняется и не моделируется, ограничены, что особенно проявляется при прогнозировании. Такие возможности расширяются, если рассматривать *композитные ПФ*, получаемые комбинированием производственных функций из базовых классов, используя гипотезу о применении нескольких технологий, между которыми распределяются основные производственные ресурсы.

Статья содержит обзор задач, подводящих к идее построения и использования композитных ПФ (в дальнейшем используется сокращение – КПФ), и новых результатов в этой области. В разделе 2 дается общее определение композитных производственных функций, исходящее из идеи оптимального использования технологий, каждая из которых определяется с помощью своей детерминированной ПФ или границы производственных возможностей, а заданные ресурсы распределяются между технологиями так, чтобы был максимален суммарный показатель общего выпуска. Производимая с помощью технологий продукция считается однородной. Таким образом, получаемая КПФ интерпретируется как потенциальный выпуск рассматриваемой производственной системы при фиксированных объемах ресурсов. Параметры *базовых ПФ* (БПФ) предполагаются известными. Раздел 3 иллюстрирует введенное определение КПФ на простейшем примере, в котором БПФ берутся из семейства линейных ПФ. Случай БПФ Леонтьева рассмотрен в разделе 4.

Пример получения композитных ПФ в конечном аналитическом виде, изученный в монографиях [16; 17], анализируется в разделе 5. Известные ПФ интерпретируются как композитные и получаемые из неоклассических БПФ, отличающихся только скалярными сомножителями. В разделе 6 на примере базовых ПФ Кобба – Дугласа показано, как именно условие совпадения эластичностей для каждого фактора у таких функций позволяет находить различные формы представления КПФ.

В разделе 7 исследуется случай двухфакторных КПФ, порождаемых оптимальным распределением ресурсов между двумя технологиями, характеризуемыми разными базовыми ПФ, одна из которых – ПФ Леонтьева – не является неоклассической. Семейство линий уровня для получаемой КПФ представляется в пространстве ресурсов в виде непре-

рывных вместе с их производными функций-сплайнов. В режиме композиции, т.е. там, где обе технологии используются, КПФ оказывается кусочно-линейной.

Для двухфакторных и линейно однородных пар БПФ из семейств ПФ Кобба – Дугласа и CES режимы их композиции исследованы в разделах 8–10. В разделе 11 для линейно однородных и неоклассических БПФ доказывается линейность вариантов порождаемого ими вполне композиционного режима, в котором во всех технологиях используются все ресурсы.

2. Определение композитных производственных функций и задача их синтеза

Композитная производственная функция определяется как решение следующей задачи вогнутой оптимизации:

$$\max_{X\in\Omega(R)}\sum_{k=1}^{m} f_k(x_{k1},\ldots,x_{kn}), \tag{1}$$

в которой k – номер базовой технологии (k =1,…,m), характеризуемой производственной функцией $f_k(X_k) \equiv f_k(x_{k1},\ldots,x_{ki},\ldots,x_{kn})$; i – номер производственного ресурса (i = 1,…,n); $R \equiv (R_i)$ – заданный набор доступных и используемых ресурсов ($R_i > 0$); $\Omega(R) \equiv \Omega_{mn}(R)$ – множество неотрицательных распределений $X \equiv (x_{ki})$ ресурсов между технологиями, заданное в виде

$$\Omega(R): \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = R_i,\ i = 1,\ldots,n;\ x_{ki} \ge 0. \tag{2}$$

Множество $\Omega(R)$ представляет собой многогранник в (mn)-мерном вещественном пространстве, определяемый набором ресурсов $R \equiv (R_i)$. Неоклассические ПФ предполагаются дважды дифференцируемыми и удовлетворяющими условиям: $f(0) = 0$, $f(X) \ge 0$ при $x \ge 0$, $\partial f/\partial x_i > 0$, $\partial^2 f/\partial x_i^2 < 0$.

Будем называть эту задачу $\{[f^m];[R^n]\} \equiv \{[f_1,\ldots,f_m];[R_1,..,R_n]\}$-задачей. Под ее решением $\{F(R);g(R)\}$, которое предполагается существующим, ограниченным сверху в силу свойств вогнутых базовых производственных функций $f_k(X_k)$, понимается набор $g(R) \equiv (g_{ki}(R))$ функций $x_{ki} = g_{ki}(R) \equiv g_{ki}(R_1,\ldots,R_n)$ от объемов ресурсов и собственно *композитная производственная функция*

$$F(R) = \max_{X\in\Omega(R)}\sum_{k=1}^{m} f_k(x_{k1},\ldots,x_{kn}) \equiv \sum_{k=1}^{m} f_k(g_{k1}(R),\ldots,g_{kn}(R)).$$

Для $\{[f^m];[R^n]\}$-задачи с использованием функции Лагранжа известны условия экстремальности первого порядка в виде системы уравнений на переменные (x_{ki}, λ_i), где λ_i – множитель Лагранжа для i-го равенства в $\Omega_{mn}(R)$:

$$\partial f_k(x_{k1},\ldots,x_{kn})/\partial x_i = \lambda_i,\ \ \sum_{k=1}^{m} x_{ki} = R_i,\ i = 1,\ldots,n,\ \ k = 1,\ldots,m. \tag{3}$$

Решение находится при заданных БПФ и объемах ресурсов численными методами и, как правило, не представляется в виде достаточно простых функций от ресурсов на всем положительном ортанте $R > 0$. Следовательно, существование решения при фиксированных БПФ и объемах ресурсов и его численное нахождение в общем случае не представляется интересным. Для моделирования экономических процессов могут быть полезны частные случаи КПФ, в которых решение $\{F(R); g(R)\}$ находится в явном виде на объединенном пространстве ресурсов ($R_i > 0$) и допустимых значений параметров рассматриваемых базовых производственных функций или их семейств. В таких случаях решается *задача синтеза* для некоторого класса КПФ, который может совпасть или не совпасть с известным семейством ПФ.

Такой синтез дает исследователю новые возможности, позволяющие преодолевать ограниченность гипотез постоянства формы и значений параметров используемых базовых ПФ, поскольку в $F(R)$ может реализоваться механизм потенциального приспособления производственной системы к внешним условиям функционирования. Такие условия проявляются в объемах и структуре реально доступных системе ресурсов, от которых может достаточно сложным образом зависеть аналитическая форма представления композитной производственной функции.

3. Композитные производственные функции для линейных базовых производственных функций

В простейшем случае базовые производственные функции являются линейными по всем ресурсам:

$$f_k\left(X_k\right)=\sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_{ki},\ a_{ki}\geq 0,\ \sum_i\left(a_{ki}\right)^2>0.$$

В этом случае задача синтеза решения $\{F(R); g(R)\}$ решается очевидным образом:

$$F(R)=\sum_{k=1}^{m}\left(\max_i a_{ki}\right)R_k,\quad g_{ki}=0,\ \text{если}\ i\neq\arg\max_i a_{ki};\ g_{ki}=R_i,\ \text{если}\ i=\arg\max_i a_{ki}.$$

Это решение уточняется, если множество $\arg\max_i a_{ki}$ имеет более одного элемента и можно рассматривать варианты оптимальных распределений ресурсов. Заметим, что включение в БПФ ненулевых констант a_{k0} не меняет это решение, но не интерпретируется экономически, поскольку при неиспользуемых в κ-й технологии ресурсах $f_k(0) = a_{k0} \neq 0$.

Линейные ПФ привлекают к себе внимание потому, что многие экономисты характеризуют их как вполне соответствующие потребностям практического моделирования, несмотря на постулируемый в них упрощенный характер взаимозаменяемости факторов.

4. Композитные производственные функции и задачи линейного программирования

Помимо рассмотренного в разделе 3 случая линейных базовых ПФ детально изучены и применяются в моделях, сводимых к задачам линейного программирования, базовые ПФ Леонтьева. Но в этом случае задача синтеза КПФ оказывается эквивалентной задаче построения в многомерном пространстве семейства многогранников со многими вершинами и гранями различных размерностей, не имеющей наглядного решения.

Существо возникающих на таком пути трудностей становится ясным, когда в качестве БПФ используются m ПФ Леонтьева с n факторами $f_k(x_{k1},..,x_{kn}) = \min_i(x_{ki}/a_{ki}) \equiv y_k$ и максимизируется критерий $\sum_k y_k$ на многограннике $\Omega(R)$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ki} y_k \le R_i,\ y_{ki} \ge 0,\ i = 1,\ldots,n.$$

С помощью решения двойственной задачи к этой задаче линейного программирования определяются те неэффективные технологии, использование которых невозможно в оптимальном решении. Множество остальных, эффективных технологий существенно зависит от положительных коэффициентов $a \equiv (a_{ki})$ и ресурсов $R = (R_i)$. Заведомо существующие оптимальные решения $\{y_k(R;a)^{opt}\}$ и КПФ $F(R;a)$ как функции от параметров $(R;a)$ задачи в общем и многомерном случае, несмотря на ее кажущуюся простоту, определять конструктивно трудно и вряд ли целесообразно.

Но при двух ресурсах ($n = 2$) и фиксированных коэффициентах (a_{ki}) семейство линий уровня КПФ в неотрицательном ортанте двумерной плоскости переменных $(R_1;\ R_2)$ находится в явном виде. Такие линии уровня представляют собой непрерывные кусочно-линейные сплайны, узлы которых лежат на лучах, соответствующих отношениям затрат (a_{k2}/a_{k1}) для эффективных технологий. Линейная однородность БПФ и КПФ позволяет ограничиться построением одной из линий уровня. В работе [5] для двух ресурсов и двух БПФ Леонтьева КПФ получена в следующем виде:

$$F(R) = f_2(R),\ \text{если}\ R_2/R_1 \ge a_{22}/a_{21};\quad F(R) = f_1(R),\ \text{если}\ a_{12}/a_{11} \ge R_2/R_1;$$

$$F(R) = \left[\left(a_{11} - a_{21}\right)R_2 + \left(a_{22} - a_{12}\right)R_1\right] / \left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right),\ \text{если}\ a_{12}/a_{11} \le R_2/R_1 \le a_{22}/a_{21}.$$

При этом предполагается, что обе технологии эффективны и для коэффициентов (a_{ki}) выполняются неравенства: $a_{21} < a_{11}$, $a_{12} < a_{22}$. На рис. 1 изображены линии уровня такой линейно-однородной КПФ.

Однородные первой степени базовые ПФ Леонтьева, по-видимому, были первым примером композитных ПФ, для которых в режиме одновременного использования нескольких технологий (в режиме композиции) линии или поверхности уровня становились частями прямых или плоскостей. Это свойство таких КПФ дало некоторое локальное оправдание использования линейных ПФ в прикладном моделировании, привлекло внимание к последствиям их применения в линейных моделях. В то же время оно показало, что в режиме композиции КПФ могут приобретать свойства, не присущие используемым в нем базовым производственным функциям.

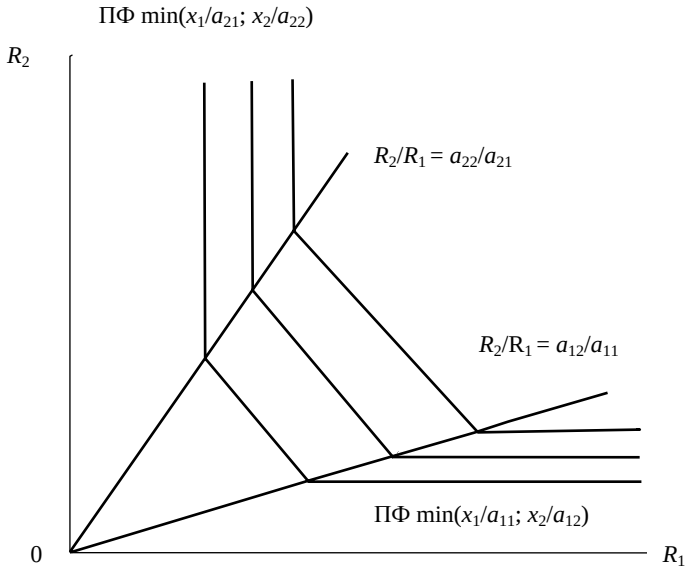

Рис. 1. Линии уровня КПФ (режим композиции существует)

$$F(R_1R_2) = \max_{X\in\Omega(R)} \sum_{k=1}^{2} \min(x_{k1}/a_{k1}; x_{k2}/a_{k2}).$$

5. Случай неоклассических базовых производственных функций, различающихся только скалярными сомножителями

Пусть базовые ПФ $f_k(x)$ пропорциональны известной неоклассической ПФ

$$\varphi(X) \equiv \varphi(x_1,\ldots,x_n),$$

которая по определению является дважды дифференцируемой, вогнутой, однородной степени $r < 1$ и имеет отрицательно-определенную матрицу-гессиан $H_\varphi(X)$, элементы которой – вторые производные $\varphi_{ij} \equiv \partial^2\varphi/\partial x_i\partial x_j$. Таким образом, $f_k(x) = A_k\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, где A_k – положительная константа.

Шепард [16; 17] показал, что КПФ $F(R)$ в этом случае пропорциональна функции $\varphi(X)$: $F(R) = \psi^\varphi \times \varphi(R)$, с коэффициентом ψ^φ. Предлагаемое доказательство основного утверждения, принадлежащего Шепарду, позволило обобщить этот результат. В явной форме получено оптимальное распределение ресурсов между технологиями и вид КПФ в случае выделения групп непосредственно взаимозаменяемых ресурсов. Они универсальны, не зависят от выбора неоклассических БПФ для всех технологий и для таких множеств ресурсов.

Условия экстремальности первого порядка для рассматриваемой задачи представляются в виде системы уравнений

$$\varphi_i\left(A_k^{1/(r-1)}x_{x1},\ldots,A_k^{1/(r-1)}x_{kn}\right) = \lambda_i, i = 1,\ldots,n, k = 1,\ldots,m, \quad (4)$$

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ki} = R_i,\ i = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

где λ_i – множитель Лагранжа для ограничения-равенства (5) по i-му ресурсу, $\varphi_i \equiv \partial\varphi/\partial x_i$ и использовано предположение об однородности функций φ и φ_i.

Решения $W(\lambda) \equiv (w_1(\lambda),\ldots,w_n(\lambda))$ m совпадающих подсистем уравнений (4)

$$\varphi_i(w_1,\ldots,\ w_n) = \lambda_i,\ i = 1,\ldots,\ n,$$

получаемых при фиксированных k, существуют в силу невырожденности гессиана $H_\varphi(x)$ и не зависят от k. Следовательно, для решения системы (4)–(5) выполняются равенства

$$A_k^{1/(r-1)} x_{ki} = A_{k(0)}^{1/(r-1)} x_{k(0)i},$$

в которых $k(0)$ – номер одной из технологий. Используя (5), из (4) получаем оптимальные значения ресурсов x_{ki}^{opt}:

$$x_{ki}^{opt} = (A_k)^{\rho} \left\{ \sum_{s=1}^{m} (A_s)^{\rho} \right\}^{-1} R_i,$$

где $\rho = 1/(1 - r)$, доли ресурсов x_{ki}^{opt}/R_i, достающихся k-й технологии, равны и, следовательно, структуры используемых технологиями ресурсов повторяют структуру суммарных ресурсов: $x_{ki}^{opt}/x_{kj}^{opt} = R_i/R_j$. Однородность степени r функции $\varphi(X)$ позволяет получить явную формулу для КПФ $F(R)$:

$$F(R) = \sum_k A_k \varphi\left(X_k^{opt}\right) = \left\{ \sum_k (A_k)^{1+\rho r r} \right\} \left\{ \sum_s (A_s)^{\rho} \right\}^{-r} \varphi(R) = \left\{ \sum_k (A_k)^{\rho} \right\}^{1/\rho} \varphi(R).$$

Таким образом, найден коэффициент ψ^{φ} как функция $\psi(A) \equiv \psi(A_1,\ldots,A_n)$, оказывающаяся общей для всех неоклассических функций $\varphi(X)$. Функцию-коэффициент $\psi_\rho(A) = \left\{ \sum_k (A_k)^{\rho} \right\}^{1/\rho}$ можно рассматривать как ПФ от другого множества факторов, если коэффициенты A_k считать функциями переменных $(z_1,\ldots,z_q)$: $A_k = h_k(z)$. Наиболее прост случай, когда эти функции обладают теми же свойствами, что были у функций $f_k(X)$: $h_k(z) = B_k\tau(z)$ и степень однородности $r_{\varphi\tau} = r_\varphi + r_\tau$ функции $\tau(z)\varphi(x)$ удовлетворяет неравенству $r_{\varphi\tau} < 1$. Тогда $F(R_x,R_z) = \psi_\pi(B)\tau(R_z)\varphi(R_x)$, где R_x и R_z – векторы объемов ресурсов, $\pi = 1/(1 - r_{\varphi\tau})$. Но очевидно, что требования к функциям $h_k(z)$ можно ослабить.

Формулы оптимального распределения ресурсов между технологиями позволяют анализировать последствия отклонений от оптимальных распределений. Но принимаемое предположение о равенстве с точностью до постоянных сомножителей базовых ПФ упрощает ситуацию, хотя и позволяет интерпретировать неоклассические ПФ как композитные ПФ, возникающие при не вполне реалистических предположениях. Поэтому за-

дача синтеза КПФ и оптимального распределения ресурсов предполагает рассмотрение базовых ПФ из одного семейства или из нескольких семейств, каждое из которых состоит из ПФ $A_k f(X;\pi_k)$, могущих иметь несовпадающие значения параметров $\pi_k = (\pi_{kl})$.

6. Случай многих базовых технологий Кобба – Дугласа

Трудность нахождения решения задачи синтеза КПФ покажем для технологий, у которых базовые ПФ – это ПФ Кобба – Дугласа с n факторами:

$$f_k\left(X_k\right) \equiv f_k\left(x_{k1},\ldots,x_{kn}\right) = A_k \prod_{i=1}^{n}\left(x_{ki}\right)^{a(k,i)}, \quad \sum_{i=1}^{n} a(k,i) \equiv r(k) < 1, \quad k = 1,\ldots,m,$$

и неотрицательные переменные x_{ki} удовлетворяют равенствам (5). Из обычных условий экстремальности первого порядка $\partial f_k(X_k)/\partial x_i = \lambda_i$ функции $\sum_k f_k\left(X_k\right)$ на множестве допустимых распределений ресурсов получаем формулы для x_{ki}:

$$x_{ki} = \left[\lambda_j a(k,i)/\lambda_i a(k,j)\right] x_{kj}, \; i = 1,\ldots,n. \tag{6}$$

Используя определение функции $y_k = f_k(X_k)$, находим явные выражения переменных x_{ki} через множители Лагранжа:

$$x_{ki} = B_{ki} \cdot \left(\lambda_i\right)^{-1} \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j\right)^{-s(k,j)},$$

в которых $s(k,j) = a(k,j)/(1 - r(k))$ и B_{ki} – константы, являющиеся функциями только от параметров базовых ПФ:

$$B_{ki} = a(k,i)\left(A_k\right)^{\rho(k)} \prod_{j=1}^{n} a(k,j)^{a(k,j)\rho(k)}, \quad \rho(k) = (1/(1-r(k)). \tag{7}$$

Тогда равенства (5) превращаются в систему n уравнений для n множителей Лагранжа λ_i:

$$\sum_{k=1}^{m} B_{ki} \cdot \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j\right)^{-s(k,j)} = \lambda_i R_i, \; i = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

решение которой не находится в явном виде, если величины $s(k,j)$ не удовлетворяют специальным ограничениям. Это очевидно, если при $m = n$, используя матрицу B с элементами B_{ki} и обратную матрицу $B^{-1} \equiv C = (C_{ik})$, разрешить систему (8) относительно переменных $z_k = \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j\right)^{-s(k,j)}$ и получить систему уравнений $z_k = \sum_i R_i \lambda_i C_{ik}$, $k = 1,\ldots, m = n$. Комбинируя степени переменных z_k, из этой системы не удается получить решение системы (8) в явном виде даже при $m = n$. Следовательно, при известных значениях параметров БПФ решение системы (8) приходится находить, применяя итерационные чис-

ленные методы. Однако при не зависящих от k степенях $s(k,j) \equiv s(j)$ для j-го ресурса задача синтеза решается аналитически, так как переменные z_k, $k = 1,...m$, равны, т.е. $z_k = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j)^{-s(j)} \equiv z$, и из (8) получаем $(\lambda_i)^{-1} \prod_{j=1}^{n} (\lambda_j)^{-s(j)} = R_i \Big/ \left(\sum_{k=1}^{m} B_{ki} \right)$,

$$x_{ki}^{opt} = \left(B_{ki} \Big/ \sum_{l=1}^{m} B_{li} \right) \cdot R_i \equiv u_{ki} R_i. \tag{9}$$

Из условия «подобия» коэффициентов эластичностей для факторов у БПФ, т.е. из равенств $s(j) = a(k,j)/(1-r(k)) = a(l,j)/(1-r(l))$, следует

$$\sum_{j=1}^{n} s(k,j) = \sum_{j=1}^{n} s(j) = r(k)/(1-r(k)) \equiv s,\ r(k) = s/(1+s) \equiv r,\ \rho(k) \equiv 1/(1-r) = \rho,\ s = r/(1-r),$$

и все БПФ имеют общую степень однородности $r < 1$. Поэтому равны эластичности j-го фактора для разных технологий:

$$a(k,j) = s(j)(1-r) \equiv a(j),\ k = 1,...,m.$$

Таким образом, фактически рассматривается частный случай ситуации, изученной в общем виде в разделе 5. Константы B_{ki} в этом случае принимают разные значения для технологий ($k = 1,...,m$) и ресурсов ($i = 1,...,n$):

$$B_{ki} = a(i)(A_k)^{\rho} \prod_{j=1}^{n} a(j)^{a(j)\times\rho}.$$

Но из (8) следует, что доли u_{ki} оптимального распределения ресурсов между технологиями не различаются по ресурсам: $u_{ki} = (A_k)^{\rho} \Big/ \left(\sum_{1} A_1^{\rho} \right) \equiv u_k$.

Множители Лагранжа λ_i также находятся из (8):

$$(\lambda_i)^{-1} = \left[R_i \Big/ \sum_{k=1}^{m} B_{ki} \right] \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{s(j)} \right),$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{-s(i)} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} \left[R_i \Big/ \sum_{k=1}^{m} B_{ki} \right]^{s(i)} \right\} \left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{s(j)} \right)^{s}, \text{ где } s = \sum_{i=1}^{n} s(i),$$

$$\lambda_i^{opt} = \left[\sum_{k=1}^{m} B_{ki} \Big/ R_i \right] \cdot \left\{ \prod_{j=1}^{n} \left[R_j \Big/ \sum_{k=1}^{m} B_{kj} \right]^{s(i)} \right\}^{1/(1+s)}.$$

С помощью (9) композитная ПФ получается в виде

$$(10)\qquad F(R)=\sum_{k=1}^{m}\left[\prod_{i=1}^{n}(u_{ki})^{a(k,i)}\right]A_k\prod_{i=1}^{n}(R_i)^{a(k,i)}\equiv\sum_{k=1}^{m}\left[\prod_{i=1}^{n}(u_{ki})^{a(i)}\right]f_k(R),$$

являясь суммой m базовых ПФ, как бы использующих ресурсы в их заданных суммарных объемах $R = (R_i)$, с коэффициентами, являющимися функциями только от параметров БПФ. Решение (7), (9)–(10) определено на всем пространстве ресурсов и допустимых значений параметров задачи, совпадает с решением, получаемым в случае БПФ Кобба – Дугласа в разделе 5, но получено и представлено в несколько ином виде.

7. КПФ для ПФ Леонтьева и линейно однородных функций Кобба – Дугласа или CES

В статье [1] и диссертации [5] в качестве БПФ рассматривались ПФ Кобба – Дугласа и Леонтьева первой степени однородности. Такие ПФ вогнуты, но не строго вогнуты, а первая не везде дифференцируема. Решение задачи $\{[f^2];[R^2]\}$ для случая, когда одна из БПФ – функция Леонтьева, было получено в работе [5]. КПФ $F(R)$ для задачи с

$$f_1(X_1)=A(x_{11})^{a(1)}(x_{12})^{a(2)},\quad f_2(X_2)=\min[x_{21}/b(1);x_{22}/b(2)]$$

найдена в почти явном виде и зависит от того, имеет ли уравнение

$$(11)\qquad w(z)\equiv Ab(2)z-z^{a(2)}+Aa(1)b(1)=0,$$

в котором переменная z интерпретируется как соотношение R_1/R_2 объемов ресурсов, действительные и положительные корни.

Минимальное значение строго выпуклой функции $w(z)$ имеем при $z = z^* = [Ab(2)]^{-1/a(1)}$ и $w(z^*) = Aa(1)[b(1) - b(2)z^*]$. Поскольку $w(0) > 0$ и $w(+\infty) > 0$, то уравнение (11) не имеет корней при $w(z^*) > 0$ и $Ab(1)^{a(1)}b(2)^{a(2)} > 1$, имеет один корень $z = z^*$ при $w(z^*) = 0$ и $Ab(1)^{a(1)}b(2)^{a(2)} = 1$, имеет два корня z_1 и z_2, удовлетворяющие неравенствам $z_1 < z^* < z_2$, при $w(z^*) < 0$. Если $z = z^*$, то $R_1/R_2 = b(1)/b(2)$ и ресурсы имеются в пропорции, определяемой ПФ Кобба – Дугласа. Корни z_1 и z_2 находятся численными методами.

Композитная производственная функция $F(R)$ определяется следующим образом:

если $Ab(1)^{a(1)}b(2)^{a(2)}\geq 1$, то $F(R)=AR_1^{a(1)}R_2^{a(2)}$;

если $Ab(1)^{a(1)}b(2)^{a(2)}<1$, то положительный ортант R^{2+} пространства ресурсов (R_1,R_2) делится на 4 конуса лучами $R_1/R_2 = z_1$, $R_1/R_2 = b(1)/b(2)$ и $R_1/R_2 = z_2$ и

если $R_1/R_2 \leq z_1$ или $R_1/R_2 \geq z_2$, то $F(R)=AR_1^{a(1)}R_2^{a(2)}$,

если $z_1 \leq R_1/R_2 \leq b(1)/b(2)$, то $F(R)=\left[a(1)R_1+a(2)z_2R_2\right]\big/\left[a(1)b(1)+a(2)b(2)z_1\right]$,

если $b(1)/b(2) \leq R_1/R_2 \leq z_2$, то $F(R)=\left[a(1)R_1+a(2)z_1R_2\right]\big/\left[a(1)b(1)+a(2)b(2)z_2\right]$.

В режиме композиции, т.е. при выполнении неравенства

(12) $$Ab(1)^{a(1)}b(2)^{a(2)} < 1$$

и при использовании двух технологий, КПФ $F(R)$ кусочно-линейна. На границах конусов (лучах) КПФ определяется неединственным образом, но ее изокванты представляют собой непрерывные сплайны. В точках лучей $R_1/R_2 = z_1$ и $R_1/R_2 = z_2$ изокванты имеют касательные, но отрезки прямых, соединяемые на луче $R_1/R_2 = b(1)/b(2)$, имеют разные угловые коэффициенты.

На рис. 2 изображены изокванты функции $F(R)$ в режиме композиции БПФ Леонтьева и линейно-однородной БПФ Кобба – Дугласа.

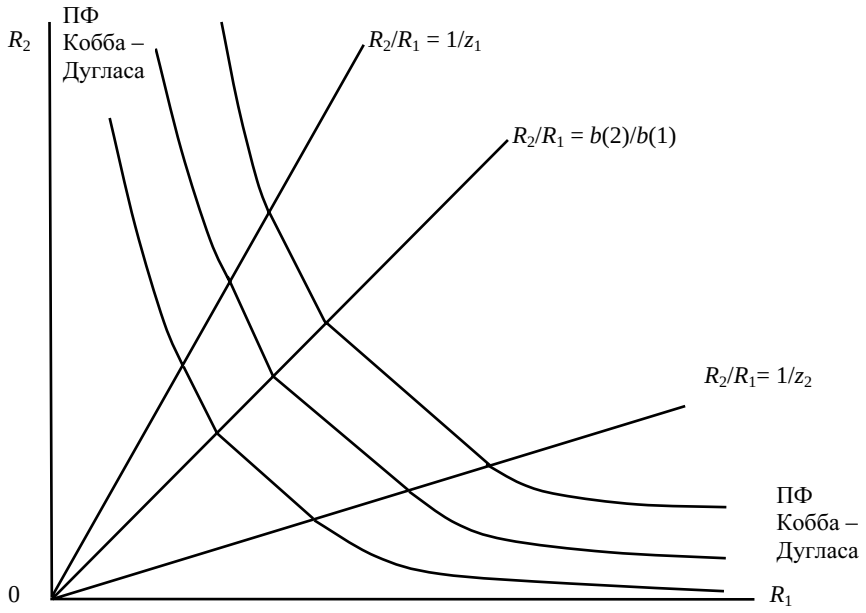

Рис. 2. Линии уровня КПФ (режим композиции существует)
$F(R_1, R_2) = \max_{X \in \Omega(R)} \left\{ A x_{11}^{a(1)} x_{12}^{1-a(1)} + \min(x_{21}/b(1), x_{22}/b(2) \right\}$

В диссертации [5], выполненной под научным руководством автора данной статьи, Садыковым И.С. доказано, что для ПФ Леонтьева и линейно однородной ПФ CES с двумя факторами-ресурсами композитная ПФ или совпадает с ПФ CES, или в режиме композиции имеет почти ту же структуру, что в случае БПФ Леонтьева и Кобба – Дугласа. Была предложена гипотеза, состоящая в том, что для двух линейно-однородных, двухфакторных, возрастающих и дифференцируемых БПФ с отрицательными вторыми производными композитная ПФ в режиме композиции, если она существует при заданных параметрах функций, является кусочно-линейной [1; 5]. Для таких БПФ получено достаточное условие существования режима композиции, представляющее собой требование положительности

детерминанта некоторой матрицы Гессе на множестве $\Omega_{22}(R)$ допустимых распределений ресурсов между технологиями. Получить из этого неравенства для функции двух переменных достаточное условие вогнутости функции ($f_1 + f_2$) на этом множестве как требование к параметрам неоклассических и линейно-однородных БПФ, аналогичное условию (12), в общем случае не удалось.

Таким образом, гипотезу линейности можно доказывать или опровергать, предполагая, что режим композиции существует. Доказательство утверждения, содержащегося в этой гипотезе, тогда не было найдено. Оно содержится в разделе 11 данной статьи. Но сначала в разделах 8–10 для пар БПФ из известных классов производственных неоклассических, линейно-однородных функций оптимальное распределение ресурсов между технологиями и соответствующие ему КПФ будут найдены в «почти» явном виде, допускающем использование решений относительно простых уравнений, аналогичных уравнению (11).

8. Случай линейно-однородных базовых производственных функций Кобба – Дугласа

В разделе 6 существенно используемое требование $r < 1$ обеспечивало положительную определенность гессианов и строгую вогнутость базовых ПФ и получаемой КПФ. Но при $r = 1$ вырожденность гессиана $H_f(X)$ для линейно-однородной функции $f(X) = \sum_i x_i \partial f(X)/\partial x_i$ следует из тождеств, полученных дифференцированием этой функции по ее аргументам

$$\partial f(X)/\partial x_j = \partial f(X)/\partial x_j + \sum_i x_i \partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j ,$$

$$\sum_i x_i \partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j = 0, \quad j = 1,\ldots,n,$$

и из непрерывности вторых производных $\partial^2 f(X)/\partial x_i \partial x_j$. Поэтому система уравнений (8) может не определять переменные x_{ki} как функции множителей Лагранжа и некоторые из этих переменных в решении $\{F(R); g(R)\}$ могут принимать нулевые значения.

Из условий экстремальности (3) максимизируемого критерия (1) на $\Omega_{mn}(R)$ для БПФ Кобба – Дугласа

$$f_k\left(X_k\right) = \lambda_i x_{ki}/a(k,i), \; k = 1,\ldots,m, \quad i = 1,\ldots,n,$$

следуют равенства

$$x_{kj} = x_{ki}\left[a(k,j)/a(k,i)\right]\left[\lambda_i/\lambda_j\right], \quad j \neq i. \tag{13}$$

Тогда

$$f_k = \left\{A_k \prod_{j=1}^{n} \left[a(k,j)/a(k,i)\right]^{a(k,i)}\right\} \lambda_i \left[\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{a(k,j)}\right]^{-1} = \lambda_i x_{ki}/a(k,i)$$

и, учитывая условие $r(k) = r = 1$, получаем систему, состоящую из m уравнений

$$\prod_{j=1}^{n} \lambda_j^{a(k,j)} = A_k \prod_{j=1}^{n} a(k,j)^{a(k,j)} \equiv B_k, \quad k = 1,\ldots,m, \tag{14}$$

для n неизвестных λ_j, правые части которых являются известными функциями от параметров БПФ и не зависят от объемов ресурсов (R_i).

Заметим, что в случае БПФ Кобба – Дугласа, если $x_{kj} = 0$ при каком-либо $j = s$, то $x_{ki} = 0$, $i = 1,\ldots,n$, и $f_k = 0$. Следовательно, в режиме композиции приходится выделять наборы используемых технологий с $k \in \omega \subset [1,\ldots,m]$, $f_k \neq 0$. Разнообразие таких возможных наборов в задачах $\{[f^m];[R^n]\}$ делает синтез их решений возможным только в особых случаях. Поэтому будем предполагать, что такой набор $\omega = [1,\ldots,m]$ выделен и система ($mn + n$) уравнений (2), (13), (14) с ($mn + n$) неизвестными x_{ki}, λ_i имеет положительное решение.

При $m < n$ анализ свойств возможно неединственных решений этой системы нелинейных уравнений затруднен тем, что в эквивалентной ей системе используются как переменные x_{ki}, так их логарифмы. При $m \geq n$ матрица коэффициентов (а) при переменных $\ln\lambda_j$, $i = 1,\ldots,n$, в системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} a(k,j) \ln \lambda_j = \ln B_k, \quad k = 1,\ldots,m, \tag{15}$$

получаемой из (14), должна иметь ранг $\mathrm{rang}(a) \leq n$. Если $\mathrm{rang}(a) < n$, то на параметры функций Кобба – Дугласа накладываются достаточно жесткие условия. Поэтому ограничимся рассмотрением случая $\mathrm{rang}(a) = n$, в котором решение ($\ln\lambda_j$) системы (15) существует в силу предположения о наборе номеров технологий $\omega = [1,\ldots,m]$, единственно и совпадает с ($\ln \lambda_j^{opt}$). Оно не зависит от ресурсов (R_i), определяясь только значениями параметров БПФ.

Таким образом, для существующего по предположению варианта режима композиции, определяемого множеством ω номеров технологий, используемых при оптимальном распределении ресурсов, множители (λ_j^{opt}) остаются постоянными при изменении ресурсов (R_i), и решение (x_{kj}^{opt}) линейной системы уравнений (2) и (13) находится в виде линейных однородных функций $(x_{kj}^{opt}) = g_{ki}(R)$. Следовательно, в режиме композиции КПФ $F(R)$ по формуле Эйлера является линейной функцией ресурсов: $F(R) = \sum_i \lambda_i^{opt} R_j$. И гипотеза линейности решения $\{F(R); g(R)\}$ задачи $\{[f^m];[R^n]\}$ с линейно-однородными базовыми ПФ Кобба – Дугласа в режиме композиции и при $m \geq n$, $\mathrm{rang}(a) = n$ доказана в более общей и уточненной формулировке. Уточнение состоит в том, что не предполагается $m = 2$ и $n = 2$, а матрица (a_{kj}) имеет максимальный ранг.

Проиллюстрируем линейность композиционного режима в случае линейно-однородных БПФ Кобба – Дугласа в простейшем случае $m = 2$ и $n = 2$, допускающем графическое представление. Тогда

$$f_1 = A_1 (x_{11})^{a(1,1)} (x_{12})^{a(1,2)}, \quad f_2 = A_2 (x_{21})^{a(2,1)} (x_{22})^{a(2,2)}$$

и система уравнений (14) для множителей Лагранжа принимает вид

$$(16)\qquad \begin{aligned}&(\lambda_1)^{a(1,1)}(\lambda_2)^{a(1,2)} \equiv (\lambda_1/\lambda_2)^{a(1,1)}\lambda_2 = A_1 a(1,1)^{a(1,1)} a(1,2)^{a(1,2)} \cong \psi_1,\\ &(\lambda_1)^{a(2,1)}(\lambda_2)^{a(2,2)} \equiv (\lambda_2/\lambda_1)^{a(2,2)}\lambda_1 = A_2 a(2,1)^{a(2,1)} a(2,2)^{a(2,2)} \equiv \psi_2.\end{aligned}$$

Из (16) находим λ_1 и λ_2

$$\lambda_1/\lambda_2 = (\psi_1/\psi_2)^{1/[a(1,1)+a(2,2)-1]} \equiv \psi,\ \ \lambda_1 = \psi_2(\psi)^{a(2,2)},\ \ \lambda_2 = \psi_1(\psi)^{-a(1,1)},$$

а затем, используя (13) в виде

$$x_{12} = x_{11}\left[a(1,2)/a(1,1)\right](\lambda_1/\lambda_2) \equiv h_1 x_{11},\ \ x_{21} = x_{22}\left[a(2,1)/a(2,2)\right](\lambda_2/\lambda_1) \equiv h_2 x_{22}$$

и уравнения

$$x_{11} + x_{21} = x_{11} + h_2 x_{22} = R_1, \qquad x_{12} + x_{22} = h_1 x_{11} + x_{22} = R_2,$$

получаем оптимальное, линейное по ресурсам распределение (x_{ki}^{opt}) двух ресурсов (R_i) между двумя технологиями в режиме их композиции:

$$x_{11} = \left(R_1 - h_2 R_2\right)/D,\ \ x_{12} = h_1\left(R_1 - h_2 R_2\right)/D,$$
$$x_{21} = h_2\left(-h_1 R_1 + R_2\right)/D,\ \ x_{22} = \left(-h_1 R_1 + R_2\right)/D,$$

где $D = \left(1 - h_1 h_2\right) = 1 - \left\{\left[1 - a(1,1)\right]\left[1 - a(2,2)\right]\right\}/\left[a(1,1)a(2,2)\right]$.

Это решение положительно в предположении положительности коэффициентов $a(k,j)$ при выполнении следующих условий, накладываемых на отношение ресурсов R_2/R_1:

(17) если $D > 0$ и $a(1,1) + a(2,2) > 1$, то $1/h_2 > R_2/R_1 > h_1$;

(18) если $D < 0$ и $a(1,1) + a(2,2) < 1$, то $h_1 > R_2/R_1 > 1/h_2$.

Если же $D = 0$, то $a(1,1) + a(2,2) = 1$ и степени факторов в двух функциях Кобба – Дугласа оказываются одинаковыми. При таких параметрах БПФ режим композиции невозможен, так как оптимальным решением является использование той функции, у которой больше коэффициент (A).

Пусть выполнено условие (17). Тогда вне режима композиции КПФ совпадает с одной из базовых ПФ Кобба – Дугласа.

Подстановка решения (x_{ki}^{opt}) в формулы для БПФ позволяет убедиться в том, что КПФ $F(R) = f_1\left(X_1^{opt}\right) + f_2\left(X_2^{opt}\right) = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ в режиме композиции – линейная функция ресурсов. Но этот вывод следует непосредственно из (16), поскольку множители Лагранжа для этого режима определяются только значениями параметров БПФ и не зависят от R_1 и R_2, а именно:

$$F(R) = f_1(R),\ \text{если}\ h_1 > R_2/R_1;\ \ F(R) = f_2(R),\ \text{если}\ R_2/R_1 > 1/h_2.$$

Анализ изоквант КПФ в граничных точках интервалов (17), (18) и вне этих интервалов дает предвидимый результат: изокванта – непрерывный сплайн, состоящий из линий уровня для БПФ и отрезка прямой; в узлах сплайна левая и правая производная для изокванты равны. Семейство изоквант КПФ для двух линейно-однородных базовых ПФ Кобба – Дугласа, для которых существует композиционный режим, изображено на рис. 3.

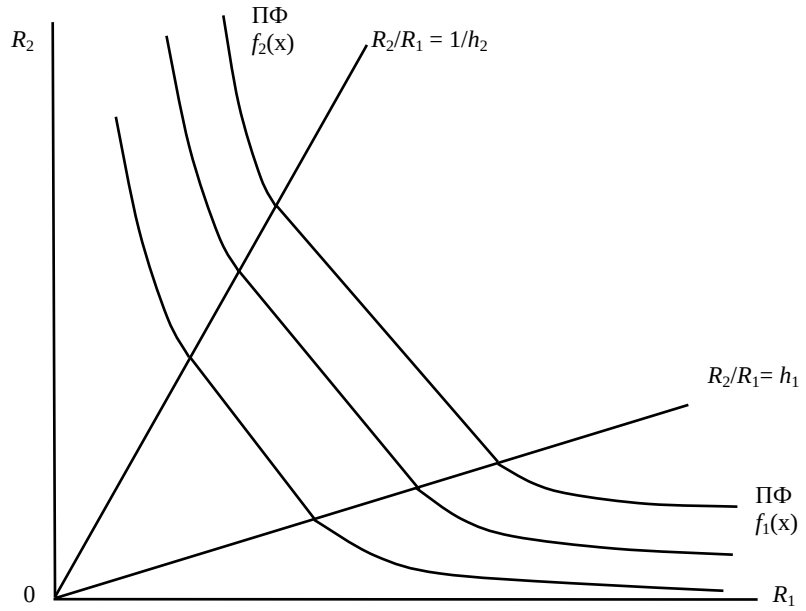

Рис. 3. Линии уровня КПФ (режим композиции существует)
$F(R_1, R_2) = \max_{X \in \Omega(R)} \left\{ A_1 x_{11}^{a(1,1)} x_{12}^{1-a(1,1)} + A_2 x_{21}^{1-a(2,2)} x_{22}^{a(2,2)} \right\}$

При $h_1 = 1/h_2 \equiv h$ режим композиции вырождается и непрерывные линии уровня для КПФ состоят из частей изоквант базовых ПФ, соединяющихся на луче $R_2 = hR_1$.

9. Режим композиции для линейно-однородных, двухфакторных производственных функций Кобба – Дугласа и CES

Исследуем КПФ, получаемую в режиме композиции базовых ПФ

(19) $$f_1(X_1) = Ax_{11}^{a(1)} x_{12}^{a(2)}, \;\; f_2(X_2) = \left[u_1 x_{21}^a + u_2 x_{22}^a \right]^{1/a},$$

предполагая, что $a(1) + a(2) = 1$ и $f_1(X_1) > 0$, $f_2(X_2) > 0$. Очевидно, что $x_{11} > 0$, $x_{12} > 0$, но одна из переменных x_{21}, x_{22} может принимать нулевое значение. Изменяя нумерацию ресурсов, всегда можно добиться того, что $x_{21} = 0$, $x_{11} = R_1$ или $0 < x_{21} < R_1$, $0 < x_{11} < R_1$. Поэтому рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $x_{21} = 0$, $x_{11} = R_1$. Тогда максимизируется функция $f(x_{12})$

$$f\left(x_{12}\right)=\left(AR_1^{a(1)}\right)x_{12}^{a(2)}+\left(u_2^{1/a}\right)\left(R_2-x_{21}\right)$$

на ограничении $0 < x_{12} < R_2$, т.е. в предположении, что реализуется режим композиции БПФ и максимум функции $f(x_{12})$ достигается во внутренней точке отрезка $[0;R_2]$. Такой режим будем называть *частично композиционным.* Элементарный анализ, учитывающий то, что $f(0) = u_2^{1/a}R_2$, $0 < a(2) = 1 - a(1) < 1$ и $f(0) \equiv df(0)/dx = +\infty$, находит значение x^* переменной x_{12}, соответствующее максимуму функции $f(x)$, и неравенство на параметры БПФ и ресурсы, которое выполняется по предположению:

$$x_{12}^*=\left(Aa(2)/u_2^{1/a}\right)^{1/a(1)}R_1,\ \left(Aa(2)/u_2^{1/a}\right)^{1/a(1)}<R_2/R_1.$$

В частично композиционном режиме КПФ $F(R)$, как и ожидалось, линейна по ресурсам, поскольку $a(1) + a(2) = 1$:

$$F(R)=f\left(x_{12}^*\right)=AR_1^{a(1)}\left(Aa(2)/u_2^{1/a}\right)^{a(2)/a(1)}R_1^{a(2)}+u_2^{1/a}\left[R_2-\left(Aa(2)/u_2^{1/a}\right)^{1/a(1)}R_1\right].$$

Случай 2 (основной). Пусть в режиме композиции положительны используемые в обеих технологиях ресурсы ($x_{ki} > 0$). Такой режим будем называть *вполне композиционным.* Используя условия экстремальности функции $f_1(X_1) + f_2(X_2)$ на множестве $\Omega(R)$

$$\begin{aligned}&x_{11}=a(1)f_1\left(X_1\right)/\lambda_1,\ x_{12}=a(2)f_1\left(X_1\right)/\lambda_2,\\&x_{21}=\left(u_1a/\lambda_1\right)^{1/(1-a)}f_2\left(X_2\right),\ x_{22}=\left(u_2a/\lambda_2\right)^{1/(1-a)}f_2\left(X_2\right),\end{aligned}\tag{20}$$

подставим формулы (20) для переменных x_{12} и x_{21} в БПФ. Используя (19), (20) и линейную однородность БПФ, получим два уравнения, в которых неизвестными являются λ_1 и λ_2:

$$\lambda_1^{a(1)}\lambda_2^{a(2)}=Aa(1)^{a(1)}a(2)^{a(2)},\ \left[u_1\left(a/\lambda_1\right)^a\right]^{1/(1-a)}+\left[u_2\left(a/\lambda_2\right)^a\right]^{1/(1-a)}=1.\tag{21}$$

Поскольку предполагается, что режим композиции существует, эта система имеет решение и оно не зависит от суммарных ресурсов R_1, R_2. Следовательно, КПФ $F(R) = \lambda_1R_1 + \lambda_2R_2$ в рассматриваемом режиме линейна.

Решение системы (21) существует не всегда. Представим (21) в виде

$$\lambda_1^{a(1)}\lambda_2^{a(2)}=C,\ C_1\lambda_1^{a/(a-1)}+C_2\lambda_2^{a/(a-1)}=1.$$

Тогда $\lambda_2 = C(\lambda_2/\lambda_1)^{a(1)}$ и, подставив это выражение для λ_2 во второе уравнение системы (21), получаем уравнение для переменной $z = (\lambda_2/\lambda_1)^{a/(1-a)}$

$$h(z)\equiv C_1z+C_2-Bz^{a(1)}=0,\tag{22}$$

в котором $B = C^{a/(1-a)}$.

Поскольку $h(0) > 0$, $a(1) < 1$, $d^2h(z)/d^2z > 0$ и $\min_z h(z) = h(z^*)$, где $z^* = (Ba(1)/C_1)^{1/a(1)}$, то уравнение (22):

при $h(z^*) < 0$ имеет корни z_1, z_2, удовлетворяющие неравенству $0 < z_1 < z^* < z_2$;

при $h(z^*) = 0$ имеет один корень $z^* \equiv z_0$;

при $h(z^*) > 0$ не имеет корней, так как $h(z) > 0$.

Таким образом, неравенство $h(z^*) \leq 0$ является необходимым условием существования композиционного режима в рассматриваемом случае.

Для z_s ($s = 0,1,2$) имеем $\lambda_2(s) = \lambda_1(s)\, z_s^{(1-a)/a}$ и из (21) находим

$$\lambda_1(s) = Cz_s^{a(2)(a-1)/a},\ \ \lambda_2(s) = Cz_s^{a(1)(a-1)/a}.$$

Следовательно, изокванты КПФ $F(R)$ во вполне композиционном режиме линейно-однородных БПФ Кобба – Дугласа и CES имеют два прямых отрезка, которые могут совпадать.

Распределение ресурсов между технологиями получаем как решение системы уравнений (5) при $m = n = 2$, в которой неизвестные (x_{ki}) связаны следующими из (20) соотношениями

$$x_{11}/x_{12} = \left[a(1)/a(2)\right] z_s^{(1-a)/a} \equiv b_1(s),\ \ x_{21}/x_{22} = \left[u_1/u_2\right] z_s^{1/a} \equiv b_2(s). \tag{23}$$

Получаемая таким образом система уравнений

$$b_1(s)x_{12} + b_2(s)x_{22} = R_1,\ \ x_{12} + x_{22} = R_2$$

в общем случае имеет невырожденную матрицу коэффициентов при неизвестных и определяет линейное по ресурсам решение $\{x_{12}(R;s), x_{22}(R;s)\}$ и, следовательно, распределение ресурсов между технологиями $\{x_{ki}(R;s)\}$.

Требование положительности всех величин $x_{ki}(R;s)$ или одной из «троек» $\{x_{11}(R;s), x_{12}(R;s), x_{21}(R;s)\}$ и $\{x_{11}(R;s), x_{12}(R;s), x_{22}(R;s)\}$, выражающее предположение о существовании вполне или частично композиционного режима, позволяет определить те отношения R_2/R_1 объемов ресурсов, при которых такие режимы реализуются.

Особый случай системы (23), в котором $b_1(s) = b_2(s)$, $z_s = [a(1/a(2)][u(2)/u(1)]$ и матрица коэффициентов при неизвестных вырождена, также анализируется с использованием формул (21)–(23). Опустим эти стадии анализа, поскольку специфика линейности КПФ $F(R)$ в композиционном режиме для БПФ Кобба – Дугласа и CES выявлена. Она проявляется в возможности реализации вполне и частичных композиционных режимов.

10. Композитная производственная функция в режиме композиции двух линейно-однородных CES-функций

Роль линейной однородности базовых ПФ продемонстрируем для двух CES-функций двух аргументов общего вида:

$$f_k\left(X_k\right) = \left[u(k,1)x_{k1}^{a(k)} + u(k,2)x_{k2}^{a(k)}\right]^{r(k)/a(k)},\ k = 1,2.$$

Система условий (4), (5) экстремальности первого порядка функции $f_1(x_1) + f_2(x_2)$ на множестве $\Omega_{22}(R)$ состоит из уравнений относительно переменных x_{ki} и множителей λ_1, λ_2, а также из неравенств $x_{ki} \geq 0$. В предположении реализуемости композиционного режима, т.е. положительности x_{ki} в оптимальном решении, уравнения $\partial f_k/\partial x_{ki} = \lambda_i$, $i = 1,2$, определяют переменные x_{k1}, x_{k2} как функции от λ_1 и λ_2. Но в общем случае λ_1 и λ_2 не находятся в элементарных функциях как решение системы (5).

Однако при $r(1) = r(2) = r = 1$ система уравнений (4) кардинально упрощается, превращаясь в две подсистемы, неизвестными в которых являются аргументы одной из функций $f_k(x_{k1},x_{k2})$.

Для $k = 1$ такая подсистема приводится к виду

$$u(1,2)\left(x_{12}/x_{11}\right)^{a(1)} = \left[\lambda_1/u(1,1)\right]^{a(1)/(1-a(1))} - u(1,1),$$
$$u(1,1)\left(x_{11}/x_{12}\right)^{-a(1)} = \left[\lambda_2/u(1,2)\right]^{a(1)/(1-a(1))} - u(1,2).$$

Перемножив эти уравнения, получаем следующее соотношение для λ_1 и λ_2:

$$(24) \qquad \left(\lambda_1\lambda_2\right)^{a(1)/(1-a(1))} = Q_{11}\lambda_1^{a(1)/(1-a(1))} + Q_{12}\lambda_2^{a(1)/(1-a(1))}$$

в котором $Q_{11} = u(1,1)^{a(1)/(1-a(1))}u(1,2)^{1/(1-a(1))}$, $Q_{12} = u(1,2)^{a(1)/(1-a(1))}u(1,1)^{1/(1-a(1))}$, и нет переменных x_{ki}. Аналогичное соотношение получаем для $k = 2$:

$$(25) \qquad \left(\lambda_1\lambda_2\right)^{a(2)/(1-a(2))} = Q_{21}\lambda_1^{a(2)/(1-a(2))} + Q_{22}\lambda_2^{a(2)/(1-a(2))},$$

в котором $Q_{21} = u(2,1)^{a(2)/(1-a(2))}u(2,2)^{1/(1-a(2))}$, $Q_{22} = u(2,1)^{1/(1-a(1))}u(2,2)^{a(2)/(1-a(1))}$.

Решение $(\lambda_1,\lambda_2)^{opt}$ системы (24), (25), существующее для вполне композиционного режима по предположению, не зависит от ресурсов (R_i) и, следовательно, КПФ $F(R) = \lambda_1^{opt}R_1 + \lambda_2^{opt}R_2$ – линейная функция ресурсов. Но при $a(1) \neq a(2)$, т.е. при разных эластичностях замещения факторов у БПФ, это решение не может быть получено в элементарных функциях от параметров БПФ. Это становится очевидным, если, исключив переменную λ_2 из одного уравнения с помощью другого, представить получаемое уравнение с неизвестным λ_1 в следующем виде:

$$\left[\left(z^{\alpha} - Q_{12}\right)/Q_{11}\right]^{\beta} = \left[\left(z^{\beta} - Q_{22}\right)/Q_{21}\right]^{\alpha},$$

где $z = \lambda_1$, $\alpha = a(1)/(1 - a(1))$, $\beta = a(2)/(1 - a(2))$. Но при $a(1) = a(2) \equiv a$ имеем $\alpha = \beta$ и получаем значения множителей Лагранжа в оптимальном решении:

$$\left(\lambda_1^{opt}\right)^{a/(1-a)} = \left(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}\right)/\left(Q_{11} - Q_{21}\right)$$
$$\left(\lambda_2^{opt}\right)^{a/(1-a)} = \left(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}\right)/\left(Q_{22} - Q_{12}\right).$$

Это решение получено для несовпадающих базовых производственных функций CES, поскольку на их коэффициенты $u(k,i)$ ограничения $u(1,i) = u(2,i)$ не накладывались.

Заметим, что $(Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}) = 0$ при ненулевых коэффициентах $u(k,i)$, если

$$u(2,1)/u(1,1) = u(2,2)/u(1,2)$$

и, следовательно, в этом случае или $f_1(X) = f_2(X)$, или одна из этих функций строго мажорирует другую в области их определения. Но в такой ситуации сама задача рассмотрения композитной ПФ не имеет смысла.

Для частично композиционного режима линейность КПФ $F(R)$ в случае двух БПФ CES и двух ресурсов-факторов почти очевидна. Если $x_{12} = 0$, $x_{21} = 0$ и в технологиях используются разные ресурсы, то $F(R) = u(1,1)R_1 + u(2,2)R_2$. Несколько сложнее случай, когда один из ресурсов полностью используется только одной технологией. Пусть $x_{12} = R_2$, $x_{22} = 0$ и $x_{11} > 0$, $x_{21} > 0$. Тогда максимум функции $[u(1,1)\, x_{11}^{a(1)} + u(1,2)\, R_2^{a(1)}] + u(2,1)(R_1 - x_{11})$ достигается при

$$x_{11} = \left\{ \left[u(1,2)u(1,1)^{a(1)/(1-a(1))} \right] \Big/ \left[u(2,1)^{a(1)(1-a(1))} - u(1,1)^{1/(1-a(1))} \right] \right\}^{1/a(1)} R_2$$

и линейность КПФ в этом режиме также очевидна. При этом неравенство $0 < x_{11} < R_1$ дает необходимые условия для существования такого частично композиционного режима.

Распределение ресурсов между технологиями во вполне и в частично композиционном режиме для пары линейно-однородных БПФ CES с общей эластичностью замещения факторов находится в явном виде с помощью приемов, кратко охарактеризованных в разделе 9.

11. Линейность композитной производственной функции во вполне композиционном режиме пары линейно-однородных, неоклассических базовых производственных функций

Анализ КПФ для пары БПФ из известных семейств производственных функций позволяет сформулировать теорему о линейности композитного режима в общем виде. В математической формулировке она состоит том, что в $\{[f^2];[R^2]\}$-задаче с неоклассическими функциями $f_1(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2)$ система уравнений

$$\partial f_k\left(x_{k1}, x_{k2}\right) \big/ \partial x_i = \lambda_i, \quad k = 1,2, \quad i = 1,2, \tag{26}$$

для которой существует положительное решение $\left\{x_{ki}^*; \lambda_i^*\right\}$, имеет своим следствием систему уравнений

$$h_k\left(\lambda_1, \lambda_2\right) = 0, \quad k = 1,2,$$

в которой функции $h_k(\lambda_1, \lambda_2)$ зависят от параметров БПФ и не зависят от переменных x_{ki} и, следовательно, от ресурсов (R_1,R_2).

Можно предложить и более общую формулировку этой теоремы для задачи $\{[f^m];[R^n]\}$ и при замене требования положительности переменных x_{ki} в решении $\{x_{ki};\lambda_i\}$ на требование неотрицательности, т.е. при переходе к рассмотрению всевозможных ком-

позиционных, а не только вполне композиционных режимов. Такая формулировка имеет дело с условиями экстремальности, в которых часть переменных x_{ki} принимает нулевые значения и уравнения $\partial f_k(x_{k1},x_{k2})/\partial x_i = \lambda_i$ при таких сочетаниях индексов не рассматриваются. При ее доказательстве возникают чисто технические трудности, связанные с разнообразием возможных частично композиционных режимов. Но экономическая интерпретация получаемого утверждения о линейности КПФ в таких режимах не обогащается. Поэтому ограничимся доказательством теоремы для вполне композиционного режима в $\{[f^2];[R^2]\}$-задаче.

Доказательство. Для неоклассических функций $f_1(x_1,x_2)$ и $f_2(x_1,x_2)$ при $x_{ki} > 0$ система (26) представляется в виде

$$
\begin{aligned}
&\partial f_1(x_{11},x_{12})/\partial x_1 = \partial f_1(1,x_{12}/x_{11})/\partial x_1 \equiv \varphi_{11}(x_{12}/x_{11}) = \lambda_1,\\
&\partial f_1(x_{11},x_{12})/\partial x_2 = \partial f_1(1,x_{12}/x_{11})/\partial x_2 \equiv \varphi_{12}(x_{12}/x_{11}) = \lambda_2,\\
&\partial f_2(x_{21},x_{22})/\partial x_1 = \partial f_2(1,x_{21}/x_{22})/\partial x_1 \equiv \varphi_{21}(x_{21}/x_{22}) = \lambda_1,\\
&\partial f_2(x_{21},x_{22})/\partial x_2 = \partial f_2(1,x_{21}/x_{22})/\partial x_2 \equiv \varphi_{22}(x_{21}/x_{22}) = \lambda_2.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Функции φ_{ki} в случае неоклассических БПФ монотонны, и для них существуют обратные функции ψ_{ki}. Тогда $x_{12}/x_{11} = \psi_{11}(\lambda_1)$, $x_{21}/x_{22} = \psi_{22}(\lambda_2)$ и

$$
\lambda_2 = \varphi_{12}(x_{12}/x_{11}) = \varphi_{12}(\psi_{11}(\lambda_1)),\ \lambda_1 = \varphi_{21}(x_{21}/x_{22}) = \varphi_{21}(\psi_{22}(\lambda_2)). \tag{28}
$$

Система (28) имеет положительное решение λ^*, которое не зависит от переменных x^*_{ki} и, следовательно, от их сумм $\sum_i x^*_{ki}$, $k = 1,2$. Но при такой правой части системы уравнений (27) она в общем случае имеет неединственное решение x_{ki}, поскольку для неоклассических и линейно-однородных БПФ их матрицы Гессе $H_1(X_1)$ и $H_2(X_2)$ заведомо вырождены в областях их определения, включающих положительный ортант двумерного пространства ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$).

Таким образом, решение λ^* системы (28) является общим для всех решений $\{x_{ki};\lambda^*_i\}$ уравнений (26), и, следовательно, на этих решениях, представляющих собой один из возможных вариантов композиционного режима для БПФ, КПФ $F(R) = \lambda^*_1 R_1 + \lambda^*_2 R_2$ линейна по ресурсам (R_1,R_2). ЧТД.

12. Заключение

Композитные производственные функции как объект и инструмент исследований могут представлять интерес при разработке экономико-математических моделей и их применении для анализа и прогнозирования в связи со следующими соображениями.

Этот тип производственных функций не постулирует их аналитическую форму представления, а исходит из того, что ПФ является результатом изучаемого и моделируемого взаимодействия элементов исследуемой экономической системы. Поэтому такие ПФ возникают, формируются и трансформируются в процессе изменения таких систем и в то же время влияют на происходящие в них процессы. Исследование процессов гене-

зиса композитных производственных функций, интерпретируемых как детерминированные потенциальные границы результатов производственной деятельности системы в условиях ее взаимодействия с изменяющейся внешней средой, – относительно новое направление исследований в математической экономике.

В модели экономической системы производственная функция, характеризующая ее изменяющийся потенциал, может формироваться именно как результат функционирования системы, который не задается в постулируемой аналитической форме. Конструкция КПФ может рассматриваться как частный и относительно простой пример генерирования неявных ПФ в экономических моделях.

Композитные производственные функции дают одно из возможных объяснений того, почему в прикладном моделировании относительно часто применяются линейные зависимости и, в частности, линейные производственные функции. Вероятная локальная линейность потенциальных ПФ может объясняться не только возможностью использования линейных членов в разложениях нелинейных функций в ряды Тейлора и рассмотрением окрестности фиксируемого состояния системы, но и тем, что ПФ возникают как результат возможного использования ограниченных ресурсов многими ячейками общества, имеющими различные производственные возможности.

Развиваемый подход позволяет вводить в рассмотрение новые классы многорежимных двухфакторных ПФ, используя при этом их определение и способ построения, существенно отличающиеся от предлагавшихся ранее.

Композитные производственные функции, допускающие простые аналитические представления, дают возможность исследования воздействия механизмов распределения ресурсов на производственный потенциал системы. Такие механизмы определяют множества допустимых распределений ресурсов более сложной природы по сравнению с множествами *свободных распределений* Ω_{mn}, фигурирующих в задачах конструирования КПФ. Для двухфакторных КПФ множество Ω_{22} модифицируется добавлением содержательно интерпретируемых линейных ограничений. На получаемом множестве допустимых распределений ресурсов при фиксированных значениях параметров базовых ПФ могут в явном виде находиться решения многих типовых задач экономической теории.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ершов Э.Б., Садыков И.С.* Исследование взаимозаменяемости ресурсов и их динамической пропорциональности в отраслях промышленности СССР // Экономика и математические методы. 1986. Т. XXII. № 3.С. 426–440.

2. *Клейнер Г.Б.* Область определения производственной функции // Экономика и математические методы. 1978. Т. XIV. № 5. С. 931–948.

3. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции. М.: Финансы и статистика, 1986.

4. *Клейнер Г.Б., Сирота Б.Н.* Об одном классе производственных функций // Экономика и математические методы. 1976. Т. XII. № 1. С. 48–55.

5. *Садыков И.С.* Анализ и моделирование взаимозаменяемости ресурсов (на примере отраслей промышленности СССР): дисс. … канд. экон. наук. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Экономический факультет, 1985.

6. *Bruno M.* Estimation of Factor Contribution to Growth under Structural Disequilibrium // International Economic Review. 1968. Vol. 9. № 1. P. 49–62.

7. *Diewert W.E.* An Application of the Shephard's Duality Theorem a Generalized Leontief Production Function // Journal of Political Economy. 1971. Vol. 79. № 3. P. 481–507.

8. *Fuss M., McFadden D., Mundlak Y.* A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production // Production Economics / M. Fuss, D. McFadden (eds.) North-Holand, 1980. Vol. 1.

9. *Halter A.N., Carter N.O., Hockings J.G.* A Note on Transcendential Production Function // Journal of Farm Economics. 1957. Vol. 39. № 4. P. 966–974.

10. *Hanoch G.* CRESH Production Functions // Econometrica. 1971. Vol. 39. № 5. P. 695–712.

11. *Hanoch G.* Production and Demand Models with Direct or Indirect Implicit Additivity // Econometrica. 1975. Vol. 43. № 3. P. 395–420.

12. *Mukerji V.* Generalized SMAG Function with Constant Ratios of Elasticities of Substitution // Review of Economic Studies. 1963. Vol. 30(3). № 84. P. 233–236.

13. *Mundlak Y., Razin A.* On Multy-stage, Multy-product Production Functions // American Journal of Agricultural Economics. 1971. Vol. 53. № 2. P. 491–499.

14. *Revankar N.* A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Function // Econometrica. 1971. Vol. 39. № 1. P. 61–72.

15. *Sato K.A.* Two-level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function // The Review of Economic Studies. 1967. Vol. 34(2). № 98. P. 201–218.

16. *Shephard R.W.* Cost and Production Functions. Princeton, N.Y.: Princeton University Press, 1953.

17. *Shephard R.W.* Theory of Cost and Production Functions (Princeton Studies in Mathematical Economics). Princeton, N.Y.: Princeton University Press, 1970.

Composite Production Functions

Ershov Emil

National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101990, Russian Federation.
E-mail: emborer33@gmail.com

In the article we suggest the approach for production functions which takes into account the proportions of used resources. Composite production function is defined as maximum of output using multiple technologies, among which resources are allocated. We explore properties of these functions for technologies characterized by basic production functions (PFs). As basic we consider general homogeneous PFs and Cobb – Douglas, CES and Leontief PFs. Defined composite PFs are obtained in the form of continuous splines formed by pieces of isoquants of basic and liner PFs. And these composite PFs could be generated in the composite regimes of resource allocation among multiple basic PFs.

Key words: distribution of resources between technologies; basic and composite production functions; deterministic frontier production function.

* *
*

References

Ershov E.B., Sadykov I.S. (1986) Issledovanie vzaimozamenjaemosti resursov i ih dinamicheskoj proporcional'nosti v otrasljah promyshlennosti SSSR [The Study of Interchangeability of Resources and their Dynamic Proportionality in the Industries of the USSR]. *Ekonomics and Mathematical Methods*, vol. XXII, no 3, pp. 426–440.

Kleiner G.B. (1978) Oblast' opredelenija proizvodstvennoj funkcii [The Scope of the Production Function]. *Ekonomics and Mathematical Methods*, vol. XIV, no 5, pp. 931–948.

Kleiner G.B. (1986) *Proizvodstvennye funkcii* [The Production Function]. Moscow: Finansy i statistika. (in Russian)

Kleiner G.B., Sirota B.N. (1976) Ob odnom klasse proizvodstvennyh funkcij [About One Class of Production Functions]. *Ekonomics and Mathematical Methods*, vol. XII, no 1, pp. 48–55.

Sadykov I.S. (1985) *Analiz i modelirovanie vzaimozamenjaemosti resursov (na primere otraslej promyshlennosti SSSR)* [The Analysis and Modeling of Interchangeability of Resources (on the example of industries of the USSR)] (diss. … kand. jekon. Nauk), Moscow: MGU im. M.V. Lomonosova, Faculty of Ekonomics.

Bruno M. (1968) Estimation of Factor Contribution to Growth under Structural Disequilibrium. *International Economic Review*, vol. 9, no 1, pp. 49–62.

Diewert W.E. (1971) An Application of the Shephard's Duality Theorem a Generalized Leontief Production Function. *Journal of Political Economy*, vol. 79, no 3, p. 481–507.

Fuss M., McFadden D., Mundlak Y. (1980) A Survey of Functional Forms in the Economic Analysis of Production. *Production Economics* (eds. M. Fuss, D. McFadden), North-Holand, vol. 1.

Halter A.N., Carter N.O., Hockings J.G. (1957) A Note on Transcendential Production Function. *Journal of Farm Economics*, vol. 39, no 4, pp. 966–974.

Hanoch G. (1971) CRESH Production Functions. *Econometrica*, vol. 39, no 5, pp. 695–712.

Hanoch G. (1975) Production and Demand Models with Direct or Indirect Implicit Additivity. *Econometrica*, vol. 43, no 3, pp. 395–420.

Mukerji V. (1963) Generalized SMAG Function with Constant Ratios of Elasticities of Substitution. *Review of Economic Studies*, vol. 30(3), no 84, pp. 233–236.

Mundlak Y., Razin A. (1971) On Multy-stage, Multy-product Production Functions. *American Journal of Agricultural Economics*, vol. 53, no 2, pp. 491–499.

Revankar N. (1971) A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Function. *Econometrica*, vol. 39, no 1, pp. 61–72.

Sato K.A. (1967) Two-level Constant-Elasticity-of-Substitution Production Function. *The Review of Economic Studies*, vol. 34(2), no 98, pp. 201–218.

Shephard R.W. (1953) *Cost and Production Functions*, Princeton, New York: Princeton University Press.

Shephard R.W. (1970) *Theory of Cost and Production Functions* (Princeton Studies in Mathematical Economics), Princeton, New York: Princeton University Press.