

Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 4. С. 505–533.
HSE Economic Journal, 2015, vol. 19, no 4, pp. 505–533.

Оптимальные алгоритмы исполнения для стратегических трейдеров

Булатов А.Э., Ларионов И.Н.

Мы анализируем стратегии оптимального исполнения, когда *несколько* трейдеров одновременно вовлечены в ребалансировку портфелей в одном и том же активе. Для этого случая мы получаем новые торговые стратегии, которые являются непосредственным расширением подхода минимизации линейной комбинации ожидаемых торговых издержек и их дисперсии, предложенным в работах [Grinold, Kahn, 1995; Almgren, Chriss, 1999]. Однако несмотря на то, что агрегированный поток заявок обладает некоторыми свойствами, присущими стратегиям Алмгрена, Крисса (а именно – монотонность и выпуклость), предложенные стратегии могут достаточно сильно отличаться от стандартных [Grinold, Kahn, 1995; Almgren, Chriss, 1999]. Так происходит, поскольку каждый трейдер пытается минимизировать свои торговые издержки и поэтому принимает во внимание влияние сделок других трейдеров на цену актива. Мы также получаем представление торговых стратегий в динамическом равновесии Нэша в виде системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые могут быть решены в явном виде, при условии, что трейдеры одинаково не склонны к риску и отличаются только размером начальной позиции. Полученные стратегии могут принадлежать двум различным классам – быть агрессивными или пассивными. В частности, мы показываем, что трейдеры с небольшими позициями склонны действовать агрессивно, в то время как трейдеры с большими позициями защищаются от агрессивных, прибегая к «замедленной» торговле. Мы также показываем, что в зависимости от параметров ликвидности и волатильности агрессивные трейдеры могут быть фронт-раннерами или контрариан-трейдерами.

Ключевые слова: оптимальная ликвидация активов; стратегии оптимального исполнения; дифференциальные игры.

Булатов Алексей Эрикович – профессор, Ph.D., Международная лаборатория финансовой экономики, Международный институт экономики и финансов НИУ ВШЭ. E-mail: icef@hse.ru

Ларионов Иван Николаевич – аспирант, факультет экономических наук НИУ ВШЭ, Otkritie Capital International Limited. E-mail: larionov.ivan.w@gmail.com

Статья получена: август 2015 г./Статья принята: октябрь 2015 г.

1. Введение

В течение последних лет значительная часть сделок на мировых рынках акций совершается алгоритмическими торговыми системами, и темпы роста объема торгов, осуществленных алгоритмами, составляют более чем 30% ежегодно (согласно исследованиям компании TABB). В связи с этим разработка торговой аналитики привлекает все больше внимания как со стороны научного, так и со стороны бизнес-сообществ. Формулировка задачи управления торговым портфелем как задачи многопериодной оптимизации с краевыми условиями была впервые представлена в работе [Grinold, Kahn, 1995]. В этом подходе целью трейдера является оптимизация ожидания многопериодной полезности, что эквивалентно многопериодной оптимизации, возникающей в теории портфельного управления [Markowitz, 1952]. Альтернативный подход был предложен в работе [Bertsimas, Lo, 1998], где стратегия оптимального исполнения была описана как решение задачи стохастического динамического программирования, в которой минимизировались торговые издержки при условии стохастической динамики торгового актива. Однако вычислительная сложность подхода динамической оптимизации заставила авторов игнорировать корреляции между различными активами, что, в свою очередь, свело задачу к рассмотрению множества независимых одномерных случаев. Таким образом, хотя некоторые пути решения задачи оптимального исполнения были описаны в конце 1990-х годов, только после публикаций [Almgren, Chriss, 2001; 2000] подход минимизации функционала, состоящего из линейной комбинации ожидания торговых издержек и их дисперсии, получил свое признание.

В своих работах Алмгрен и Крисс расширили подход Гринольда, Кана. Одним из важных свойств полученных авторами априорных оптимальных стратегий является оптимальность в любое время в течение торгового периода, т.е. независимость стратегий от флуктуаций ценового процесса во время исполнения. Эта статичность была получена исходя из сделанных предположений о ценовом процессе базового актива, а именно, предположений о том, что цена актива является арифметическим броуновским движением без автокорреляций и что волатильность цены и ликвидность торгового актива известны заранее. Значительное количество исследований были посвящены ослаблению этих предположений и получению стратегий оптимального исполнения в рамках более реалистичной модели. Однако ключевым предположением оставалось предположение о том, что в исполнении участвует лишь один стратегический трейдер, который принимает во внимание воздействие его собственных сделок на цену, но игнорирует аналогичное воздействие других трейдеров, которые могут присутствовать на рынке.

В этой работе мы рассматриваем стратегии оптимального исполнения в случае, когда сразу несколько трейдеров участвуют в торговле. В литературе аналогичная ситуация рассматривалась в работе [Brunnermeier, Pedersen, 2005], в которой несколько риск-нейтральных трейдеров участвуют в ликвидации портфеля при ограничениях на торговый капитал в присутствии конкурирующих трейдеров-«хищников». Авторы показывают, что в таком случае трейдеры-«хищники» *фронт-раннят* трейдеров, участвующих в ликвидации актива, продавая актив до того, как на рынок поступает ликвидационный поток заявок, и выкупая актив после этого, вследствие чего происходит перепродажа актива и увеличение торговых издержек трейдеров, участвующих в ликвидации.

В нашей модели трейдеры являются не склонными к риску. Мы предполагаем, что на рынке есть только один тип трейдеров, и решение о характере торговой стратегии каждого из трейдеров принимается эндогенно в зависимости от начальной позиции трейдера. Для этого случая мы получаем новые оптимальные стратегии, которые следуют из прямого расширения mean-variance подхода Гринольда, Кана и Алмгрена, Крисса. Однако, как мы показываем ниже, полученные стратегии могут достаточно сильно отличаться от стратегий Гринольда, Кана и Алмгрена, Крисса и в зависимости от конечной целевой позиции трейдера могут быть агрессивными или пассивными. Так происходит, поскольку каждый пытается минимизировать свои торговые издержки и действует стратегически, принимая во внимание влияние сделок других трейдеров на цену актива.

В рамках этой модели мы также получаем и анализируем динамическое равновесие Нэша для случая, описанного выше. Мы получаем полное описание этого равновесия в терминах системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая может быть решена в явном виде. Стоит отметить, что равновесные стратегии описывают разные торговые профили в зависимости от целевой позиции. В частности, мы показываем, что трейдеры с малой целевой позицией имеют агрессивный торговый профиль, в то время как крупные трейдеры защищаются от потенциальных агрессоров, уменьшая интенсивность потока заявок.

Во втором разделе мы описываем нашу рыночную и торговую модель с конечным числом N трейдеров. С целью упрощения анализа мы формулируем оптимизационную задачу в непрерывном времени. В третьем разделе мы рассматриваем случай двух трейдеров и получаем оптимальную стратегию для одного из них, предполагая, что второй трейдер следует торговой программе, аналогичной изложенной в работе [Almgren, Chriss, 2001] (далее – АС). В разделе 4 мы получаем равновесные стратегии. В пятом разделе описываются некоторые свойства равновесных стратегий и приводятся соответствующие необходимые и достаточные условия. Далее следует заключение.

2. Модель

Рынок состоит из конечного числа N несклонных к принятию риска и не имеющих приватной информации трейдеров¹, имеющих индексы $k = 1, \dots, N$, каждому из которых необходимо продать Q_k единиц рискованного актива в течение времени T , совершая сделки размером $\Delta x_k(t)$ в фиксированные дискретные моменты времени $t = n\tau$, где

$n = 0, 1, \dots, \frac{T}{\tau}$. Торговые решения агентов не основываются на информации о фундамен-

тальной стоимости актива, и торговля происходит только потому, что вследствие экзогенных причин каждому трейдеру $k = 1, \dots, N$ необходимо ликвидировать его начальную позицию Q_k до закрытия рынка в момент времени T . В то же время каждый трейдер знает, что на рынке присутствуют другие трейдеры, имеет полную информацию об их

¹ Минимизирующих mean-variance функционал торговых издержек.

целевых позициях и может использовать эту информацию для минимизации собственных издержек. Это приводит к стратегическому взаимодействию между трейдерами. Наша модель может рассматриваться как расширение модели АС на случай конечного количества трейдеров. В предельном случае $N = 1$ мы получаем результаты АС.

Для простоты мы предполагаем, что в отсутствие сделок цена базового актива является простым арифметическим броуновским движением с постоянной волатильностью σ и что влияние совершенных сделок на цену актива характеризуются двумя константами $\lambda, \mu > 0$.

В итоге ценовой процесс (учитывающий и перманентное, и временное влияние суммарного потока заявок $dx_k(t) = x_k(t+dt) - x_k(t), k = 1, \dots, N$ на цену) имеет вид

$$(1) \quad dP(t) = P(t+dt) - P(t) = \sigma dz_t + \lambda \sum_{k=1}^N dx_k(t) + \mu \sum_{k=1}^N d\dot{x}_k(t).$$

И, следовательно, исполнение сделки происходит по цене

$$(2) \quad P(t) = P(0) + \sigma z_t + \lambda \sum_{k=1}^N x_k(t) + \mu \sum_{k=1}^N \dot{x}_k(t),$$

где второй член в правой части отражает временное влияние сделок на цену, которое является линейным по интенсивности $\sum_{k=1}^N \dot{x}_k(t)$ агрегированного потока заявок с константой $\mu \geq 0$. Далее мы без потери общности считаем начальный уровень цены нулевым $P(0) = 0$.

3. Задача оптимизации

Каждый трейдер $k = 1, \dots, N$ стремится ликвидировать свою начальную позицию Q_k к моменту времени $t = T$ и минимизирует функционал торговых издержек. Функционал торговых издержек определяется как линейная комбинация ожидания и дисперсии потерь, обусловленных реакцией цены актива на совершаемые сделки и стохастическими инновациями цены актива. Чтобы упростить анализ, мы сразу переходим к пределу непрерывного времени, когда dt мало. Поскольку начальная цена принимается равной нулю $P(0) = 0$, торговые потери ко времени t равны издержкам, ассоциированным с продажей $x_k(t)$ единиц торгового актива

$$(3) \quad \begin{aligned} dC_k(t) &= P(t)dx_k(t) = \\ &= dx_k(t) \left(\hat{P}(t) + \lambda(x_k(t) + x_{-k}(t)) + \mu(\dot{x}_k(t) + \dot{x}_{-k}(t)) \right), \end{aligned}$$

где, следуя работе [Almgren, Chriss, 2001], мы предполагаем, что ценовой процесс в отсутствие потока заявок $\hat{P}(t)$ является арифметическим броуновским движением. Интегрируя, мы получаем

$$(4) \quad C_k[x_k(\cdot)] = \int_0^T dt (\mu(\dot{x}_k + \dot{x}_{-k}) + \lambda(x_{-k} + x_k) + \hat{P}(t)) \dot{x}_k dt,$$

где C_k – суммарные издержки трейдера k к моменту времени $t = T$. Таким образом, каждый трейдер $k = 1, \dots, N$ минимизирует свой mean-variance функционал S_k

$$(5) \quad \min_{x_k(\cdot)} S_k[x_k(\cdot)],$$

определяемый как

$$(6) \quad S_k[x_k(\cdot)] = E[C_k[x_k(\cdot)]] + a \text{Var}[C_k[x_k(\cdot)]],$$

где a – удвоенный коэффициент несклонности к риску mean-variance оптимизатора. В частности, в случае единственного трейдера $N = 1$ оптимальные стратегии совпадают со стандартными стратегиями [Almgren, Chriss, 2001].

3.1. Условия оптимальности стратегий

Как следует из (4), функционал издержек может быть получен аналогично АС и имеет вид

$$(7) \quad C_k = \int_0^T dt \dot{x}_k P(t) = \int_0^T dt (\mu \dot{x}_k (\dot{x}_k + \dot{x}_{-k}) + \lambda \dot{x}_k (x_{-k} + x_k) + \hat{P}(t) \dot{x}_k).$$

Оценив ожидание и дисперсию функционала издержек (4), мы получаем mean-variance – функционал для каждого трейдера $k = 1, 2, \dots, N$ в виде

$$(8) \quad S_k = \int_0^T dt L_k(x_k(t), \dot{x}_k(t)), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где

$$(9) \quad L_k(x_k, \dot{x}_k) = \mu \dot{x}_k^2 + \mu \dot{x}_k \dot{x}_{-k} + \lambda \dot{x}_k x_{-k} + a \lambda \sigma^2 (Q_k - x_k)^2,$$

где мы опустили полную производную $\lambda \dot{x}_k x_k = \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt}(x_k^2)$ в Лагранжиане (9). Каждый трейдер выбирает оптимальную стратегию $x_k(t)$ на интервале $t \in [0; T]$, удовлетворяющую следующим краевым условиям:

$$(10) \quad x_k(0) = 0, \quad x_k(T) = Q_k.$$

Условиями первого порядка для каждого трейдера k являются уравнения Эйлера – Лагранжа, имеющие вид

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x_k} L_k(x_k, \dot{x}_k) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} L_k(x_k, \dot{x}_k) = 0.$$

Соединяя (9) и (11), мы получаем

$$(12) \quad \ddot{x}_k + \frac{1}{2} \ddot{x}_{-k} + \frac{\lambda}{2\mu} \dot{x}_{-k} = \frac{a\lambda\sigma^2}{\mu} (x_k - Q_k).$$

Заметим, что в монополистическом случае, $N = 1$, система (12) вырождается в единственное уравнение, эквивалентное аналогичному АС. В общем случае решение $x_k(t)$ системы (12) для каждого трейдера $k = 1, 2, \dots, N$ может рассматриваться как оптимальная реакция трейдера k на агрегированную торговую стратегию $x_{-k}(t)$ всех остальных трейдеров $j = 1, 2, \dots, N$, где $j \neq k$.

4. Аналитические решения

Как было указано выше, система дифференциальных уравнений (12) описывает достаточно общий случай. Именно решая систему (12), можно получить k реакций $x_k(t)$ для каждого трейдера $k = 1, \dots, N$, когда остальные трейдеры $j \neq k$ следуют некоторым стратегиям, которые приводят к агрегированному потоку заявок $x_{-k}(t)$. Ниже мы рассматриваем два важных частных случая.

4.1. Оптимальная реакция на стратегии Алмгрена, Крисса

Рассмотрим случай двух трейдеров, в котором один трейдер следует стандартной стратегии АС, в то время как другой действует стратегически, знает, какой стратегии следует первый трейдер, и реагирует оптимальным образом согласно (12). Мы показываем, что стратегия второго трейдера может быть получена в явном виде, и она существенно отличается от стратегии, предложенной в работе АС. Стандартные стратегии АС удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(13) \quad \ddot{x}_1 = \frac{a\lambda\sigma^2}{\mu} (x_1 - Q_1).$$

Введем обозначение

$$(14) \quad \gamma = \sqrt{\frac{a\lambda\sigma^2}{\mu}}.$$

Решая (13) с краевыми условиями (10), мы получаем стандартные стратегии в виде

$$(15) \quad x_1(t) = Q_1 \left(1 - \frac{\sinh(\gamma(T-t))}{\sinh(\gamma T)} \right).$$

Введем также обозначение

$$(16) \quad y_k(t) = Q_k - x_k(t),$$

где $y_k(t)$ является позицией трейдера k в момент времени t . В этих обозначениях стратегия АС имеет вид

$$(17) \quad y_1(t) = Q_1 \frac{\sinh(\gamma(T-t))}{\sinh(\gamma T)}.$$

Оптимальная торговая реакция второго трейдера удовлетворяет уравнению

$$(18) \quad \ddot{y}_2 + \frac{1}{2} \ddot{y}_1 + \frac{\lambda}{2\mu} \dot{y}_1 = \frac{a\lambda\sigma^2}{\mu} y_2,$$

с краевыми условиями

$$(19) \quad y_j(0) = Q_j, y_j(T) = 0, \quad j = 1, 2.$$

Считая, что первый трейдер торгует согласно стратегии АС, мы в явном виде записываем производные стратегии первого трейдера, и (18) принимает вид

$$(20) \quad \ddot{y}_2 - \gamma^2 y_2 = Q_1 F_1(t),$$

где

$$(21) \quad F_1(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \gamma \cosh(\gamma(T-t)) - \frac{\gamma^2}{2} \sinh(\gamma(T-t))}{\sinh(\gamma T)}.$$

Заметим, что правая часть (20) зависит от краевого условия первого трейдера, которое, вообще говоря, неизвестно второму трейдеру. Тем не менее в рамках этой работы мы предполагаем, что второй трейдер имеет полное знание о планируемой конечной позиции первого трейдера. Другим важным наблюдением является тот факт, что правая

часть (20) включает в себя экспоненты с показателем γt , который также характеризует однородные решения уравнения (20), таким образом, приводя нас к «резонансному» случаю, когда частное решение включает в себя член, пропорциональный времени. Это одна из причин, по которой реакция второго трейдера имеет функциональную форму, отличную от стандартной стратегии АС. Решая (20) с краевыми условиями (19), мы получаем

$$(22) \quad y_2(t) = \left(Q_2 - Q_1 \frac{\lambda t}{4\mu} \right) \frac{\sinh[\gamma(T-t)]}{\sinh(\gamma T)} + Q_1 \frac{\gamma T}{4} \left(\frac{t \cosh[\gamma(T-t)]}{T \sinh(\gamma T)} - \frac{\sinh(\gamma t)}{(\sinh(\gamma T))^2} \right).$$

Заметим, что первый член в правой части имеет такой же функциональный вид, как и стандартное решение АС, в котором в конечную позицию второго трейдера внесена поправка на позицию первого трейдера, но решение выше также содержит временную зависимость $t \exp \gamma t$ (вследствие «резонансного» эффекта, описанного выше), которая отсутствует в стандартном решении. Эта зависимость также присутствует и во втором члене равенства выше.

4.2. Симметричное равновесие Нэша

Далее мы переходим к нахождению симметричных динамических равновесных в смысле Нэша стратегий в случае, когда значения $Q_k, k = 1..N$ известны всем трейдерам, и за исключением различных начальных позиций трейдеры идентичны. Q_k может быть положительным или отрицательным, соответствуя программам продажи и покупки. Учитывая это, мы рассматриваем случай, когда все трейдеры изначально являются продавцами, считаем начальные позиции положительными и приравниваем конечные позиции к нулю. Это справедливо, поскольку абсолютные значения начальных и конечных позиций не имеют значения, но важна их разность (позиция, которую трейдеру предстоит купить или продать). С технической точки зрения этот факт следует из линейности обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих торговые стратегии. Заметим, что в случае программы продажи определенная выше функция $y_k(t)$ имеет смысл позиции трейдера k в момент времени t . Как мы покажем ниже, равновесные стратегии могут быть декомпозированы на две части, одна из которых является общей для всех трейдеров, а вторая специфична для каждого трейдера. Суммируя левые и правые части всех N уравнений системы (12), мы получаем

$$(23) \quad \frac{N+1}{2}(\ddot{y}_k + \ddot{y}_{-k}) + (N-1) \frac{\lambda}{2\mu}(\dot{y}_k + \dot{y}_{-k}) = \gamma^2(y_k + y_{-k}),$$

для каждого трейдера $k = 1..N$. Введем агрегированную позицию $Y = y_k + y_{-k}$. Тогда

$$(24) \quad \frac{N+1}{2}\ddot{Y} + (N-1) \frac{\lambda}{2\mu}\dot{Y} = \gamma^2 Y$$

с краевыми условиями $Y(0) = Q$ и $Y(T) = 0$, где агрегированная целевая позиция $Q = \sum_{k=1}^N Q_k$. Решением этого дифференциального уравнения является

$$(25) \quad Y = Q(b_1 \exp(\eta_1 t) + b_2 \exp(\eta_2 t)),$$

где

$$(26) \quad b_1 = \frac{\exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_2 T) - \exp(\eta_1 T)},$$

$$b_2 = \frac{\exp(\eta_1 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)},$$

и

$$(27) \quad \eta_{1,2} = -v_N \pm \sqrt{v_N^2 + k_N^2},$$

где

$$(28) \quad k_N^2 = \frac{2\gamma^2}{N+1}, v_N = \frac{\lambda}{2\mu} \frac{N-1}{N+1}.$$

Группируя слагаемые, мы получаем явное решение для Y :

$$(29) \quad Y(t) = Q \exp\left[\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right)t\right] \frac{\sinh\left[\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right)(T-t)\right]}{\sinh\left[\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right)T\right]},$$

где $\eta_{1,2}$ определены в (27) и (28).

Вернемся к изначальной системе (12). Обозначим нормализованное отклонение позиции трейдера k от среднего как $\xi_k = Ny_k - Y$ и заметим, что $y_{-k} = Y - y_k$. Подставив это в (12) и учитывая, что агрегированная стратегия $Y(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (24), мы получаем дифференциальное уравнение для нормализованного отклонения позиции от среднего $\xi_k(t)$ в виде

$$(30) \quad \frac{1}{2}\ddot{\xi}_k - \frac{\lambda}{2\mu}\dot{\xi}_k = \gamma^2\xi_k,$$

с краевыми условиями $\xi_k(0) = NQ_k - Q$ и $\xi_k(T) = 0$. Характеристическими числами этого дифференциального уравнения являются

$$(31) \quad \eta_{3,4} = \frac{\lambda}{2\mu} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2}.$$

Аналогично (25), получаем общее решение (30):

$$(32) \quad \xi_k = (NQ_k - Q)(b_3 \exp(\eta_3 t) + b_4 \exp(\eta_4 t)).$$

Из краевых условий мы находим

$$(33) \quad b_3 = \frac{\exp(\eta_4 T)}{\exp(\eta_4 T) - \exp(\eta_3 T)},$$

$$b_4 = \frac{\exp(\eta_3 T)}{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T)}.$$

Группируя слагаемые (32), мы получаем

$$(34) \quad \xi_k = (NQ_k - Q) \exp\left[\left(\frac{\eta_3 + \eta_4}{2}\right)t\right] \frac{\sinh\left[\left(\frac{\eta_3 - \eta_4}{2}\right)(T - t)\right]}{\sinh\left[\left(\frac{\eta_3 - \eta_4}{2}\right)T\right]}.$$

Теперь, соединив решение для ξ_k с (29) и учитывая, что

$$(35) \quad Y = y_k + y_{-k}, y_k = \frac{Y + \xi_k}{N},$$

наконец, мы получаем явное решение для торговых стратегий $y_k(t), k = 1, \dots, N$ в виде

$$(36) \quad y_k = \bar{Q}\phi(t) + \Delta_k \psi(t),$$

где

$$(37) \quad \phi(t) = \exp\left[\left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right)t\right] \frac{\sinh\left[\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right)(T - t)\right]}{\sinh\left[\left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right)T\right]},$$

$$\psi(t) = \exp\left[\left(\frac{\eta_3 + \eta_4}{2}\right)t\right] \frac{\sinh\left[\left(\frac{\eta_3 - \eta_4}{2}\right)(T - t)\right]}{\sinh\left[\left(\frac{\eta_3 - \eta_4}{2}\right)T\right]},$$

и $\eta_{1,2,3,4}$ определены в (27), (28), (31), средняя целевая позиция $\bar{Q} = (Q/N)$, и отклонение трейдера от средней целевой позиции $\Delta_k = Q_k - \bar{Q}$. Мы также вводим относительное отклонение от средней целевой позиции для каждого трейдера $\delta_k = \Delta_k / \bar{Q} = Q_k / \bar{Q} - 1$.

Заметим, что, как было сказано выше, все равновесные стратегии для трейдеров $k = 1..N$ имеют общую агрегированную Y компоненту, в то время как компоненты отклонения ξ_k отличаются, хотя и имеют одинаковую функциональную форму. Далее без потери общности мы будем рассматривать случай программы продажи.

4.2.1. Агрегированная позиция

Теперь мы обсудим характер агрегированной позиции трейдеров (суммы позиций индивидуальных трейдеров) как функции времени $Y(t)$. Сначала заметим, что $Y(t)$ зависит только от агрегированной начальной позиции и не зависит от распределения позиций между трейдерами. Это позволяет нам сравнить траекторию агрегированной позиции с аналогичной для стандартных стратегий АС, введя «агрегированного» трейдера.

Из (27) и (28) следует, что при $N \rightarrow \infty$ влияние параметра γ , который зависит от меры несклонности к риску, уменьшается до нуля и наше решение становится таким же, как решение для АС случая с риск-нейтральными трейдерами, в котором позиция трейдера является линейной функцией времени со значениями Q в $t = 0$ и нулевой позицией в $t = T$. Другими словами, присутствие большого количества трейдеров приводит к такому же результату, как и риск-нейтральность «агрегированного» трейдера в случае АС.

Докажем несколько простых фактов о траектории агрегированной позиции. Рассмотрим рынок с N трейдерами, где все они торгуют согласно стратегиям АС (13). В этом случае агрегированная позиция как функция времени имеет вид

$$(38) \quad Y_{AC}(t) = Q \frac{\sinh(\gamma(T-t))}{\sinh(\gamma T)}, \quad Q = \sum Q_k, \quad k = 1..N,$$

где γ определена в (14). В случае $Q > 0$ функция выше является монотонно убывающей и выпуклой для t в $[0, T]$. Мы покажем, что в равновесном случае агрегированная позиция в нашей модели также является монотонно убывающей и выпуклой на протяжении всего торгового периода.

Утверждение 1. Агрегированная позиция трейдеров $Y(t)$ является монотонно убывающей и выпуклой функцией на закрытом интервале $[0, T]$.

Доказательство. Из (25) и (26) имеем:

$$(39) \quad \dot{Y}(t) = Q \frac{\eta_2 \exp(\eta_1 T) \exp(\eta_2 t) - \eta_1 \exp(\eta_2 T) \exp(\eta_1 t)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)}.$$

Поскольку $\eta_2 < 0$ и $\eta_1 > 0$, что следует из (27), агрегированная интенсивность потока заявок $\dot{Y}_k(t) < 0$ для любого t в $[0, T]$. Аналогично, вторая производная

$$(40) \quad \ddot{Y}(t) = Q \frac{\eta_2^2 \exp(\eta_1 T) \exp(\eta_2 t) - \eta_1^2 \exp(\eta_2 T) \exp(\eta_1 t)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)}.$$

Поскольку $|\eta_2| > |\eta_1|$, то $Y_k > 0$ для любого t в $[0, T]$. Доказательство завершено.

Это утверждение показывает, что траектория агрегированной позиции в равновесном случае достаточно похожа на траекторию агрегированной позиции в случае нескольких трейдеров, каждый из которых торгует согласно АС стратегиям.

4.2.2. Равновесие Нэша: определения

Теперь рассмотрим динамику позиций индивидуальных трейдеров как функцию времени. Несмотря на то, что, как мы показали выше, агрегированная позиция всех трейдеров ведет себя достаточно похоже на аналогичную в стандартном АС случае, оказывается, что в зависимости от параметров модели и начальной позиции трейдера равновесное решение может обладать свойствами, которые не присущи стандартной стратегии (17). Как мы упомянули, решение АС всегда монотонно, что разумно для случая единственного трейдера – трейдер минимизирует свой функционал издержек и не имеет причин покупать, если он изначально является продавцом. Аналогично, позиция трейдера как функция времени не имеет точек перегиба в стандартной АС модели – их наличие сделало бы стратегию неоптимальной по причине наличия временного влияния на цену актива и несклонности к риску. Тем не менее на рынке с конечным числом трейдеров индивидуальные траектории могут быть немонотонными и могут иметь точки перегиба. Далее мы приведем классификацию торговых стратегий, основанную на этих двух свойствах.

Сначала введем понятие «агрессивной» стратегии.

Определение 1. Мы называем стратегию трейдера агрессивной, если его позиция как функция времени имеет локальный экстремум на открытом интервале $(0, T)$ (или, эквивалентно, его торговая стратегия не является монотонной функцией).

За этим определением стоит ясная интуиция – поскольку в случае одного трейдера немонотонная стратегия всегда является неоптимальной, немонотонность возникает только по причине стратегического взаимодействия между трейдерами. С экономической точки зрения трейдер может торговать, удаляясь от своей целевой позиции, поскольку он ожидает, что сделки других трейдеров окажут благоприятное для него влияние на цену, уменьшая его торговые издержки (или даже превращая их в торговую прибыль) за счет других трейдеров.

Аналогично определению 1 мы вводим следующие определения.

Определение 2. Будем говорить, что стратегия трейдера является пассивной, если его позиция как функция времени не имеет локального экстремума на открытом интервале $(0, T)$ (или, эквивалентно, его торговая стратегия является монотонно убывающей функцией времени).

Как мы говорили ранее, без потери общности мы предполагаем, что начальные позиции всех трейдеров положительны, а конечные равны нулю. Мы покажем, что на таком рынке могут существовать два типа агрессивных трейдеров.

Определение 3. Будем говорить, что трейдер является «фронт-раннером», если первым (во времени) локальным экстремумом его торговой траектории является минимумом.

Такое торговое поведение происходит потому, что трейдер ожидает, что в результате действий других трейдеров цена актива будет подвержена значительному перманентному изменению. Тогда для трейдера может быть оптимальным опередить изменение цены, ассоциированное с этим влиянием, и продать актив до того, как на рынок поступит большой поток заявок на продажу от других трейдеров, и выкупить его после этого.

Другим типом агрессивных торговых стратегий являются контрариан – «противоположные» – стратегии.

Определение 4. Будем говорить, что стратегия агрессивного трейдера обладает «контрариан» свойством, если первым локальным экстремумом $y_k(t)$ является максимум.

Такой тип стратегического поведения является результатом ожидания трейдером значительного временного влияния потока заявок на цену, который исчезнет, когда остальные агенты уменьшат интенсивность торговли. Другими словами, когда другие трейдеры продают актив в большом объеме и временное влияние на цену велико для индивидуального трейдера, может быть выгодным покупать – по мере того, как другие трейдеры перестанут продавать, временное влияние на цену исчезнет и цена актива будет выше, когда контрариан-трейдер будет продавать.

Мы хотим подчеркнуть, что вследствие сложных стратегических взаимодействий равновесные стратегии могут иметь как локальный минимум, так и локальный максимум. Мы основываем нашу классификацию на типе первого экстремума, поскольку интуитивно он является самым важным – он определяет направление, в котором агрессивный трейдер будет торговать в самом начале, когда агрегированный поток заявок максимален.

Последнее свойство стратегий, которое мы хотим упомянуть, это свойство 5.

Определение 5. Мы говорим, что стратегия трейдера обладает свойством «замедленной торговли», если у торговой траектории имеется точка перегиба.

С экономической точки зрения наличие точки перегиба означает, что в какой-то момент времени трейдер уменьшает интенсивность его торговли с тем, чтобы увеличить ее ближе к концу торгового горизонта. Интуитивно, такое свойство является защитным механизмом пассивных трейдеров против агрессивных – замедление скорости торговли до того момента, когда агрессивный трейдер вынужден будет торговать с высокой интенсивностью ближе к концу торгового интервала, чтобы достичь своей нулевой целевой позиции, как следствие имея высокие торговые издержки по причине временного влияния на цену актива. Тем не менее это сторона стратегического взаимодействия является более сложной: если в какой-то момент времени агрессивный трейдер набирает большую позицию, он также может задерживать свою торговлю, чтобы другие трейдеры не смогли его «фронт-раннить». Ниже мы покажем, при каких начальных позициях стратегия трейдера будет пассивной или агрессивной.

4.2.3. Равновесие Нэша: формальный анализ

Как и ранее, мы предполагаем что начальные позиции всех трейдеров $Q_k > 0$. Сперва мы представим необходимые и достаточные условия, при которых трейдер является агрессивным. Рассмотрим некоторого трейдера с начальной позицией Q_k . Тогда выполняется следующее условие.

Предложение 1. Если агрегированная начальная позиция $Q > 0$, то трейдеры «больше среднего» с $\delta_k = (Q_k - \bar{Q})/\bar{Q} \geq 0$ являются пассивными.

Доказательство: см. Приложение.

Действительно, интуитивно трейдеры с большими позициями являются менее гибкими – для них разворот позиции несет большие торговые издержки вследствие размера позиции. Таким образом, лучшее, что могут сделать такие трейдеры, – это монотонно уменьшать свою позицию к нулю. Несмотря на свою интуитивность, условие выше не является достаточным. Другими словами, трейдер все еще может быть пассивным, если его начальная позиция $Q_k < Q/N$. К примеру, как показывают симуляции, если несклонность трейдера к риску велика или актив имеет высокую волатильность, трейдер не будет вступать в агрессивные стратегии, поскольку это негативно скажется на его функционале издержек, увеличив его риск. Чтобы получить достаточное условие, необходимо описать, при каких параметрах уравнение

$$(41) \quad \dot{y}_k(t) = \bar{Q}\dot{\phi}(t) + \Delta_k\psi(t) = 0,$$

где $\phi(t)$ и $\psi(t)$ определены в (37), имеет решение на интервале $(0, T)$. Уравнение выше является трансцендентным, и поэтому мы не можем получить явных условий для $\delta_k = (\Delta_k/\bar{Q})$. Тем не менее мы можем показать, следующее.

Предложение 2. $y_k(t, \delta_k)$ имеет локальный экстремум, или, другими словами, стратегия трейдера является агрессивной только для $\delta_k \in [-1, \hat{\delta}]$, где неточная верхняя грань $\hat{\delta}_{up}$ для $\hat{\delta}$

$$(42) \quad \hat{\delta}_{up} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2(N-1)^2}{4\mu^2(N+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{N+1}} \exp\left(-\frac{\lambda}{\mu} \frac{N}{N+1} T\right)}{\frac{\lambda}{2\mu} \sinh\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2 T}\right) - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2} \cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2 T}\right)} \times$$

$$\times \frac{\sinh\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2 T}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{\lambda^2(N-1)^2}{4\mu^2(N+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{N+1}} T\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\lambda^2(N-1)^2}{4\mu^2(N+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{N+1}}}{\frac{\lambda}{2\mu} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2} \coth\left(\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2 T}\right)} \times \frac{\exp\left(-\frac{\lambda}{\mu} \frac{N}{N+1} T\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{\lambda^2(N-1)^2}{4\mu^2(N+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{N+1}} T\right)} < 0.$$

Доказательство: см. Приложение.

Далее мы приводим условие, которое отличает контрариан-трейдера от фронт-раннера.

Предложение 3. *Треjder k является контрариан-трейдером тогда и только тогда, когда его начальная позиция и параметры модели таковы, что*

$$(43) \quad -1 < \delta_k < \frac{\left(\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)} + \sqrt{\left(\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)} \right)^2 + \frac{2\gamma^2}{N+1}} \coth \left[\sqrt{\left(\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)} \right)^2 + \frac{2\gamma^2}{N+1}} T \right] \right)}{\frac{\lambda}{2\mu} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2} \coth \left[\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2} T \right]}.$$

Треjder k является фронт-раннером тогда и только тогда, когда δ_k удовлетворяет (42) и не удовлетворяет (43).

Доказательство: см. Приложение.

Заметим, что параметры модели могут быть такими, что два неравенства (43) не могут выполняться вместе.

Доказав необходимые и достаточные (хотя и неявные) условия об агрессивных стратегиях, мы переходим к одному из защитных свойств, которые появляются в нашей модели, – к замедленной торговле. Как было показано выше, трейдер должен иметь достаточно большую начальную позицию, чтобы быть пассивным. Следующее предложение определяет условия, при которых стратегия трейдера будет обладать свойством замедленной торговли.

Предложение 4. *Стратегия трейдера имеет свойство замедленной торговли тогда и только тогда, когда $\delta_k > \delta^{DT}$. Неточные нижняя и верхняя грани для δ^{DT} :*

$$(44) \quad \begin{aligned} \hat{\delta}_{lower}^{DT} &= \frac{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T) (\eta_2^2 - \eta_1^2) \exp(\eta_1 T) \exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T) (\eta_3^2 - \eta_4^2) \exp(\eta_3 T) \exp(\eta_4 T)}, \\ \hat{\delta}_{upper}^{DT} &= \frac{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T) \eta_2^2 \exp(\eta_1 T) - \eta_1^2 \exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T) \eta_3^2 \exp(\eta_4 T) - \eta_4^2 \exp(\eta_3 T)}. \end{aligned}$$

Если параметры модели таковы, что

$$(45) \quad \eta_4 T - \ln(\eta_4^2) \leq \eta_3 T - \ln(\eta_3^2),$$

тогда $\delta_{lower}^{DT} > 0$, т.е. трейдеры с менее чем средними начальными позициями не участвуют в замедленной торговле

Доказательство: см. Приложение.

Из этого предложения следует, что при определенных условиях на параметры модели трейдеры с менее чем средними начальными позициями не участвуют в замед-

ленной торговле, и для любых параметров модели достаточно большие трейдеры участвуют в замедленной торговле.

Соединяя результаты выше вместе, мы формулируем следующую теорему, описывающую классификацию торговых стратегий.

Теорема: *существуют такие $-1 < \hat{\delta} < 0$ и $\delta^{DT} > 0$, что:*

- 1) трейдеры, у которых относительная начальная позиция меньше чем $\hat{\delta}$, являются агрессивными, с большей – пассивными;
- 2) стратегии трейдеров с относительной начальной позицией большей чем δ^{DT} , обладают свойством замедленной торговли;
- 3) при условии (45) трейдеры с относительной позицией $\delta_k < 0$ не участвуют в замедленной торговле.

4.2.4. Равновесие Нэша: обсуждение

Для того чтобы адекватно связать классификацию торговых стратегий с экономической интуицией, мы должны помнить, что интенсивность и направление торговли могут меняться по трем разным причинам.

Во-первых, трейдеры с большими начальными позициями будут торговать с интенсивностью, которая больше средней, просто потому, что им необходимо реализовать больший объем в течение торгового периода T . Заметим, что это происходит по «механической» причине и, в принципе, не имеет отношения к стратегическому взаимодействию. Во-вторых, трейдер с большей мерой несклонности к риску будет торговать быстрее. Именно это происходит в модели АС, в которой торговые стратегии имеют выпуклую форму благодаря несклонности трейдеров к риску. Действительно, риск будет минимальным, если позиции закрываются мгновенно. Как обсуждалось в работе АС, такие «предельные» стратегии не могут быть оптимальными вследствие существования временного влияния сделок на цену. В-третьих, поскольку мы анализируем динамическое равновесие, интенсивность торговли может быть разной вследствие стратегического взаимодействия трейдеров, которое может влиять и на интенсивность, и на направление торговли. В результате стратегии трейдеров могут быть агрессивными, а некоторые трейдеры могут задерживать свой поток заявок как средство защиты от агрессивных трейдеров.

Стратегии фронт-раннинга включают в себя разворот позиции, когда позиция трейдера меняет знак в течение торгового периода (становится отрицательной в рассматриваемом случае). Типичный пример показан на рис. 2а. Это происходит потому, что трейдер ожидает значительный объем заявок на продажу, который перманентно снизит цену, и старается опередить этот поток, продавая быстрее и даже доводя свою позицию до отрицательной, чтобы потом выкупить ее по сниженной цене. Как показывают симуляции, фронт-раннинг становится более явно выраженным при более высоких уровнях несклонности к риску и когда перманентное влияние сделок на цену превалирует над временным. Оказывается, что в течение некоторого периода времени поток заявок фронт-раннера направлен в сторону, противоположную агрегированному потоку, т.е. фронт-раннер становится поставщиком ликвидности.

Однако последовательность событий может быть другой, и именно это мы видим в случае контрариан-стратегий. В этом случае трейдер начинает торговать в направлении, противоположном агрегированному потоку заявок, таким образом увеличивая свою начальную позицию, и в определенный момент времени начинает ее продавать, чтобы обнулить к моменту времени T . Такой торговый профиль проявляется при больших значениях несклонности к риску и когда временное влияние потока заявок на цену превалирует над перманентным. Это происходит потому, что трейдер ожидает, что интенсивность агрегированного потока заявок будет высокой в течение некоторого периода времени по причине высокой несклонности к риску, таким образом создавая значительное временное влияние на цену и меньшее перманентное влияние. По мере того, как интенсивность потока заявок замедляется, временное влияние исчезает, и цена частично возвращается к начальным уровням, позволяя контрариан-трейдеру заработать прибыль на этом изменении цены. Контрариан-поведение может рассматриваться как другой тип фронт-раннинга, который основывается на временном влиянии потока заявок на цену, в то время как стандартный фронт-раннинг основан на перманентном влиянии. Рисунок 2г иллюстрирует эту ситуацию.

Другим важным свойством торговых траекторий является тот факт, что могут существовать значительные интервалы времени с достаточно низкой интенсивностью торговли, и затем торговля ускоряется к концу торгового периода $t = T$. Поскольку в случае положительных начальных позиций торговые траектории пассивных трейдеров являются выпуклыми в окрестности нуля, такое торговое поведение приводит к возникновению точек перегиба у торговых траекторий. Это свойство ярко выражено при малых значениях меры несклонности к риску и достаточно большом торговом горизонте T , как показано на рис. 2б.

Интуитивно такое торговое поведение является рациональным, поскольку перенос большей части торговых заявок ближе к концу торгового периода уменьшает возможности для других агрессивных трейдеров. Этот эффект может быть уменьшен высоким уровнем несклонности к риску, который заставляет трейдеров закрывать их позиции быстрее и торговать более интенсивно. Несклонность к риску доминирует в начале торгового периода, но ближе к концу торгового горизонта доминирует мотив «осторожности». Это продемонстрировано на рис. 2б.

На рис. 2а, 2б, 2в, 2г мы анализируем равновесные стратегии, определяемые в (36), (25) и (30) для случая трех трейдеров, $N = 3$. На рис. 2в мы сравниваем равновесные стратегии идентичных трейдеров со стандартными стратегиями АС (15). В этом случае второй член в правой части (36) равен нулю и равновесная стратегия определяется агрегированной позицией. Но даже в этом случае равновесные стратегии отличаются от стратегий АС. Причина этому лежит в нашем обсуждении оптимальных реакций на стратегии АС. Если какой-либо трейдер отклоняется от равновесной стратегии, он создает стимул другим трейдерам действовать агрессивно. На рис. 2г показан случай, в котором один из трейдеров является контрариан-трейдером.

5. Заключение

Мы рассматриваем стратегии оптимального исполнения, когда несколько трейдеров одновременно вовлечены в процесс исполнения в одном и том же торговом активе.

Для этого случая мы предлагаем новые торговые стратегии, которые являются непосредственным расширением mean-variance подхода [Grinold, Kahn, 1995; Almgren, Chriss, 1999]. Однако, как мы показали выше, эти стратегии могут сильно отличаться от стандартных стратегий [Grinold, Kahn, 1995; Almgren, Chriss, 1999]. Это происходит по причине стратегического взаимодействия между трейдерами – каждый трейдер учитывает влияние сделок других трейдеров на цену актива. Мы находим и анализируем динамическое равновесие Нэша, когда трейдеры имеют гетерогенные целевые позиции, являются несклонными к риску и минимизируют mean-variance функционал издержек. Результирующие стратегии описывают разные типы агрессивного и пассивного торгового поведения. В частности, мы показываем, что трейдеры с целевой позицией, меньшей среднего, могут быть вовлечены в агрессивную торговлю, в то время как трейдеры с большими позициями могут защищаться от агрессивных посредством замедленной торговли.

Приложения

Предложение 1.

Равновесные стратегии (36) могут быть записаны в виде

$$(46) \quad y_k(t) = \bar{Q}(\phi(t) + \delta_k \psi(t)),$$

где

$$(47) \quad \phi(t) = \frac{\exp(\eta_1 T) \exp(\eta_2 t) - \exp(\eta_2 T) \exp(\eta_1 t)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)},$$

$$(48) \quad \psi(t) = \frac{\exp(\eta_3 T) \exp(\eta_4 t) - \exp(\eta_4 T) \exp(\eta_3 t)}{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T)}.$$

Теперь необходимо проверить, имеет ли стратегия (46) локальный экстремум на горизонте $t \in (0; T)$. Условие первого порядка:

$$(49) \quad 0 = \dot{y}_k(t) = \bar{Q} \left[\frac{\eta_2 \exp(\eta_1 T) \exp(\eta_2 t) - \eta_1 \exp(\eta_2 T) \exp(\eta_1 t)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)} + \right. \\ \left. + \delta_k \frac{\eta_4 \exp(\eta_3 T) \exp(\eta_4 t) - \eta_3 \exp(\eta_4 T) \exp(\eta_3 t)}{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T)} \right] = \bar{Q} [\dot{\phi}(t) + \delta_k \dot{\psi}(t)].$$

Стратегия трейдера является агрессивной, если (49) имеет решение на открытом интервале $(0, T)$, что невозможно при $\delta_k > 0$, поскольку $\eta_{1,3} > 0$, и $\eta_{2,4} < 0$, и поэтому $\dot{\phi}(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ отрицательны для любого t в $(0, T)$. Это доказывает Предложение 1.

Предложение 2.

Заметим, что торговые траектории всюду непрерывны и дифференцируемы по времени, и если $y_k(0) = 0$, или, другими словами, $\delta_k = -1$, то, поскольку $y_k(0) = y_k(T) = 0$, из теоремы Ролля следует, что функция $y_k(t)$ имеет локальный экстремум на открытом интервале $(0, T)$. Рассмотрим стратегию k -го трейдера как функцию t и δ_k , т.е. $y_k(t, \delta_k)$. Отметим, что $y_k(t, \delta_k)$ дифференцируема и монотонно возрастает по δ_k для t в $[0, T)$.

Обозначим множество значений функции $\frac{\partial y_k(t, \delta_k)}{\partial t}$ для t в $[0, T]$ как $D(\delta_k)$. Из теоремы Вейерштрасса следует, что это множество значений является закрытым интервалом, обозначим его как $[d_1(\delta_k), d_2(\delta_k)]$. Поскольку $\frac{\partial y_k(t, \delta_k)}{\partial t}$ является непрерывной функцией времени t , то $d_1(\delta_k)$ и $d_2(\delta_k)$, являясь минимальным и максимальным значениями функции $\frac{\partial y_k(t, \delta_k)}{\partial t}$ на $t \in [0, T]$, также непрерывны по δ_k . Для любого t в $[0, T]$ из теоремы Ролля следует, что $y_k(t, -1)$ имеет локальный экстремум на $(0, T)$, т.е. $0 \in D(-1)$, или, другими словами, $d_1(-1) < 0 < d_2(-1)$. Заметим, что $\frac{\partial y_k(t, \delta_k)}{\partial t}$ является монотонно убывающей по δ_k для любого t в $[0, T)$. Это так, поскольку

$$(50) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 y_k(t, \delta_k)}{\partial \delta_k \partial t} &= \bar{Q}(\eta_3 b_3 \exp(\eta_3 t) + \eta_4 b_4 \exp(\eta_4 t)) = \\ &= \bar{Q} \frac{(\eta_4 \exp(\eta_3 T) \exp(\eta_4 t) - \eta_3 \exp(\eta_4 T) \exp(\eta_3 t))}{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T)} < 0, \end{aligned}$$

где $\eta_4 < 0$, $\eta_3 > 0$. Отсюда следует, что $d_1(\delta_k), d_2(\delta_k)$ также монотонно убывают по δ_k . Наконец, это означает, что существуют такие $\delta_k^1 < \delta_k^2$, что $d_1(\delta_k^2) = 0$ и $d_2(\delta_k^1) = 0$, или, другими словами, $0 \in D(\delta_k)$ только для $\delta_k \in [\delta_k^1, \delta_k^2]$, где $\delta_k^2 < 0$ как следствие

Предложения 1 и монотонного убывания функции $\frac{\partial y_k(t, \delta_k)}{\partial t}$. Поскольку мы рассматриваем случай положительных начальных позиций, то $\delta_k^1 = -1$. Обозначим δ_k^2 как $\hat{\delta}$.

Чтобы найти верхнюю грань для $\hat{\delta}$, мы делаем следующие алгебраические манипуляции. Мы находим неточную нижнюю грань для абсолютного значения $\hat{\delta}_k$, которая совпадает с неточной верхней гранью для $\hat{\delta}_k$ (поскольку $\hat{\delta}_k$ отрицательна). Из (49) и (48) следует, что существует такое t^* в $[0, T]$, что

$$\begin{aligned}
\hat{\delta} &= -\frac{\eta_1^+ \exp[\eta_1^+ t^*] \frac{\sinh[\eta_1^-(T-t^*)]}{\sinh[\eta_1^- T]} - \eta_1^- \exp[\eta_1^+ t^*] \frac{\cosh[\eta_1^-(T-t^*)]}{\sinh[\eta_1^- T]}}{\eta_2^+ \exp[\eta_2^+ t^*] \frac{\sinh[\eta_2^-(T-t^*)]}{\sinh[\eta_2^- T]} - \eta_2^- \exp[\eta_2^+ t^*] \frac{\cosh[\eta_2^-(T-t^*)]}{\sinh[\eta_2^- T]}} = \\
&= -\exp\left[-\frac{\lambda}{\mu} \frac{N}{N+1} t^*\right] \left[\frac{\sinh(\hat{\gamma}_1 T)}{\sinh(\hat{\gamma}_2 T)} \right] \times \\
&\times \left[\frac{\frac{\lambda(N-1)}{2\mu^2(N+1)} \sinh[\hat{\gamma}_2(T-t^*)] - \hat{\gamma}_2 \cosh[\sqrt{\hat{\gamma}_2}(T-t^*)]}{\frac{\lambda}{2\mu} \sinh[\hat{\gamma}_1(T-t^*)] - \hat{\gamma}_2 \cosh[\hat{\gamma}_2(T-t^*)]} \right] \leq \\
(51) \quad &\leq -\exp\left[-\frac{\lambda}{\mu} \frac{N}{N+1} T\right] \left[\frac{\sinh(\hat{\gamma}_1 T)}{\sinh(\hat{\gamma}_2 T)} \right] \times \\
&\times \frac{\max\left[\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)} \sinh[\hat{\gamma}_2(T-t^*)] - \hat{\gamma}_2 \cosh[\hat{\gamma}_2(T-t^*)]\right]}{\min\left[\frac{\lambda}{2\mu} \sinh[\hat{\gamma}_1(T-t^*)] - \hat{\gamma}_2 \cosh[\hat{\gamma}_2(T-t^*)]\right]} = \\
&= \exp\left[-\frac{\lambda}{\mu} \frac{N}{N+1} T\right] \left[\frac{\sinh(\hat{\gamma}_1 T)}{\sinh(\hat{\gamma}_2 T)} \right] \times \left[\frac{\hat{\gamma}_2}{\frac{\lambda}{2\mu} \sinh[\hat{\gamma}_1 T] - \hat{\gamma}_2 \cosh[\hat{\gamma}_2 T]} \right] = \\
&= \frac{\exp\left[-\frac{\lambda}{\mu} \frac{N}{N+1} T\right]}{\sinh(\hat{\gamma}_2 T)} \times \left[\frac{\hat{\gamma}_2}{\frac{\lambda}{2\mu} - \hat{\gamma}_2 \coth[\hat{\gamma}_2 T]} \right] = \hat{\delta}_2 < 0,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
(52) \quad \eta_1^+ &= \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}\right), \eta_2^+ = \left(\frac{\eta_3 + \eta_4}{2}\right), \\
\eta_1^- &= \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}\right), \eta_2^- = \left(\frac{\eta_3 - \eta_4}{2}\right), \\
\hat{\gamma}_1 &= \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2}, \\
\hat{\gamma}_2 &= \sqrt{\frac{\lambda^2(N-1)^2}{4\mu^2(N+1)^2} + \frac{2\gamma^2}{N+1}}.
\end{aligned}$$

Неравенство выполняется, поскольку $\hat{\gamma}_2 > \frac{\lambda}{2\mu}$ и $\coth(x) > 1$ для любого x .

Заметим, что и числитель, и знаменатель выражения в правых скобках на третьей строке отрицательны и убывают по t . Поэтому максимальное значение числителя достигается при $t = T$ и минимальное значение знаменателя достигается при $t = 0$.

Q.E.D.

Предложение 3.

Из нашего определения контрариан-стратегий следует

$$(53) \quad \dot{y}_k(0) = \bar{Q}(\dot{\phi}(0) + \delta_k \psi(0)) > 0.$$

Добавляя ограничение на положительную начальную позицию, получаем

$$(54) \quad -1 < \delta_k < -\frac{\dot{\phi}(0)}{\psi(0)},$$

поскольку $\psi(0) < 0$ для любых модельных параметров ($\eta_3 > 0$, $\eta_4 < 0$). Переписывая явно $\psi(0)$ и $\dot{\phi}(0)$, мы получаем

$$-1 < \delta_k < -\frac{\left(-\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)} - \sqrt{\left(\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)}\right)^2 + \frac{2\gamma^2}{N+1}} \coth \left[\sqrt{\left(\frac{\lambda(N-1)}{2\mu(N+1)}\right)^2 + \frac{2\gamma^2}{N+1}} T \right] \right)}{\frac{\lambda}{2\mu} - \sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2} \coth \left[\sqrt{\frac{\lambda^2}{4\mu^2} + 2\gamma^2} T \right]}.$$

Q.E.D.

Предложение 4.

Вторая производная позиции $y_k(t)$ по t

$$(55) \quad \ddot{y}_k(t) = \bar{Q}[\ddot{\phi}(t) + \delta_k \ddot{\psi}(t)],$$

где

$$(56) \quad \begin{aligned} \ddot{\phi}(t) &= \frac{\eta_2^2 \exp(\eta_2 t) \exp(\eta_1 T) - \eta_1^2 \exp(\eta_1 t) \exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)}, \\ \ddot{\psi}(t) &= \frac{\eta_4^2 \exp(\eta_4 t) \exp(\eta_3 T) - \eta_3^2 \exp(\eta_3 t) \exp(\eta_4 T)}{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $\delta_k = 0$. Обозначим соответствующую стратегию $y_{1k}(t)$. Заметим, что $\ddot{y}_{1k}(t) = 0$ не имеет решения на $[0, T]$. Действительно,

$$(57) \quad \ddot{y}_{1k}(t) = \bar{Q} \frac{\eta_2^2 \exp(\eta_2 t) \exp(\eta_1 T) - \eta_1^2 \exp(\eta_1 t) \exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T)}$$

монотонно убывает на $[0, T]$, поскольку $\eta_2 < 0$ и $\eta_1 > 0$ из (27) и положительна на обоих концах закрытого интервала

$$(58) \quad \ddot{y}_{1k}(T) > 0,$$

поскольку $|\eta_2| > |\eta_1|$, что следует из (27) и

$$(59) \quad \begin{aligned} \eta_2^2 \exp(\eta_1 T) - \eta_1^2 \exp(\eta_2 T) &> 0, \\ \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} \exp[(\eta_1 - \eta_2)T] &> 1, \end{aligned}$$

что выполняется, поскольку $|\eta_2| > |\eta_1|$ и $\eta_2 < \eta_1$.

Теперь рассмотрим вторую часть решения. Назовем ее $y_{2k}(t)$:

$$(60) \quad y_{2k}(t) = \bar{Q} \delta_k \psi(t),$$

Вторая производная $y_{2k}(t)$ по времени

$$(61) \quad \ddot{y}_{2k}(t) = \bar{Q} \delta_k \ddot{\psi}(t),$$

где $\ddot{\psi}(t)$ определена в (56). Как и в предыдущем случае, $\ddot{\psi}(t)$ монотонно убывает по t .

Рассмотрим случай $\delta_k < 0$. Тогда знак $\ddot{y}_{2k}(t)$ определяется знаком выражения

$$\eta_4^2 \exp(\eta_4 t) \exp(\eta_3 T) - \eta_3^2 \exp(\eta_3 t) \exp(\eta_4 T).$$

Однако теперь, в отличие от первой части решения, $|\eta_3| > |\eta_4|$, так что выражение $\eta_4^2 \exp(\eta_4 t) \exp(\eta_3 T) - \eta_3^2 \exp(\eta_3 t) \exp(\eta_4 T)$ принимает отрицательные значения

$$(62) \quad \ddot{y}_{2k}(T) = \bar{Q} \delta_k \left(\frac{(\eta_4^2 - \eta_3^2) \exp(\eta_3 T) \exp(\eta_4 T)}{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T)} \right) < 0.$$

Аналогично доказательству Предложения 2, мы можем найти неточные нижнюю и верхнюю грани для $\hat{\delta}^{DT}$. Действительно, чтобы торговая траектория имела точку перегиба, необходимо

$$(63) \quad -\frac{\ddot{\phi}(t^*)}{\ddot{\psi}(t^*)} = \delta_k.$$

Нижняя и верхняя грани для $\hat{\delta}^{DT}$:

$$(64) \quad \hat{\delta}_1^{DT} = -\frac{\min_{t \in [0, T]} \ddot{\phi}(t)}{\min_{t \in [0, T]} \ddot{\psi}(t)} = \frac{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T) (\eta_2^2 - \eta_1^2) \exp(\eta_1 T) \exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T) (\eta_3^2 - \eta_4^2) \exp(\eta_3 T) \exp(\eta_4 T)},$$

$$(65) \quad \hat{\delta}_2^{DT} = -\frac{\max_{t \in [0, T]} \ddot{\phi}(t)}{\max_{t \in [0, T]} \ddot{\psi}(t)} = \frac{\exp(\eta_3 T) - \exp(\eta_4 T) \eta_2^2 \exp(\eta_1 T) - \eta_1^2 \exp(\eta_2 T)}{\exp(\eta_1 T) - \exp(\eta_2 T) \eta_3^2 \exp(\eta_4 T) - \eta_4^2 \exp(\eta_3 T)} > \hat{\delta}_1^{DT}.$$

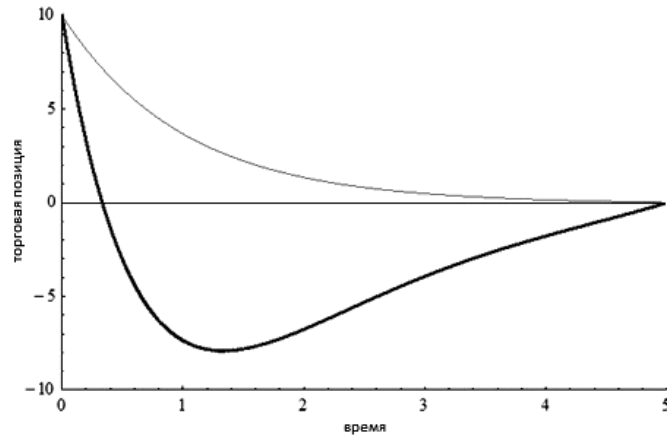
Мы видим, что верхняя грань всегда положительна, как следует из (62) и (59). Это завершает доказательство первой части Предложения 4.

Чтобы доказать вторую часть Предложения 4, мы замечаем, что $\ddot{y}_{2k}(0)$ также может быть неположительным, поскольку следующие неравенства эквивалентны

$$(66) \quad \begin{aligned} \eta_4^2 \exp(\eta_3 T) - \eta_3^2 \exp(\eta_4 T) &\geq 0, \\ \frac{\eta_4^2}{\eta_3^2} &\geq \exp[(\eta_4 - \eta_3)T], \\ \eta_4 T - \ln(\eta_4^2) &\leq \eta_3 T - \ln(\eta_3^2). \end{aligned}$$

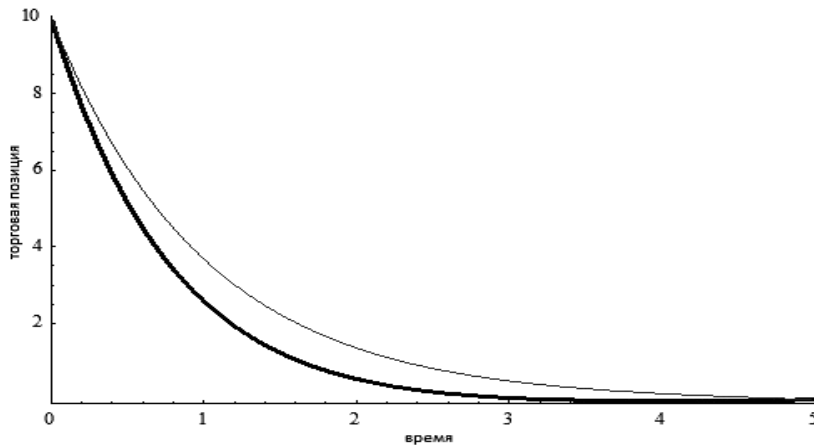
Последнее неравенство может не выполняться для некоторых значений η_4, η_3 и T , которые допускаются моделью. Это будет означать, что $\ddot{y}_{2k}(t)$ отрицательна для всех t в $[0, T]$. В этом случае условие $\delta_k < 0$ является достаточным для того, чтобы траектория трейдера не обладала свойством замедленной торговли.

Q.E.D.



а) Случай двух трейдеров: стратегия АС первого трейдера и оптимальная реакция второго трейдера. Позиции как функции времени. Оба трейдера имеют положительную начальную позицию. Тонкая линия – решение АС. Толстая линия – оптимальная реакция второго трейдера. Параметры:

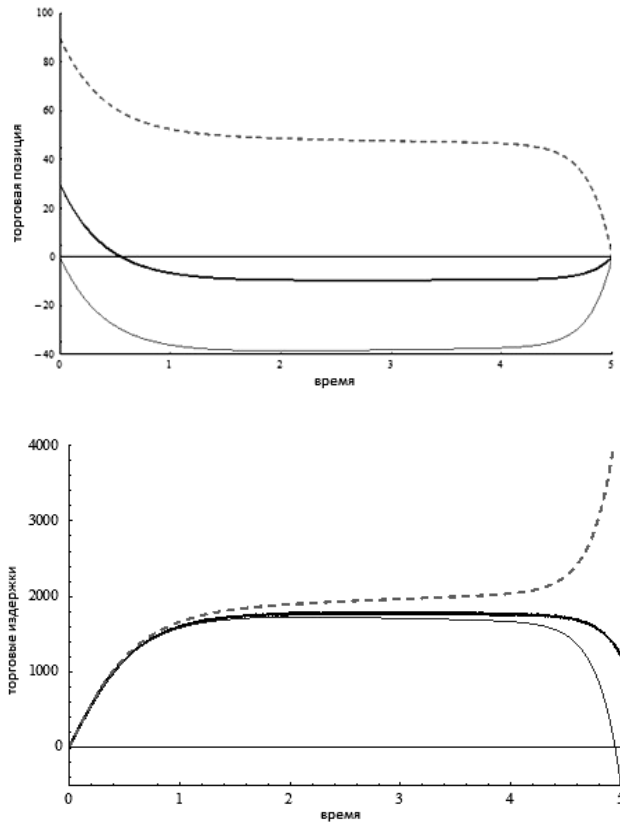
$$Q_1 = 10, Q_2 = 10, \lambda = 0,5, \mu = 0,1, \gamma = \sqrt{\frac{\lambda \sigma^2}{\mu}} = 1, T = 5.$$



б) Стратегия АС и оптимальная реакция на нее, когда «реагирующий» трейдер имеет большую позицию. Параметры: $Q_1 = 10, Q_2 = 3, \lambda = 0,5, \mu = 0,1, \gamma = 1, T = 5$.

Толстая линия – оптимальная стратегия первого трейдера в присутствии второго трейдера, который следует АС стратегии. Тонкая линия – АС стратегия первого трейдера, если он торгует в одиночку. Если позиция стратегического трейдера существенно больше позиции трейдера, следующего АС стратегиям, то стратегия стратегического трейдера достаточно сильно похожа на стратегию АС.

Рис. 1. Оптимальная реакция на стратегии АС

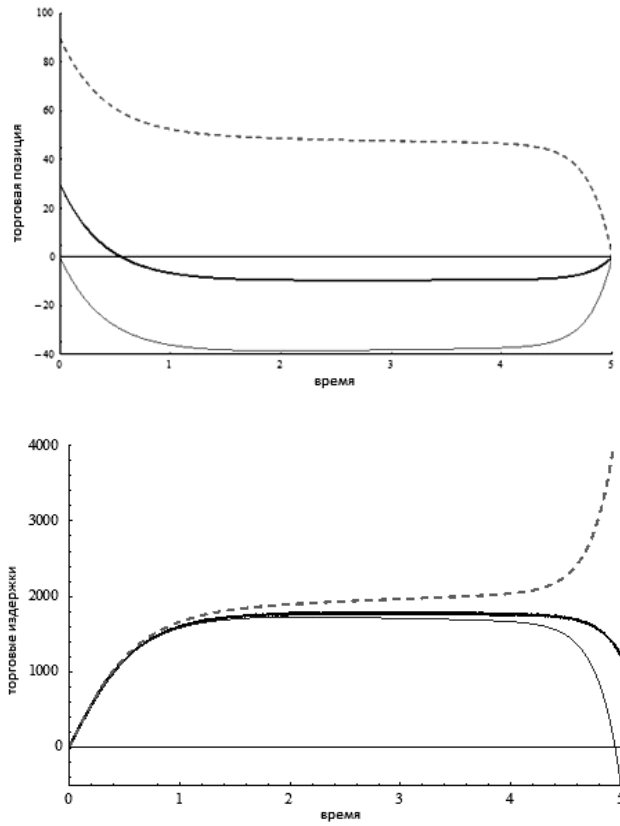


а)

Верхняя часть. Равновесные стратегии для случая трех трейдеров, все из которых имеют положительные начальные позиции. Параметры: $Q_1 = 30$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 90$, $\lambda = 0,5$, $\mu = 0,1$, $\gamma = 1$, $T = 5$.

Толстая линия – первый трейдер, тонкая – второй, пунктирная – третий. Стратегии первого и второго трейдеров являются агрессивными и соответствуют фронт-раннингу в нашей классификации. Все три трейдера «задерживают» свой поток заявок.

Нижняя часть. Функционалы издержек как функции времени. Второй трейдер имеет отрицательные издержки в момент T , что можно интерпретировать как прибыль, полученную вследствие фронт-раннинга.



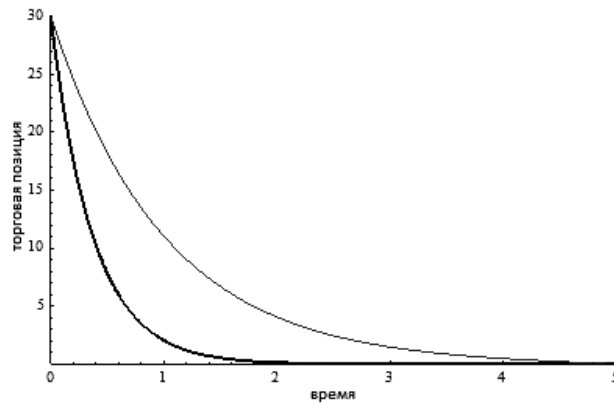
б)

Верхняя часть. Равновесные стратегии в случае трех трейдеров.

Параметры: $Q_1 = 30$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 90$, $\lambda = 0,5$, $\mu = 0,1$, $\gamma = 0,2$, $T = 5$.

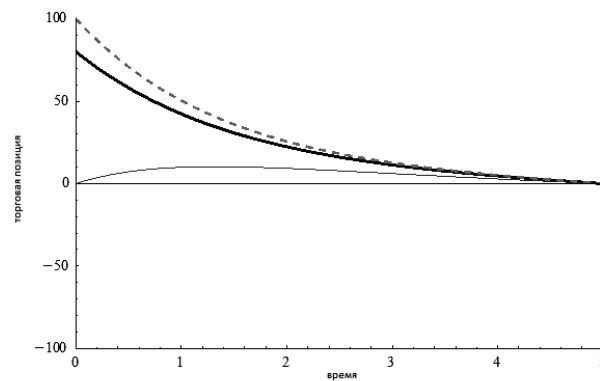
Трейдеры 1 и 2 являются фронт-раннерами. Свойство замедленной торговли ярко выражено для всех трех трейдеров.

Нижняя часть. Функционалы издержек для трейдеров. Снова второй трейдер имеет положительную прибыль к моменту T .



в)

Равновесная стратегия в случае трех идентичных трейдеров в сравнении со стратегией АС, все трейдеры являются продавцами. Толстая линия – равновесная стратегия, тонкая – стратегия АС, позиции как функции времени. Можно заметить, что в равновесном случае интенсивность торговли больше (в абсолютном значении), поскольку трейдеры действуют стратегически и принимают во внимание воздействие сделок других трейдеров на цену. Параметры: $Q_1 = 30, Q_2 = 30, Q_3 = 30, \lambda = 0,1, \mu = 0,05, \gamma = 0,7, T = 5$.



г)

Равновесные стратегии в случае трех трейдеров.

Параметры: $Q_1 = 80, Q_2 = 0, Q_3 = 100, \lambda = 0,1, \mu = 0,5, \sigma = 0,5, a = 10, T = 5$.

Трейдер с нулевой начальной позицией покупает актив в окрестности нулевого момента времени и, таким образом, демонстрируя контрариан-поведение. Это происходит по причине высокого временного и небольшого постоянного влияния сделок на цену.

Рис. 2 (а, б, в, г). Равновесные стратегии

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Almgren R., Chriss N.* Optimal Execution of Portfolio Transactions // Journal of Risk. 2001. Vol. 3. P. 5–40.
- Almgren R., Chriss N.* Value under Liquidation // Risk. 1999. Vol. 12. № 12. P. 61–63.
- Almgren R., Lorenz J.* Adaptive Arrival Price // Trading. 2007. № 1. P. 59–66.
- Bertsimas D., Lo A.W.* Optimal Control of Execution Costs // Journal of Financial Markets. 1998. Vol. 1. № 1. P. 1–50.
- Brunnermeier M.K., Pedersen L.H.* Predatory Trading // The Journal of Finance. 2005. Vol. 60. № 4. P. 1825–1863.
- Grinold R.C., Kahn R.N.* Active Portfolio Management: Quantitative Theory and Applications. Irwin Professional Publishing, 1995.
- Kissell R., Glantz M., Malamut R.* Optimal Trading Strategies: Quantitative Approaches for Managing Market Impact and Trading Risk. Public Affairs, 2003.
- Kissell R., Malamut R.* Algorithmic Decision-making Framework // The Journal of Trading. 2006. Vol. 1. № 1. P. 12–21.
- Markowitz H.* Portfolio Selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7. № 1. P. 77–91.

Optimal Execution for Multiple Strategic Traders

Boulatov Alexei¹, Larionov Ivan²

¹ National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka Street, Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: icef@hse.ru

² National Research University Higher School of Economics,
26, Shabolovka Street, Moscow, 119049, Russian Federation.
E-mail: larionov.ivan.w@gmail.com

We analyze optimal execution strategies when multiple traders are simultaneously involved in optimal execution. In this case, we obtain new trading strategies that follow from a direct extension of the mean variance approach of Grinold and Kahn, and Almgren and Chriss. However, as we show below, the proposed strategies can be quite different from the standard ones obtained in Grinold and Kahn, and Almgren and Chriss. This is because each trader (assumed to be rational) is trying to minimize her trading cost or ‘implementation shortfall’ and therefore takes into account the price impacts caused by herself and all other traders. We also obtain a close form characterization for the dynamic Nash equilibrium in terms of the system of second-order ODEs, which can be solved explicitly. The resulting equilibrium strategies describe

different types of predatory and defensive behavior, though aggregate order flow profile have some properties of standard Almgren, Chriss strategies, e.g. is monotoneous and convex. We show that the traders with smaller holdings are involved in predatory strategies, while traders with larger holdings tend to defend themselves against potential predators by following the delayed trading strategies. We also show that depending on liquidity and volatility parameters, predatory traders may be frontrunners or contrarian traders.

Key words: optimal liquidation; optimal execution strategies; differential games.

JEL Classification: G11, G12, C73.

* *
*

References

- Almgren R., Chriss N. (2001) Optimal Execution of Portfolio Transactions. *Journal of Risk*, 3, pp. 5–40.
- Almgren R., Chriss N. (1999) Value under Liquidation. *Risk*, 12, 12, pp. 61–63.
- Almgren R., Lorenz J. (2007) Adaptive Arrival Price. *Trading*, 1, pp. 59–66.
- Bertsimas D., Lo A.W. (1998) Optimal Control of Execution Costs. *Journal of Financial Markets*, 1, 1, pp. 1–50.
- Brunnermeier M.K., Pedersen L.H. (2005) Predatory Trading. *The Journal of Finance*, 60, 4, pp. 1825–1863.
- Grinold R.C., Kahn R.N. (1995) *Active Portfolio Management: Quantitative Theory and Applications*. Irwin Professional Publishing.
- Kissell R., Glantz M., Malamut R. (2003) *Optimal Trading Strategies: Quantitative Approaches for Managing Market Impact and Trading Risk*. Public Affairs.
- Kissell R., Malamut R. (2006) Algorithmic Decision-making Framework. *The Journal of Trading*, 1, 1, pp. 12–21.
- Markowitz H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7, 1, pp. 77–91.