

Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22. № 2. С. 251–274.  
*HSE Economic Journal*, 2018, vol. 22, no 2, pp. 251–274.

## Обобщенная многопродуктовая декомпозиция элементов использования ВВП России<sup>1</sup>

**Пильник Н.П., Радионов С.А., Станкевич И.П.**

В статье предлагается новый метод декомпозиции ВВП и его элементов, основанный на идее о том, что каждый компонент может быть представлен как некоторая комбинация небольшого количества агрегатов. Предложенный метод обладает рядом важных теоретических свойств, обеспечивающих корректность его применения, и с высокой точностью воспроизводит статистику. Приводится теоретическое обоснование процедуры, подробно рассматривается декомпозиция на три продукта. Рассматривается разложение как величин в текущих ценах, так и величин в постоянных ценах.

Предложенная декомпозиция обладает целым рядом преимуществ по сравнению с предложенными ранее. Во-первых, она не предполагает привязку модельных продуктов к наблюдаемым в статистике величинам. Во-вторых, разложение проводится на большее число ненаблюдаемых продуктов, при этом полученные в результате разложения продукты и их цены могут быть разумным образом проинтерпретированы. Наконец, важным отличием от предыдущих процедур является нелинейность разложения продукта в постоянных ценах.

Помимо этого, в работе предлагается метод гармонизации статистики по ВВП и его элементам, который необходим для корректной работы с этими рядами после двух недавних изменений в методологии подсчета этих показателей Росстатом.

---

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00432).

**Пильник Николай Петрович** – к.э.н., доцент Департамента прикладной экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», с.н.с. ФИЦ ИУ РАН; с.н.с. НИФИ, Центр перспективного финансового планирования, макроэкономического анализа и статистики финансов. E-mail: npilnik@hse.ru.

**Радионов Станислав Андреевич** – к.э.н., н.с. Научно-учебной лаборатории макроструктурного моделирования экономики России Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; н.с. ФИЦ ИУ РАН.; н.с. НИФИ, Центр перспективного финансового планирования, макроэкономического анализа и статистики финансов. E-mail: saradionov@edu.hse.ru

**Станкевич Иван Павлович** – магистр экономики, преподаватель Департамента прикладной экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», стажер-исследователь НУЛ макроструктурного моделирования экономики России НИУ ВШЭ, м.н.с. отдела теоретической физики ФИАН им. П.Н. Лебедева РАН. E-mail: vpvstankevich@yandex.ru

Статья поступила: 09.05.2017/Статья принята: 23.05.2018.

**Ключевые слова:** экономика России; элементы ВВП по использованию; декомпозиция; иерархическая полезность; потребление; инвестиции.

**DOI:** 10.17323/1813-8691-2018-22-2-251-274

## 1. Введение

Данная статья посвящена исследованию вопроса о модельном описании декомпозиции ВВП на отдельные компоненты. Необходимость такой декомпозиции возникает при построении моделей, способных воспроизводить нетривиальную динамику различных секторов экономики (см., например: [Andreyev et al., 2014]). Заметим, что, например, в рамках моделей DSGE такая динамика очень часто игнорируется, все финансовые величины записываются в постоянных ценах (см., например: [Smets, Wouters, 2007; Gali et al., 2007; Christiano et al., 2011]). Для реализации этой декомпозиции требуются либо использование межотраслевой статистики, либо некоторые априорные соображения о принципах разложения компонентов ВВП на отдельные продукты. Первый подход упирается на доступность и качество современной статистики, поэтому мы используем второй подход.

Ключевая идея, на которой основан предлагаемый метод декомпозиции, состоит во введении в модель небольшого числа продуктов (обычно двух или трех), которые в различных пропорциях составляют наблюдаемые компоненты ВВП (например, потребление, инвестиции или экспорт). Эти продукты характеризуются различными ценами, соответственно порождая нетривиальную динамику цен компонентов ВВП (дефляторов). Такой подход весьма удобен, поскольку позволяет свести все разнообразие цен в рамках модели всего к нескольким индикаторам.

В более ранних работах [Вржещ и др., 2010; Andreyev et al., 2014] также использовалось априорное предположение о том, что один из продуктов совпадает с экспортом, другой – с импортом. Это позволяет упростить как расчеты, так и трактовку результатов, но вводит серьезные ограничения на возможности самой процедуры. В частности, она устроена так, что все дефляторы должны принимать значения между ценами модельных продуктов, а это означает, что наблюдаемый дефлятор, к которому привязывается один из продуктов, должен быть либо наибольшим, либо наименьшим из всех на протяжении всего периода наблюдения. На статистических данных, однако, это условие часто нарушается, что автоматически приводит к использованию в моделях экономики заведомо невыполняемых соотношений. Обычно эта проблема решается либо за счет отбрасывания части противоречащих друг другу условий, либо за счет игнорирования дополнительной погрешности, которая возникает в модели, если все-таки каким-то образом ее удалось после этого посчитать.

Более того, указанное условие может нарушиться при смене базового года, сама идея которого приводит к необходимости отличать дефляторы от привычных в экономической теории цен. Отсюда возникает необходимость в разработке методики декомпозиции, не требующей привязки к импорту или экспорту. Такая методика была предложена в работе [Пильник, Станкевич, 2014]. К сожалению, в указанной работе разложение, во-первых, принципиально ограничивалось случаем двух продуктов, во-вторых, полученные на этапе калибровки продукты не имели никакой разумной трактовки. Дефлятор

одного из них рос очень быстро, второго – медленно, что позволяло в каком-то смысле называть их «быстрым» и «медленным» продуктами, но эти условные названия не раскрывали суть стоящих за ними экономических процессов.

Наконец, еще одной трудностью, вставшей перед различными схемами декомпозиции элементов ВВП России в последние годы, стала особенность российской статистики, связанная с отсутствием хоть сколько-нибудь длинных и актуальных рядов этих показателей. Изменение территориального состава и переход к новой методологии СНС привели к тому, что в настоящий момент Росстат описывает динамику ВВП за последние десять лет четырьмя разными рядами данных. Без согласования этих рядов использовать и так несовершенную методику декомпозиции, изложенную в вышеприведенных работах, оказывается просто невозможно.

В настоящей работе представлен подход к методике декомпозиции элементов ВВП, в рамках которого удастся описать саму декомпозицию непротиворечивым (без заведомо невыполняемых соотношений) образом, решить проблему чувствительности процедуры к смене базового года и при этом обеспечить на порядок более высокую точность по сравнению с предыдущими работами. Приводятся результаты декомпозиции элементов использования ВВП России на предварительно гармонизированном наборе данных (с I квартала 2001 г. до III квартала 2017 г. включительно). Полученные результаты оказываются хорошо трактуемыми и позволяют сделать ряд качественных выводов об изменении структуры элементов использования ВВП России в течение кризиса 2014–2016 гг.

## **2. Подходы к описанию многопродуктовых экономик**

### **2.1. Стандартные способы описания**

В современной экономической литературе можно выделить два крупных направления, ключевую роль в которых играет многопродуктовая структура производства. Условно первую группу работ можно связать с парадигмой динамического стохастического общего равновесия (DSGE) моделирования экономики, вторую – с парадигмой вычислимого общего равновесия (CGE). Напомним, что одним из ключевых отличий этих подходов является то, что в рамках концепции DSGE модели, как правило, строятся начиная с микрооснований (в частности, отдельных фирм, выпуск которых затем с помощью нелинейной свертки агрегируется в выпуск какой-либо отрасли или экономики в целом), в то время как модели CGE обычно основываются на более крупных конгломератах, взаимодействующих друг с другом в духе таблиц «затраты–выпуск».

В подавляющем большинстве работ, посвященных моделям класса DSGE, производственный сектор описывается как состоящий из нескольких отраслей, однако обычно эти отрасли занимаются производством продуктов, имеющих совершенно разное назначение и принципы функционирования. Например, в модели вводятся фирмы-производители «промежуточного» продукта, выпуск которых затем преобразуется в «финальный» продукт соответственно фирмами-производителями «финального» продукта. Причем первая отрасль обычно моделируется как монополистически конкурентная, а вторая – как совершенно конкурентная. Иногда вводятся также фирмы-экспортеры и фирмы-импортеры, причем импортеры обычно считаются частью отрасли, производящей «промежуточные» продукты, а экспортеры – «финальные». Иногда модели также содержат от-

расль, производящую монопольным образом государственный продукт. Примером работы, которая содержит все вышеперечисленные механизмы, является [Mucka, Horvath, 2016]. Для моделей класса DSGE, содержащих несколько отраслей, имеющих одинаковую природу и различающихся только некоторыми параметрами, можно выделить исследования [Lee, 2010; Carvalho, Lee, 2011; Иващенко, 2016].

Вторая группа работ связана с так называемыми многоотраслевыми моделями роста. В рамках этих моделей производство в экономике описывается как состоящее из нескольких крупных отраслей, имеющих свою специфику (например, экзогенные темпы технического прогресса или эластичность замещения товаров в отрасли). В рамках таких моделей удобно исследовать структурные сдвиги в экономике, связанные, например, с перераспределением труда от сельскохозяйственной к индустриальной отрасли или с ростом доли новых наукоемких отраслей в ВВП. Наиболее ранние многоотраслевые модели роста представлены в статьях [Uzawa, 1961; Dhrymes, 1962]. В первой из этих работ рассматривается модель с двумя отраслями: одна производит инвестиционные продукты, вторая – потребительские. Вторая работа описывает конструкцию, близкую к моделям класса CGE. Из более современных исследований можно назвать [Echevarria, 1997; Kongsamut et al., 2001; Jensen 2011; Alonso-Carrera, Raurich, 2015] и др. В рамках этих моделей возможно получать нетривиальную динамику стилизованных отраслей в ВВП, которая возникает, например, в результате неоднородности функции полезности потребителя, или различных темпов технического прогресса, или других особенностей производственных функций в разных отраслях.

В данной работе мы предлагаем метод декомпозиции компонентов ВВП, никак не использующий отраслевую структуру экономики. Таким образом, наиболее близкой к предлагаемой нами методологии является использованная в исследовании [Mucka, Horvath, 2016] и в аналогичных работах. В рамках этих работ обычно предполагается, что компоненты ВВП представляют собой CES-свертки двух промежуточных агрегатов. Для определенности рассмотрим агрегат «конечное потребление домашних хозяйств»  $C_t$ . Предполагается, что он равен CES-свертке агрегированного продукта, произведенного внутри страны для конечного потребления  $C_t^X$ , и агрегированного продукта, импортированного для конечного потребления  $C_t^{Im}$  :

$$C_t = \left[ \alpha^{1-p} (C_t^X)^p + (1-\alpha)^{1-p} (C_t^{Im})^p \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Аналогичные разложения предполагаются для инвестиционного и экспортного продукта (в работе [Mucka, Horvath, 2016] предполагается, что конечное государственное потребление состоит только из продукта, производимого внутри страны). Мы считаем, что хотя такой подход представляется вполне естественным и интуитивно понятным, он не может быть математически непротиворечивым образом применен, во всяком случае, на российской статистике, если под ценами продуктов понимать соответствующие дефляторы. В самом деле, из свойств CES-функций следует, что

$$p_t^C = \left[ \alpha (p_t^X)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (1-\alpha) (p_t^{Im})^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}.$$

Отсюда, в свою очередь, следует неравенство

$$\min\{p_t^X, p_t^{Im}\} \leq p_t^C \leq \max\{p_t^X, p_t^{Im}\},$$

а также аналогичные неравенства для других моделируемых таким образом компонентов ВВП – инвестиционного и экспортного продукта:

$$\min\{p_t^X, p_t^{Im}\} \leq p_t^I \leq \max\{p_t^X, p_t^{Im}\},$$

$$\min\{p_t^X, p_t^{Im}\} \leq p_t^{Ex} \leq \max\{p_t^X, p_t^{Im}\}.$$

Дефлятор импортного продукта наблюдаем в статистике, дефлятор внутреннего продукта – нет. Однако, как видно из рис. 1, дефлятор внутреннего продукта, удовлетворяющий всем приведенным неравенствам, для российской статистики не может быть построен.

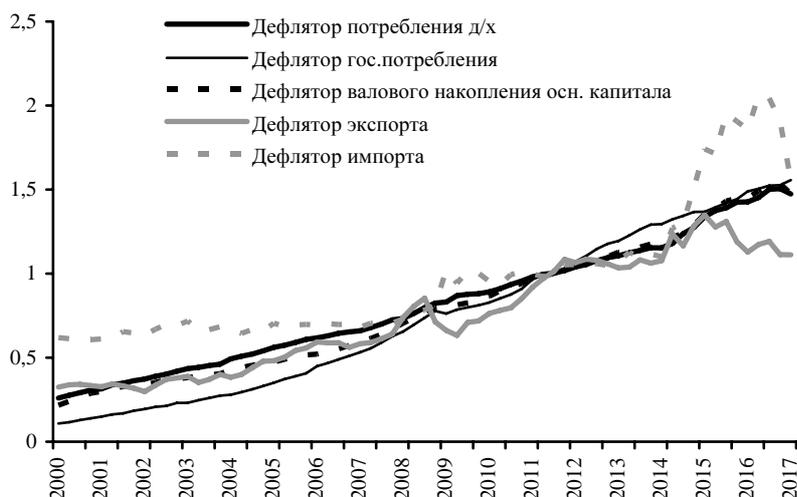


Рис. 1. Дефляторы компонент использования ВВП России

Тем не менее эта методика применяется на российской статистике (см., например: [Крепцев, Селезнев, 2017]). По-видимому, тот факт, что авторы при расчете модели не получают противоречий, связан с типичным при построении DSGE-моделей подходом, при котором фактически исследуется не приведенная в тексте работы модель, а некоторое ее упрощение (отброшены отдельные соотношения и т.п.). Другой, к сожалению, весьма

распространенный подход, состоит в том, что авторы работ, описывающих DSGE-модели, весьма бегло описывают положенную в их основу статистику. Так, например, в статье [Полбин, 2013] представлена DSGE-модель экономики России, в которой предполагается несколько более сложная декомпозиция – каждая компонента ВВП сворачивается из торгуемого отечественного, торгуемого импортного и неторгуемого внутреннего товара. Однако из текста работы нельзя понять, какими и на каком основании выбраны цены этих промежуточных агрегатов.

Предлагаемая нами методология, хотя и не столь интуитивна, лишена вышеописанных недостатков. Поэтому мы полагаем, что она может использоваться для описания компонентов ВВП в рамках DSGE и других макроэкономических моделей.

## 2.2. Использование схемы декомпозиции

Техника декомпозиции ВВП, идейно близкая предлагаемой в данной работе, представлена в работах [Вржещ и др., 2010; Andreyev et al., 2014]. Она основывается на предположении о том, что наблюдаемые компоненты ВВП состоят из нескольких продуктов. В рассмотренных работах предлагается разложение на внутренний продукт, произведенный и потребленный на территории страны, экспортный (произведенный на территории страны для экспорта, т.е. во внутреннем потреблении или инвестировании не участвующий) и импортный. Тогда каждый из показателей основного макроэкономического баланса можно представить в форме (на примере потребления):

$$C(t) = C_X(t) + C_I(t),$$

где  $C(t)$  – объем потребления;  $C_X(t)$  – объем производства внутреннего продукта, используемого для потребления;  $C_I(t)$  – объем импорта, связанного с потреблением. Аналогичные соотношения можно представить для других компонент основного макроэкономического баланса. При этом суммарное (государственным потреблением в данном случае пренебрегают) внутреннее производство  $X(t)$  представимо в виде

$$X(t) = J_X(t) + C_X(t),$$

где  $J_X(t)$  – инвестиции (валовое накопление) из внутреннего продукта. Суммарный объем импорта  $I(t)$  в аналогичных обозначениях

$$I(t) = J_I(t) + C_I(t).$$

При этом внутреннее производство и компоненты потребления и инвестиций не наблюдаются в статистике. Производство описывается однородной функцией

$$Y = f(X, E),$$

где  $E(t)$  – объем экспорта.

Следует отметить, что такая декомпозиция имеет аналогичный предыдущему пункту недостаток, который в силу линейности исходных соотношений может быть вы-

писан явным образом. При соблюдении простейшего баланса для разложения макроэкономических показателей на два продукта в номинальном выражении

$$p_t^A A_t = p_t^a A_t^a + p_t^b A_t^b, A \in \{Y, C, G, J, Ex, Im\}$$

и аналогичного баланса, но в реальном выражении

$$A_t = A_t^a + A_t^b, A \in \{Y, C, G, J, Ex, Im\},$$

где  $A_t^a$  и  $A_t^b$  – объемы продуктов  $a$  и  $b$ , относящихся к агрегату  $A_t$ , оказывается, что каждый (наблюдаемый) дефлятор является средним взвешенным дефляторов этих двух продуктов:

$$p_t^A = \frac{A_t^a}{A_t} p_t^a + \frac{A_t^b}{A_t} p_t^b, A \in \{Y, C, G, J, Ex, Im\}.$$

Следовательно, дефляторы всех показателей должны находиться между дефляторами этих двух продуктов во все моменты времени. Из-за привязки к импортному продукту при использовании такой декомпозиции получается, что все дефляторы (ВВП, потребления, государственных расходов и т.д.) должны лежать между ненаблюдаемым дефлятором внутреннего продукта и наблюдаемым дефлятором импортного продукта. А значит, дефлятор импорта должен быть либо наименьшим, либо наибольшим из всех дефляторов на протяжении всего периода наблюдения. Но при рассмотрении реальных данных, как было показано выше, оказывается, что это условие нарушается.

## 2.2. Декомпозиция на ненаблюдаемые компоненты

Последнее наблюдение приводит к идее отказаться от привязки к наблюдаемым величинам (экспорту и импорту) и перейти к декомпозиции на ненаблюдаемые компоненты, представленной в работах [Пильник, Станкевич, 2014; Pilnik et al., 2015]. Здесь также предполагается существование нескольких продуктов, на которые раскладывается каждая из компонент ВВП, при этом каждый агент (одной компоненте ВВП соответствует один агент) определяет объемы потребления каждого из продуктов в процессе решения задачи максимизации своей полезности. Предполагая определенный вид функции полезности и вводя ряд дополнительных предпосылок о поведении агентов, можно получить выражения для объемов потребления каждого из продуктов в зависимости от цен этих продуктов и, в дальнейшем, использовать эти результаты для расчета декомпозиции на данные.

Предполагается, что имеется исчерпывающий список товаров. Их потоки в каждый момент времени  $t$  участвуют в следующих процессах:

$$\mathcal{P} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} X & , & V & , & C & , & G & , & J & , & E & , & I \\ \text{производство} & , & \text{промежуточное} & , & \text{личное} & , & \text{общественное} & , & \text{валовое} & , & \text{экспорт} & , & \text{импорт} \\ & & \text{потребление} & & \text{потребление} & & \text{потребление} & & \text{накопление} & & & & \end{array} \right\}.$$

На данном этапе учитывается также статистическое расхождение и изменение запасов (сумма этих показателей в следующем балансе обозначается как  $\Delta$ ), поэтому потоки для каждого из товаров и продуктов (продукт – группа товаров) удовлетворяют естественным соотношениям материального баланса:

$$\mathbf{x}_t^X + \mathbf{x}_t^I = \mathbf{x}_t^V + \mathbf{x}_t^J + \mathbf{x}_t^C + \mathbf{x}_t^G + \mathbf{x}_t^E + \Delta.$$

В целом структура дальнейших рассуждений соответствует используемой в DSGE-моделях, рассматривающих многопродуктовые фирмы. Как и, например, в работе [Miniti, Turino 2012], предполагается, что отдельные товары агрегируются в более крупные продукты, которые, в свою очередь, фигурируют в функциях полезности. Но, в отличие от общепринятого подхода, не предполагается одинаковый вид функций полезности для всех агентов, что бы позволило в дальнейшем избавиться от отдельных цен в уравнениях и перейти к значительно более простым формулировкам.

Многопродуктовая декомпозиция основывается на предположении о том, что для процессов  $A \in \{C, G, J, E, I\}$  (потребление домашних хозяйств, потребление государства, валовое накопление основного капитала, экспорт и импорт соответственно) агентом решается задача

$$\mathbf{x}_t^A \in \underset{\mathbf{x}}{\text{Argmax}} \{U^A(\mathbf{x}) \mid \langle \mathbf{p}_t, \mathbf{x} \rangle \leq \tilde{A}_t\}$$

при некотором  $U^A(\cdot) \in \mathbb{U}$ , где  $\tilde{A}$  – объем соответствующего показателя в текущих ценах, а  $A$  – в ценах базового года.

При этом требуется, чтобы индекс объема соответствовал показателю в ценах базового года, который либо наблюдается, либо реконструируется. Основное объяснение этого требования состоит в том, что реальные объемы, в отличие от полезностей, складываются в балансах. Тем не менее это требование, с одной стороны, приводит к вырождению итоговых соотношений, а с другой стороны, не соответствует текущей практике расчета соответствующих статистических данных.

Одним из ключевых ограничений схемы декомпозиции, предложенной в работах [Пильник, Станкевич, 2014; Pilnik et al., 2015], является неявно вводимая предпосылка о соблюдении баланса в ценах базового года вида:

$$\sum_{v \in N} A_t(v) = A_t,$$

где  $A_t(v)$  – объем одного из модельных продуктов  $v$  из всего множества таких продуктов  $N$  в компоненте ВВП в постоянных ценах  $A \in \{C, G, J, E, I\}$ . Необходимость выполнения этого требования вытекает, к примеру, из полученного в задаче решения для модельного продукта  $v$  и становится очевидной при суммировании уравнений такого рода по всем модельным продуктам  $v$ :

$$A_t(v) = A_t \frac{k_v^A(\mathbf{p}_0) \cdot \partial_v U^A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}{\sum_{\mu \in N} k_\mu^A(\mathbf{p}_0) \cdot \partial_\mu U^A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}, v \in N,$$

где  $k_v^A(\mathbf{p}_0)$  – коэффициент, служащий для перехода к другому базовому году;  $U^A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  – функция полезности от группы модельных продуктов; соответственно  $\partial_v U^A(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$  – ее производная по продукту  $v$ .

Несмотря на то, что на этапе калибровки в этом соотношении допускались расхождения, сумма квадратов которых минимизировалась в процессе поиска решения задачи, выполнение этого условия закладывалось в задачу и налагало серьезные ограничения на полученное решение. При этом его выполнение не является хоть сколько-нибудь необходимым: в статистике величины в постоянных ценах досчитываются на основе непосредственно наблюдаемых величин в текущих ценах и индексов цен и не должны, в общем случае, сходиться в балансах такого рода. В связи с этим было принято решение отказаться от этой неявной предпосылки и перейти к системе декомпозиции другого рода.

### 3. Описание нелинейной декомпозиции

#### 3.1. Случай двух продуктов

В данном разделе мы опишем постановку, которую и будем использовать в дальнейшем на этапе работы со статистическими данными по элементам использования ВВП России. Мы будем требовать, чтобы, в отличие от описанных в предыдущем разделе, она удовлетворяла следующим свойствам:

- 1) заложена возможность корректно воспроизводить расчеты при смене базового года, т.е. учитывать разницу между обычными ценами и дефляторами;
- 2) не предполагается линейность соотношений, связывающих наблюдаемые показатели в ценах базового года и их ненаблюдаемые в статистике, но описываемые моделью компоненты. Вместо этого мы будем использовать CES-функции, описывающие достаточно широкий класс взаимосвязей;
- 3) имеется возможность масштабироваться на произвольное количество модельных продуктов, поскольку вопрос об их необходимом количестве должен решаться уже на этапе работы со статистическими данными.

Будем считать, что для каждого элемента использования ВВП  $X \in \{C, G, J, E, I\}$  в каждый момент времени справедливо представление

$$(1) \quad X_t = X_0 \left[ \alpha \left( \frac{X_t^A}{X_0^A} \right)^\rho + (1 - \alpha) \left( \frac{X_t^B}{X_0^B} \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}},$$

где  $\alpha, \rho$  – стандартные коэффициенты CES-функции;  $X_t^A, X_t^B$  – модельные компоненты (далее мы их будем называть товар А и товар В, хотя эта терминология не лучшим образом отражает суть этих переменных), смесь которых и дает рассматриваемый элемент использования ВВП;  $X_0^A, X_0^B, X_0$  – значения соответствующих переменных в момент времени, который считается базовым. Следует отметить, что три последних коэффициента

используются в функциях такого рода довольно редко. Тем не менее для нас их наличие принципиально. Во-первых, именно они позволят далее корректно решать проблему смены базового года, что сводится просто к пересчету этих коэффициентов, но не затронет, например, коэффициенты  $\alpha, \rho$  и все модельные переменные. Во-вторых, наличие в формуле  $X_0^A, X_0^B, X_0$  решает проблему размерности. В данной постановке в степень  $\rho$  возводятся не денежные единицы, а безразмерные величины. Более того, мы нигде далее не будем напрямую складывать модельные переменные  $X_t^A, X_t^B$ .

Будем считать, что соответствующий переменной  $X \in \{C, G, J, E, I\}$  макроэкономический агент (соответственно потребитель, государство, производитель, экспортер, импортер) решает задачу оптимального использования доступных ему модельных продуктов, максимизируя (1) по переменным  $X_t^A, X_t^B$  в рамках заданного ограничения

$$(2) \quad p_t^X X_t = p_t^A X_t^A + p_t^B X_t^B,$$

где  $p_t^X$  – дефлятор соответствующего элемента использования ВВП;  $p_t^A, p_t^B$  – дефляторы модельных продуктов А и В.

Поскольку задача фактически является статической (она решается в каждый момент времени независимо от других), ее решение достаточно просто найти, используя принцип Лагранжа. Система необходимых и достаточных условий будет иметь вид

$$(3) \quad X_0 \left[ \alpha \left( \frac{X_t^A}{X_0^A} \right)^\rho + (1-\alpha) \left( \frac{X_t^B}{X_0^B} \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \alpha \frac{1}{X_0^A} \left( \frac{X_t^A}{X_0^A} \right)^{\rho-1} = \lambda_t p_t^A,$$

$$(4) \quad X_0 \left[ \alpha \left( \frac{X_t^A}{X_0^A} \right)^\rho + (1-\alpha) \left( \frac{X_t^B}{X_0^B} \right)^\rho \right]^{\frac{1}{\rho}} \alpha \frac{1}{X_0^B} \left( \frac{X_t^B}{X_0^B} \right)^{\rho-1} = \lambda_t p_t^B,$$

где  $\lambda_t$  – двойственная переменная к ограничению (2). После деления (3) на (4) получим связь между объемами продуктов А и В:

$$(5) \quad X_t^A = X_t^B \frac{X_0^A}{X_0^B} \left[ \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_t^A X_0^A}{p_t^B X_0^B} \right]^{\frac{1}{\rho-1}}.$$

Для удобства на основе последнего соотношения можно ввести переменную

$$\Omega_t^X = \left[ \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{p_t^A X_0^A}{p_t^B X_0^B} \right]^{\frac{1}{\rho-1}},$$

причем, если записать (5) в момент времени, выбранный в качестве базового, то получим  $\Omega_0^X = 1$ .

После подстановки (5) в (2) найдем

$$X_t^A = X_0^A \frac{p_t^X X_t}{p_t^A X_0^A + p_t^B X_0^B \Omega_t^X}, \quad X_t^B = X_0^B \frac{p_t^X X_t \Omega_t^X}{p_t^A X_0^A + p_t^B X_0^B \Omega_t^X}.$$

Наконец, подставив оба предыдущих выражения в (1), найдем связь между дефляторами

$$p_t^X = p_0^X \left[ \alpha \left( \frac{p_t^A}{p_0^A} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (1-\alpha) \left( \frac{p_t^B}{p_0^B} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}.$$

### 3.2. Случай трех продуктов

Для случая трехпродуктовой декомпозиции эти соотношения принимают несколько более сложный вид:

$$\Omega_t^{AX} = \left[ \frac{1-\alpha-\beta}{\alpha} \frac{p_t^A X_0^A}{p_t^C X_0^C} \right]^{\frac{1}{\rho-1}}, \quad \Omega_t^{BX} = \left[ \frac{1-\alpha-\beta}{\beta} \frac{p_t^B X_0^B}{p_t^C X_0^C} \right]^{\frac{1}{\rho-1}},$$

$$(6) \quad X_t^A = X_0^A \frac{p_t^X X_t \Omega_t^{AX}}{p_t^A X_0^A \Omega_t^{AX} + p_t^B X_0^B \Omega_t^{BX} + p_t^C X_0^C},$$

$$(7) \quad X_t^B = X_0^B \frac{p_t^X X_t \Omega_t^{BX}}{p_t^A X_0^A \Omega_t^{AX} + p_t^B X_0^B \Omega_t^{BX} + p_t^C X_0^C},$$

$$(8) \quad X_t^C = X_0^C \frac{p_t^X X_t}{p_t^A X_0^A \Omega_t^{AX} + p_t^B X_0^B \Omega_t^{BX} + p_t^C X_0^C},$$

$$(9) \quad p_t^X = p_0^X \left[ \alpha \left( \frac{p_t^A}{p_0^A} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + \beta \left( \frac{p_t^B}{p_0^B} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} + (1-\alpha-\beta) \left( \frac{p_t^C}{p_0^C} \right)^{\frac{\rho}{\rho-1}} \right]^{\frac{\rho-1}{\rho}}.$$

Далее в данной работе мы остановимся на трехпродуктовой декомпозиции, потому что трех продуктов оказывается достаточно для адекватного описания пяти компонент ВВП, однако несложно заметить, что описанная конструкция легко расширяется и до большего числа ненаблюдаемых продуктов.

## 4. Подготовка статистических данных

### 4.1. Проблемы современного представления статистики по ВВП России

В настоящий момент на сайте Росстата в разделе «Национальные счета» отсутствуют согласованные ряды данных по ВВП и его составляющим в текущих и базовых ценах

за период с 1995 г. по настоящее время. Вместо этого представлены только кусочные ряды за различные (иногда непересекающиеся) периоды. Так, ВВП в текущих ценах в годовой и квартальной разбивке доступен по отдельности за два разных временных интервала: с 1995 г. по 2011 г. и с 2011 г. по 2017 г. ВВП в ценах базового года в годовой и квартальной разбивке доступен за четыре разных временных интервала, причем в качестве базовых используются разные года:

- 1) в ценах 2003 г. с 1995 г. по 2008 г.,
- 2) в ценах 2008 г. с 2003 г. по 2011 г.,
- 3) в ценах 2011 г. с 2011 г. по 2016 г.,
- 4) в ценах 2016 г. за 2016 г. и 2017 г.

Далее будет описана процедура, которая позволила получить длинные ряды ВВП, потребления домашних хозяйств и НКО, потребления государства, валового накопления основного капитала, экспорта и импорта. После их восстановления как разность между ВВП и суммой его компонент досчитывалась сумма изменения запасов и статистического расхождения. Последние два показателя далее в работе обязательно учитываются, но отделить их друг от друга пока возможности нет.

#### 4.2. Устранение разрывов в показателях в базовых ценах

Для восстановления указанных показателей в ценах 2008 г. за период с 1995 г. по 2002 г. были использованы аналогичные ряды в ценах 2003 г. На данных с 2003 г. по 2008 г., которые доступны и в ценах 2003 г., и в ценах 2008 г., выявлено, что темпы роста каждого показателя к соответствующему кварталу предыдущего года одинаковы для обоих наборов базовых цен. Эта же зависимость используется для восстановления данных на интервале с 2000 г. по 2002 г.

Указанные показатели за период с I квартала 2000 г. по IV квартал 2002 г. восстанавливаются обратным счетом от значений I квартала 2003 г. Таким образом, для данного периода для всех компонент ВВП выполняется

$$X(2008)_{t-4} = \frac{X(2003)_{t-4}}{X(2003)_t} X(2008)_t,$$

где в скобках указан год, цены которого предполагались базовыми, а  $t$  – номер квартала. Отдельно отметим, что, применив данную процедуру отдельно для показателей «Валовое накопление» и «Валовое накопление основного капитала», можно как разность рассчитать показатель «Изменение запасов материальных оборотных средств».

Разрывы в показателях в ценах базового года в 2011 г. и 2016 г. восстанавливаются аналогичным образом, причем итоговые ряды используют в качестве базового 2011 г. И хотя в настоящее время Росстат для самых свежих данных использует 2016 г., но на момент написания статьи в данных ценах были доступны только данные о первых трех кварталах 2016 г. и первых трех кварталах 2017 г.

В завершение данного раздела заметим, что использование данных, полученных с помощью аналогичной процедуры, позволяет рассчитать и статистическое расхождение как разность между восстановленным рядом ВВП в ценах 2011 г. и суммой его элементов использования в этих же ценах. На интервале с 2008 по 2017 гг. средний модуль отноше-

ния статистического расхождения к ВВП оказывается весьма невелик – 0,8% при максимальном скачке во II квартале 2008 г. до 2,5% (интересно, что следующий по величине скачок в этом отношении приходится на I квартал 2017 г. и составляет 2,3%). Тем не менее, все дальше удаляясь в прошлое от 2008 г., можно видеть, что это отношение начинает нарастать, достигая в IV квартале 2000 г. почти 9%.

#### 4.3. Устранение разрыва в показателях в текущих ценах

Единственный разрыв в показателе ВВП и его элементах использования в текущих ценах происходит в 2011 г., который в статистике представлен в обеих методиках, используемых до и после разрыва. С одной стороны, имеющихся данных недостаточно для того, чтобы напрямую пересчитать показатели, учтя тем самым изменения в методике. С другой стороны, поскольку такой год только один, то реализовать сопоставление, выполненное в предыдущем разделе (когда в течение нескольких лет сравнивались темпы прироста показателей, посчитанных в разных методиках), невозможно.

Тем не менее применить принципы пересчета показателей, использованные для ликвидации первого разрыва в показателях в текущих ценах, возможно и без непосредственного сопоставления, однако требуется дополнительная проверка адекватности такого подхода. В качестве индикатора такой проверки далее будет использоваться относительная величина статистического расхождения баланса ВВП по элементам использования.

Значения элементов использования ВВП с I квартала 2011 г. переносятся из таблицы «Элементы использования валового внутреннего продукта (в текущих ценах за 2011–2017 годы)» без изменений. Для восстановления показателей за период с 2000 по 2010 гг. следует воспользоваться аналогичными рядами из таблицы «Элементы использования валового внутреннего продукта (в текущих ценах за 1995–2011 годы)». Указанные показатели аналогично предыдущему пункту восстанавливаются обратным счетом от значений 2011 г. Таким образом, для данного периода

$$X(\text{новая})_{t-4} = \frac{X(\text{старая})_{t-4}}{X(\text{старая})_t} X(\text{новая})_t,$$

где в скобках указана методика (до 2011 г. – «старая», после 2011 г. – «новая»), а  $t$  – номер квартала. Остальные показатели рассчитываются согласно методике, описанной в предыдущем пункте.

В качестве индикатора адекватности предложенной процедуры стыковки данных снова используется показатель относительного статистического расхождения, рассчитываемый как статистическое расхождение баланса элементов использования ВВП к ВВП. Используемая процедура практически не вносит дополнительных расхождений в баланс в текущих ценах. Более того, за период с 2000 по 2011 гг. для старой методики средний модуль отношения статистического расхождения к ВВП составлял 1,7%, а в восстановленных данных эта величина составляет 1,3%.

Эти данные и будут использоваться в дальнейшем. Для корректировки рядов на сезонную компоненту была использована процедура, описанная в работе [Пильник, Поспелов, Станкевич, 2015].

## 5. Результаты оценки декомпозиции на российских данных

### 5.1. Процедура оценки параметров декомпозиции

В разделе 3 мы привели описание теоретической модели, которую будем использовать в дальнейшем, в достаточно общей форме, указав, что она может быть масштабирована на любое количество продуктов. Действительно, вопрос о том, какое количество продуктов следует использовать, оказывается весьма нетривиальным. Из общих соображений понятно, что если взять слишком мало продуктов, то получить хорошую точность декомпозиции окажется затруднительно. С другой стороны, если взять слишком много продуктов, возникнет проблема, аналогичная мультиколлинеарности в задачах линейной регрессии – оценки коэффициентов становятся неустойчивы. Более того, поскольку по результатам решения задачи требуется восстановить ненаблюдаемые ряды, опасность неустойчивости коэффициентов, с помощью которых они рассчитываются, становится еще сильнее.

Проведенные эксперименты показывают, что при использовании для декомпозиции двух продуктов точность подгонки наблюдаемых переменных оказывается достаточно низкой. Это связано, в том числе, с проблемами минимального и максимального дефлятора, которая уже упоминалась выше. При использовании трех (и тем более четырех) продуктов начинают в полной мере проявляться проблемы неустойчивости: с добавлением новых точек оценки коэффициентов могут изменяться достаточно сильно. Кроме того, начинаются проблемы с интерпретацией модельных продуктов. Например, в случае четырехпродуктовой декомпозиции дефлятор одного из продуктов в определенные моменты достигает трехзначных значений, а сам продукт трактовать кроме как модельное статистическое расхождение не получается.

В ситуации, когда двух продуктов оказывается мало, а трех – много, мы предлагаем следующее решение. Будем рассматривать трехпродуктовую декомпозицию, но при этом считать, что один из элементов использования ВВП производится только из одного продукта. При этом сам этот продукт может быть использован и в других элементах использования ВВП. Результаты расчетов показывают, что в этом случае проблема неустойчивости и неоднозначности исчезает, но остается неясным, какой именно элемент использования следует выделить. Для ответа на этот вопрос перебором рассматривались все пять возможных вариантов и выбирался обеспечивающий наибольшую точность (более формальная запись критерия приводится ниже). Выделенным элементом использования ВВП оказалось государственное потребление.

На этапе оценки параметров используются соотношения (6)–(9), при этом калибровка модели осуществляется таким образом, чтобы все соотношения типа (9) были выполнены максимально точно. Можно рассмотреть разные способы восстановления неизвестных рядов продуктов и их цен, но с учетом формы полученных условий рациональности (6)–(8) наиболее разумным представляется подбор траекторий цен модельных продуктов с дальнейшим восстановлением рядов самих продуктов с использованием условий рациональности.

В итоге для каждой из компонент ВВП соотношений оказывается на одно больше, чем неизвестных продуктов (условий рациональности столько же, сколько и цен, плюс соотношения на цену (9)), в случае трехпродуктовой декомпозиции мы имеем четыре

соотношения (6)–(9) при трех неизвестных продуктах  $X_t^A, X_t^B, X_t^C$ . При рассмотрении декомпозиции на количество продуктов, меньшее, чем количество компонент ВВП, число соотношений, которые должны быть одновременно выполнены (все условия рациональности и все соотношения на цены), оказывается больше числа неизвестных величин (цен продуктов, по одной цене для каждого продукта в каждый момент времени). Это, с одной стороны, приводит к необходимости выбора соотношений, в которых будет допускаться погрешность, с другой – дает возможность искать неизвестные величины (как цены модельных продуктов, так и коэффициенты функций полезности агентов) путем минимизации расхождений фактически наблюдаемых значений показателей с модельными прогнозами. Для этого предлагается рассматривать полученную по формуле (9) цену как выполненную с погрешностью:

$$\hat{p}_t^X = p_t^X (1 + \varepsilon_t^X),$$

где  $\hat{p}_t^X$  – модельная цена;  $p_t^X$  – наблюдаемая в статистике. Тогда можно рассмотреть следующую задачу:

$$\sum_{X \in \{C, J, G, Ex, Im\}} \sum_{t=1}^T (\varepsilon_t^X)^2 \rightarrow \min_{p_t^X, \alpha^X, \beta^X, \rho^X}.$$

## 5.2. Проверка устойчивости схемы декомпозиции

Перед началом работы со статистическими данными была проведена проверка устойчивости схемы декомпозиции на искусственных данных. В силу высокой сложности задачи и значительного объема времени, уходящего на расчеты, было принято решение ограничиться двухпродуктовой декомпозицией. Принципиальных отличий с точки зрения схемы модели нет, однако разница во времени вычислений очень значительна.

Проверка проводилась следующим образом:

- 1) генерировались ряды цен ненаблюдаемых продуктов как процессы случайного блуждания, длина ряда соответствует длине рассматриваемого нами статистического ряда;
- 2) задавались параметры CES-функций;
- 3) рассчитывались на основе соотношений вида (6)–(9) компоненты ВВП, их разложения на отдельные продукты и дефляторы;
- 4) при помощи предложенной выше схемы декомпозиции находились ряды цен ненаблюдаемых продуктов и параметры CES-функций. Численная оптимизация по 150 параметрам проводилась в R при помощи пакета `optimx`. Начальные значения параметров подбирались случайно, в дальнейшем рассматривались только те решения, где оптимизация сошлась к какому-то решению (сходимость наблюдалась примерно в 80% случаев из порядка 100 итераций; небольшое количество итераций обусловлено очень большими затратами времени на оценку декомпозиции, до десятков минут на одну итерацию);
- 5) полученные оценки сравнивались с известными «настоящими» величинами.

Результаты показали достаточно высокую устойчивость рассматриваемой процедуры. На рис. 2 приведено сравнение известных «истинных» рядов цен  $p_t^A$  и  $p_t^B$  с расчет-

ными значениями, полученными в результате применения схемы декомпозиции. Черным цветом выделены «истинные» значения, серым – модельные оценки.

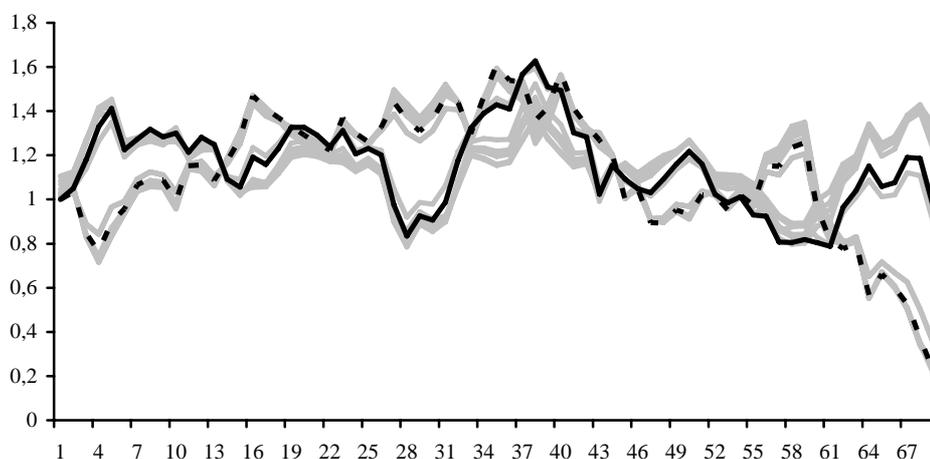


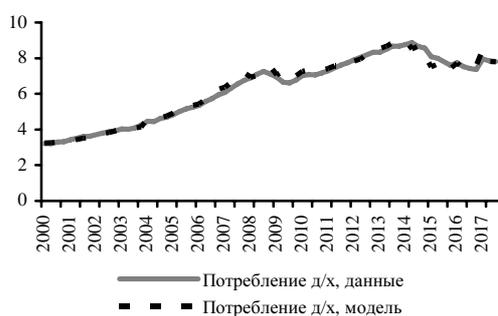
Рис. 2. Точность работы схемы декомпозиции на искусственных данных

Прежде всего, надо заметить, что цены иногда меняются местами, и это естественное явление, потому что порядок цен, в принципе, произволен. Поэтому на каждом из графиков заметны два кластера, соответствующие каждой из двух цен. Также стоит заметить, что нормировка цен иногда меняется (они сдвигаются на константу), что может быть вызвано неточностями в определении величины в «нулевой» момент времени. Однако же в целом оцененные величины очень точно воспроизводят величины «реальные», что говорит о достаточно высокой точности процедуры и возможности ее применения к реальным данным.

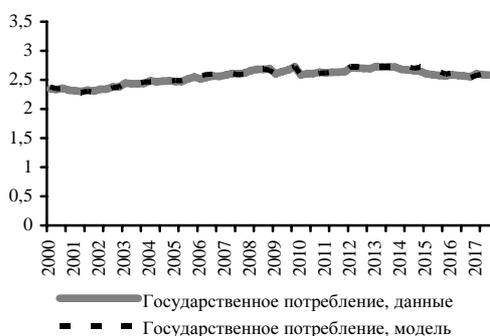
Отметим также, что в силу вычислительных сложностей полноценное Монте-Карло-исследование невозможно, но подобная процедура проводилась несколько раз с разными сгенерированными парами цен  $p_t^A$  и  $p_t^B$ , и сходные результаты были получены во всех случаях.

### 5.3. Оценка декомпозиции на статистических данных

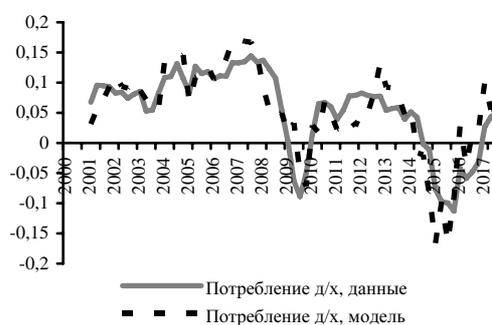
Эта задача может быть решена численно, в качестве решения мы получаем траектории цен модельных продуктов и параметры CES-функций для каждой из компонент ВВП. Результаты разложения можно проиллюстрировать графически – изобразим точность для показателя с самой низкой точностью (потребление домашних хозяйств) и с самой высокой (государственного потребления). Оба показателя – в постоянных ценах (напомним, что показатели в текущих ценах воспроизводятся идеально точно по построению процедуры).



**Рис. 3.** Точность воспроизведения потребления домашних хозяйств, трлн руб. 2011 г.



**Рис. 5.** Точность воспроизведения государственного потребления, трлн руб. 2011 г.



**Рис. 4.** Точность воспроизведения потребления домашних хозяйств, % к соответствующему кварталу прошлого года



**Рис. 6.** Точность воспроизведения государственного потребления, % к соответствующему кварталу прошлого года

Как видим, в обоих случаях модельные ряды фактически совпадают со статистическими.

Во-вторых, обращают на себя внимание коэффициенты функций полезности (табл. 1).

**Таблица 1.**

**Результаты оценки параметров CES-функций**

	C	J	G	E	Im
$\alpha_1$	0,212	0,149	0	0,01	0,462
$\alpha_2$	0,700	0,403	0	0,989	0,537
$\rho$	10,000	6,581	-	1,327	3,123

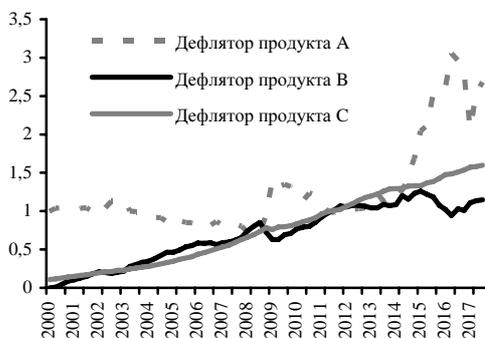
Результаты по точности для отдельных показателей представлены в табл. 2.

**Таблица 2.**

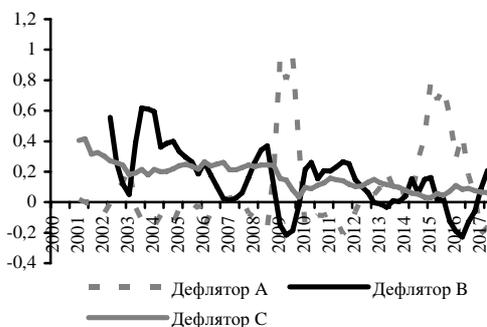
**Точность декомпозиции отдельных показателей**

	C	J	G	E	Im
Значение функционала	0,0666	0,0423	0,0067	0,0282	0,0259
Среднее относительное расхождение, %	0,739	0,667	0,26	0,092	0,017
Среднее абсолютное относительное расхождение, %	2,391	1,872	0,736	1,525	1,444

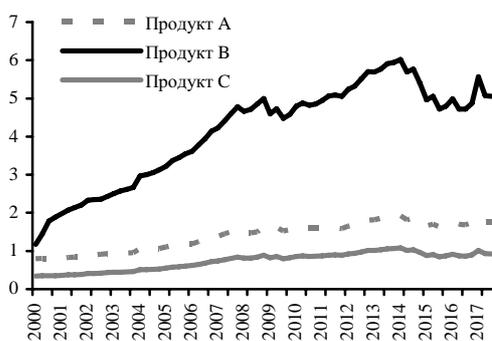
Крайне интересно также выглядят непосредственно цены и результаты разложения показателей (рис. 7–12).



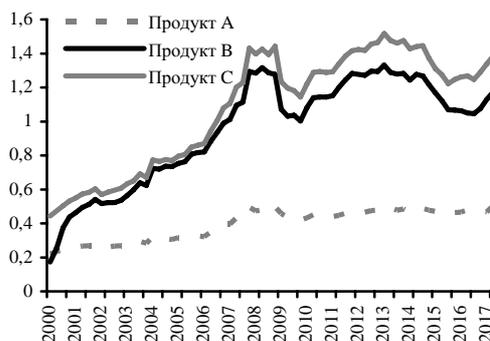
**Рис. 7.** Дефляторы модельных продуктов



**Рис. 8.** Темпы прироста дефляторов модельных продуктов, % к соответствующему кварталу прошлого года



**Рис. 9.** Декомпозиция потребления, постоянные цены 2011 г., трлн руб.



**Рис. 10.** Декомпозиция ВНОК, постоянные цены 2011 г., трлн руб.

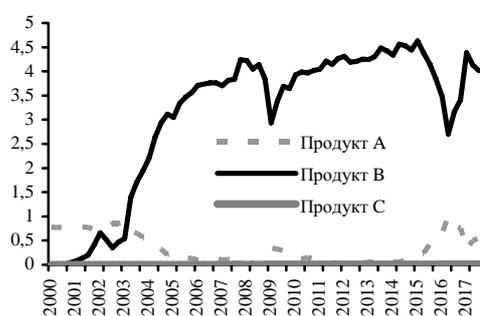


Рис. 11. Декомпозиция экспорта, постоянные цены 2011 г., трлн руб.

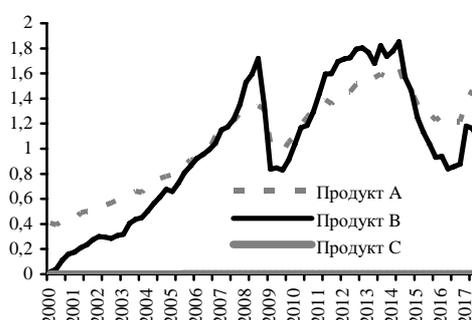


Рис. 12. Декомпозиция импорта, постоянные цены 2011 г., трлн руб.

#### 5.4. Обсуждение полученных результатов

Несмотря на всю техничность полученных результатов, полученные разложения (рис. 7–10) позволяют сделать и ряд содержательных выводов. Обратим внимание на продукт С, который изначально является единственным продуктом, используемым для государственного потребления. При этом оказывается, что он не входит ни в экспорт, ни в импорт, но это является уже не исходным предположением, а результатом моделирования. В связи с этим продукт С можно назвать неторгуемым – он не используется во внешнеэкономической деятельности. С учетом того, что большая часть государственного потребления – это услуги, этот результат выглядит вполне логично. Продукты А и В используются во внешнеэкономической деятельности, но их использование отличается (рис. 9 и 10).

Динамика продуктов А и В в импорте в целом схожа, но видно, что колебания продукта А менее резкие, чем колебания продукта В. В экспорте картина совершенно другая: продукты выступают в роли субститутів – резкому росту использования одного из них соответствует провал в использовании другого. При этом продукт А в экспорте используется довольно слабо, хотя во время внешних шоков (2009 и 2015 гг.) его использование растет на порядок. В свою очередь, дефлятор продукта А (рис. 5) весьма подробно повторяет основные тенденции курса доллара – всплески в периоды девальвации и укрепление между ними. Дефлятор продукта В наоборот очень похож на дефлятор экспорта и существенно расходится с ним только начиная с 2014 г. Не исключено, что причина этого – вступившие в действие санкции и контрсанкции.

Параметры CES-сверток для потребления и валового накопления основного капитала (ВНОК) в процессе моделирования определились так, что приближают эти функции к леонтьевским. В данном случае пропорции использования всех трех продуктов, измеренных в базовых ценах, оказываются весьма жесткими. В свою очередь, изменения структуры в текущих ценах происходят в основном за счет изменения цен модельных продуктов. При этом сама структура использования модельных продуктов в потреблении и валовом накоплении основного капитала разная. В потреблении в значительной степени преобладает продукт В, связанный с экспортной деятельностью. В валовом накоплении основного капитала продукт В также занимает существенную долю, однако несколько больше него вклад продукта С, связанного с государственным потреблением.

В составе и потребления, и валового накопления основного капитала в отличие от экспорта постоянно присутствует значимая часть продукта А, причем в сумме его объем примерно совпадает с количеством продукта А, поступившего в страну в рамках импорта. При этом отмеченные ранее всплески продукта А в экспорте синхронизированы с его провалами в потреблении и валовом накоплении основного капитала. В этой связи нам видится возможным трактовать товар А как преимущественно импортный. Тогда всплески в экспорте вполне естественно описывать как возникающие в периоды наиболее резких валютных колебаний процессы реэкспорта этого товара.

## 6. Заключение

В представленной работе предложен метод декомпозиции ВВП, который позволяет получить более качественные по сравнению с предыдущими работами результаты. Об этом свидетельствует как более высокое качество воспроизведения статистики, так и, что более важно, выполнение ряда теоретических условий, сформулированных в данной работе. Эти условия гарантируют, например, корректность работы алгоритма при изменении базового года в статистических данных.

Полученный по результатам моделирования набор из трех продуктов оказывается достаточно наглядно трактуем. Один из продуктов, прежде всего в силу технических требований, оказывается привязан к государственному потреблению и не используется во внешнеэкономической деятельности, что позволяет характеризовать его термином «неторгуемый». Остальные два продукта, наоборот, напрямую связаны торговым балансом: один из них несет в себе типичные характеристики экспортной деятельности, а второй – импортной.

С точки зрения модельного описания функционирования российской экономики данный подход может восприниматься как способ свертки информации о ВВП и его элементах использования в текущих и базовых ценах (с учетом дефляторов в общей сложности 18 показателей) в существенно меньшее количество индикаторов за счет добавления определенного набора оптимизационных задач, имеющих содержательный экономический смысл.

Основным результатом данной работы, с нашей точки зрения, следует считать, во-первых, указание на противоречие, изначально заложенное в целый ряд часто используемых схем декомпозиции. Во-вторых, в работе предложена схема, которая такого противоречия не содержит, но при этом обладает рядом полезных свойств типа инвариантности к смене базового года. В процессе исследования был выявлен и протестирован набор показателей и система модельных связей между ними, которая, с одной стороны, изначально составлена на языке, используемом в моделях межвременного экономического равновесия, с другой стороны, обеспечивает приемлемую точность при моделировании, снимая при этом целый ряд технических проблем. Не утверждается, что эта схема единственная, но она является готовым рецептом, который может быть использован при создании модели общего равновесия.

\* \*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Вржешч В.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А.* Модельное дезагрегирование макроэкономической статистики // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2010. Т. 14. № 1. С. 88–104.
- Иващенко С.М.* Многосекторная модель динамического стохастического общего экономического равновесия российской экономики // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 5. Экономика. 2016. № 3. С. 176–202.
- Крепцев Д.А., Селезнев С.М.* DSGE-модель российской экономики с банковским сектором // Серия докладов об экономических исследованиях. 2017. № 27.
- Пильник Н.П., Станкевич И.П.* Многопродуктовая модельная декомпозиция компонент валового внутреннего продукта России // Труды Московского физико-технического института (МФТИ). 2014. Т. 6. № 4. С. 78–89.
- Пильник Н. П., Поспелов И. Г., Станкевич И.П.* Об использовании фиктивных переменных для решения проблемы сезонности в моделях общего экономического равновесия // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2015. Т. 19. № 2. С. 249–270.
- Полбин А.В.* Построение динамической стохастической модели общего равновесия для экономики с высокой зависимостью от экспорта нефти // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2013. Т. 17. № 2. С. 347–384.
- Alonso-Carrera J., Raurich X.* Labor Mobility, Structural Change and Economic Growth: UB Economics Working Papers 2015/325. Universitat de Barcelona, Facultat d'Economia i Empresa, UB Economics, 2015.
- Andreyev M.Yu., Vrzheschch V.P., Pilnik N.P., Pospelov I.G., Khokhlov M.A., Jukova, A.A., Radionov S.A.* Intertemporal General Equilibrium Model of the Russian Economy Based on National Accounts Deaggregation // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 197. № 2. P. 175–236.
- Carvalho C., Lee J.W.* Sectoral Price Facts in a Sticky-Price Model: Departmental Working Papers 201133. Rutgers University, 2011.
- Christiano L., Eichenbaum M., Rebelo S.* When Is the Government Spending Multiplier Large? // Journal of Political Economy. 2011. Vol. 119. P. 78–121.
- Dhrymes P.J.* A Multisectoral Model of Growth // Quarterly Journal of Economics. 1962. Vol. 76. P. 264–278.
- Echevarria C.* Changes in Sectoral Composition Associated with Economic Growth // International Economic Review. 1997. Vol. 38. P. 431–452.
- Gali J., Lopez-Salido J., Valles J.* Understanding the Effects of Government Spending on Consumption // Journal of the European Economic Association. 2007. Vol. 5. № 1. P. 227–270.
- Gorman W.M.* Separable Utility and Aggregation // Econometrica. 1959. Vol. 27. № 3. P. 469–481.
- Jensen B.S., Lehmijoki U.* Homothetic Multisector Growth Models // DEGIT Conference Papers c016\_001, DEGIT, Dynamics, Economic Growth, and International Trade. 2011.
- Kongsamut M.P., Rebelo M.S., Xie D.* Beyond Balanced Growth // Review of Economic Studies. 2001. Vol. 68. P. 869–882.
- Lee J.W.* Aggregate Implications of Heterogeneous Households in a Sticky-Price Model: Departmental Working Papers 201132. Rutgers University, 2010.
- Mucka Z., Horvath M.* Fiscal Policy Matters: A New DSGE Model for Slovakia: Discussion Paper № 1/20. Council for Budget Responsibility, 2016.
- Pilnik N., Pospelov I.G., Stankevich I.* Multiproduct Model Decomposition of Components of Russian GDP: Series Working Papers BRP «Economics/EC». № WP BRP 111/EC/2015. NRU Higher School of Economics, 2015.

*Smets F., Wouters R.* Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach // American Economic Review. 2007. Vol. 97. P. 586–606.

*Strotz R.H.* The Utility Tree – A Correction and Further Appraisal // Econometrica. 1959. Vol. 27. № 3. P. 482–488.

*Uzawa H.* On a Two-sector Model of Economic Growth // Review of Economic Studies. 1961. Vol. 29. P. 40–47.

## Generalized Multi-Product Decomposition of Elements of the Use of Russia's GDP

Nikolay Pilnik<sup>1</sup>, Stanislav Radionov<sup>2</sup>, Ivan Stankevich<sup>3</sup>

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: npilnik@hse.ru

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: saradionov@edu.hse.ru

<sup>3</sup> National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: vpvstankevich@yandex.ru

The paper offers a new method of decomposition of GDP and its elements. It is based on the idea that every component can be represented as a combination of a smaller number of aggregates. The proposed method has a range of important theoretical properties that insure its correctness and reproduces the statistics with very high quality. The theoretical reasoning of the procedure is presented, 3-product decomposition is analysed. Decomposition of indicators in both current and fixed prices is presented.

The proposed decomposition has a range of advantages compared to earlier procedures. First, it does not link any model products to aggregates, observed in statistics. Second, it decomposes the statistics into a higher number of unobserved products, and these products and their prices can be reasonably interpreted. Finally, the important distinction from earlier procedures is non-linearity in real prices.

Apart from that, the paper proposes a method of harmonization of GDP and its elements statistics that is needed to work with these indicators after two recent methodology changes.

**Key words:** Russian economy; GDP components by expenditure; decomposition; hierarchical utility; consumption; investment.

**JEL Classification:** C65, C68.

\* \*  
\*

## References

- Vrzesch V., Pospelov I., Khokhlov M. (2010) Modelnoe dezagregirovanie macroeconomicheskoy statistiki [Model Disaggregation of Macroeconomic Statistics]. *HSE Economic Journal*, 14, 1, pp. 88–104.
- Ivashchenko S.M. (2016) Mnogosekturnaya model dinamicheskogo stokhasticheskogo obshego ekonomicheskogo ravnovesiya rossiyskoy ekonomiki [Multisector DSGE model of the Russian Economy]. *Herald of St. Petersburg University. Series 5. Economics*, 3, pp. 176–202.
- Kreptsev D.A., Seleznyov S.M. (2017) DSGE-model rossiyskoy ekonomiki s bankovskim sektorom [DSGE Model of the Russian Economy with Banking Sector]. *Series of Reports on Economic Research*, 27.
- Pilnik N., Stankevich I. (2014) *Mnogoproduktovaya modelnaya dekompozicia component valovogo vnutrennego producta Rossii* [Multiproduct Model Decomposition of Components of Russian GDP]. Works of MIPT, 6, 4, pp. 78–89.
- Pilnik N., Pospelov I., Stankevich I. (2015) Ob ispolzovanii fictivnykh peremennykh dlya resheniya problemy sezonnosti v modelyakh obshego ekonomicheskogo ravnovesiya [On the Use of Dummy Variables to Solve the Problem of Seasonality in General Equilibrium Models]. *HSE Economic Journal*, 19, 2, pp. 249–270.
- Polbin A.V. (2013) Postroenie dinamicheskoy stokhasticheskoy modeli obshego ravnovesiya dlya ekonomiki c visokoy zavisimostyu ot eksporta nefti [Development of DSGE Model for the Economy with High Dependency on Oil Price]. *HSE Economic Journal*, 17, 2, pp. 347–384.
- Alonso-Carrera J., Raurich X. (2015) *Labor Mobility, Structural Change and Economic Growth*. UB Economics Working Papers 2015/325. Universitat de Barcelona, Facultat d'Economia i Empresa, UB Economics.
- Andreyev M.Yu., Vrzhesch V.P., Pilnik N.P., Pospelov I.G., Khokhlov M.A., Jukova, A.A., Radionov S.A. (2014) Intertemporal General Equilibrium Model of the Russian Economy Based on National Accounts Deaggregation. *Journal of Mathematical Sciences*, 197, 2, pp. 175–236.
- Carvalho C., Lee J.W. (2011) *Sectoral Price Facts in a Sticky-Price Model*. Departmental Working Papers 201133. Rutgers University.
- Christiano L., Eichenbaum M., Rebelo S. (2011) When Is the Government Spending Multiplier Large? *Journal of Political Economy*, 119, pp. 78–121.
- Dhrymes P.J. (1962) A Multisectoral Model of Growth. *Quarterly Journal of Economics*, 76, pp. 264–278.
- Echevarria C. (1997) Changes in Sectoral Composition Associated with Economic Growth. *International Economic Review*, 38, pp. 431–452.
- Gali J., Lopez-Salido J., Valles J. (2007) Understanding the Effects of Government Spending on Consumption. *Journal of the European Economic Association*, 5, 1, pp. 227–270.
- Gorman W.M. (1959) Separable Utility and Aggregation. *Econometrica*, 27, 3, pp. 469–481.
- Jensen B.S., Lehmijoki U. (2011) *Homothetic Multisector Growth Models*. DEGIT Conference Papers c016\_001, DEGIT, Dynamics, Economic Growth, and International Trade.
- Kongsamut M.P., Rebelo M.S., Xie D. (2001) Beyond Balanced Growth. *Review of Economic Studies*, 68, pp. 869–882.
- Lee J.W. (2010) *Aggregate Implications of Heterogeneous Households in a Sticky-Price Model*. Departmental Working Papers 201132. Rutgers University.
- Mucka Z., Horvath M. (2016) *Fiscal Policy Matters: A New DSGE Model for Slovakia*. Discussion Paper no 1/20. Council for Budget Responsibility.

---

Pilnik N., Pospelov I.G., Stankevich I. (2015) *Multiproduct Model Decomposition of Components of Russian GDP*. NRU Higher School of Economics. Series Working Papers BRP «Economics/EC». No WP BRP 111/EC/2015.

Smets F., Wouters R. (2007) Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach. *American Economic Review*, 97, pp. 586–606.

Strotz R.H. (1959) The Utility Tree – A Correction and Further Appraisal. *Econometrica*, 27, 3. pp. 482–488.

Uzawa H. (1961) On a Two-Sector Model of Economic Growth. *Review of Economic Studies*, 29, pp. 40–47.