Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22. № 3. С. 387–417.

HSE Economic Journal, 2018, vol. 22, no 3, pp. 387–417.

Топология сети межбанковского кредитования в агентной модели банковской системы¹

Леонидов А.В., Нечитайло В.А., Серебрянникова Е.Е.

В работе анализируется топология сети межбанковского кредитования (МБК) в агентной модели банковской системы, включающей детальное описание протоколов и стилизованное описание внешней (по отношению к банковской системе) экономики. Показано, что основная причина возникновения рынка МБК в модели – это эффект разрыва ликвидности, возникающий вследствие разницы в срочностях кредитов и депозитов. Иллюстрируется влияние данного эффекта на динамику совокупного капитала и объема наличности в случае возрастающей структуры процентных ставок, являющейся причиной наблюдаемой в реальности разницы срочностей кредитов и депозитов. Проводится сопоставление различных свойств данного графа с аналогичными характеристиками реальных сетей МБК. Показано, что модели банковской системы, в которой банки представлены агентами-автоматами, достаточно для описания широкого спектра топологических характеристик реальных сетей МБК. К таким свойствам относятся: существенный размер гигантской сильно-связной компоненты, наличие тяжелых хвостов распределения по In- и Out-степеням, наличие тяжелого хвоста распределения по объемам размещенных средств, дисассортативность, неравномерность распределения коэффициента кластеризации по вершинам. Кроме того, выделены свойства, для воспроизводства которых требуется более детальное описание поведения агентов. К этим свойствам относятся: отсутствие ориентированных циклов в сетях малой агрегации, малая по сравнению с ре-

¹ Исследование выполнено в рамках работы по Программе Президиума РАН «Фундаментальные исследования по проблеме экономической безопасности».

Авторы выражают благодарность Г.И. Пеникасу и Н.П. Пильнику за ценные обсуждения в рамках совместной работы над разработкой агентной модели банковской системы.

Леонидов Андрей Владимирович – д.ф.-м.н., вед.н.с. Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, профессор кафедры дискретной математики Московского физико-технического института (государственного университета). E-mail: leonidov@lpi.ru

Нечитайло Владимир Александрович – к.ф.-м.н., с.н.с. Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. E-mail: nechit@lpi.ru

Серебрянникова Екатерина Евгеньевна – инженер Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, аспирант Московского физико-технического института (государственного университета). E-mail: serebryannikova@lpi.ru

Статья поступила: 24.07.2018/Статья принята: 20.09.2018.

альной доля банков, которые не выходят на рынок МБК, а также доля чистых кредиторов, отсутствие тяжелых хвостов распределения по объемам привлеченных средств, низкий коэффициент кластеризации сети. В работе проведен анализ причин отличия перечисленных свойств модельной сети от реальных, а также охарактеризованы изменения, которые необходимо внести в модель для наблюдения в ней перечисленных характеристик.

Ключевые слова: агентная модель; рынок МБК; топология сети; разрыв ликвидности.

DOI: 10.17323/1813-8691-2018-22-3-387-417

1. Введение

Потребность построения реалистичных моделей функционирования банковской системы обусловлена целым рядом факторов, таких как необходимость количественного описания ее системно-значимых свойств, в том числе системных рисков, оценки последствий регуляторных воздействий, проведение стресс-тестирований и т.д. Особенность такой сложной системы, как банковская, заключается в том, что для большого числа задач адекватное описание возможно только при достаточно детальном учете реальных протоколов, определяющих функционирование системы и взаимодействие между агентами. Такое детальное описание может быть реализовано только в рамках агентно-ориентированного подхода к моделированию.

Идеология агентных моделей основана на построении описания системы от частного к общему («снизу вверх»). Так, в случае банковской системы ключевой элемент модели – детальное описание поведения агента-банка и механизмов взаимодействия разных агентов между собой. Эволюция всей системы, таким образом, является результатом взаимодействия индивидуальных разнородных агентов. Естественный вопрос, возникающий при моделировании, состоит в том, какова минимальная необходимая сложность описания агентов, требуемая для воспроизведения в модели ключевых характеристик реальных систем. Описание агентов может производиться на разных уровнях. Соответствующая классификация моделей приведена в табл. 1, где уровни моделирования упорядочены в соответствии с ростом сложности описания агентов.

В недавней работе [Ермолова и др., 2018]² была предложена агентная модель банковской системы, включающая детальное описание протоколов и стилизованное описание внешней (по отношению к банковской системе) экономики. Относительно классификации, приведенной в табл. 1, данная модель относится к моделям нулевого уровня, поскольку банки в ней выступают в роли автоматов, какая-либо оптимизация действий у агентов-банков отсутствует.

² Приведена ссылка на текст доклада авторов на XIX Апрельской международной научной конференции НИУ ВШЭ, Москва, 13.04.2018. Существенно переработанная версия данной работы (Ermolova M., Leonidov A., Nechitailo V., Penikas H., Pilnik N., Serebryannikova E. Agent-based Model of Banking System in Russia) направлена на рассмотрение к публикации в журнал «Journal of Simulation».

Таблица 1.

Иерархия агентных моделей по сложности описания агентов

Уровень	Тип агентов	Описание
0	Агенты-автоматы	Агенты действуют по некоторым алгоритмам, которые не предполагают решения каких-либо оптимизационных задач
1	Рациональные агенты	Действия агентов являются результатом решения некоторых оптимизационных задач
2	Агенты, имитирующие реальное поведение	Рациональность модельных агентов дополняется учетом психологических аспектов поведения реальных агентов

Охарактеризуем кратко основные черты агентной модели банковской системы, более подробное описание будет приведено ниже. В рассматриваемой схеме можно выделить три основных элемента: внешние потоки депозитов и заявок на кредиты, описываемые некоторыми случайными процессами, и собственно банковскую систему (рис. 1).

Рис. 1. Схематическое представление ключевых элементов агентной модели банковской системы

Поведение агентов-банков устроено так, что они принимают все депозиты, поступающие извне, и всегда выдают кредиты при условии наличия достаточного объема наличности. Дефицит ликвидности, обусловленный необходимостью выплаты процентов по депозитам и возврата депозитов или наличием неудовлетворенных заявок на кредиты, стимулирует банки выходить на рынок МБК. На рынке МБК производится случайный попарный мэтчинг банков, испытывающих дефицит ликвидности, и банков, обладающих свободными денежными средствами. При этом, если банк не сможет ликвидировать дефицит ликвидности, связанный с наличием неудовлетворенных заявок по кредитам, то эти кредиты не выдаются, а банк, тем не менее, продолжает функционировать. Неудовлетворение же дефицита ликвидности, связанного с обязательствами банка по депозитам, приводит к банкротству банка. Исходя из этого анализ последствий возник-

новения дефицита ликвидности, связанного с обязательствами банка по депозитам, представляет наибольший интерес. Таким образом, рынок МБК – это ключевой элемент, обеспечивающий нормальное функционирование системы в рассматриваемом подходе. В связи с этим данная модель описывает эндогенное формирование сети МБК, из чего следует, что степень реалистичности сети, формируемой в результате эволюции системы, является важной оценкой степени реалистичности модели в целом.

Целью данной работы является сравнение топологических характеристик сети, генерируемой в модели, со свойствами реальных сетей МБК, описанными в литературе, и ответ на вопросы о том, для воспроизводства каких характеристик реальной сети достаточно модели с упрощенным описанием агентов в терминах агентов-автоматов (модель нулевого уровня по классификации в табл. 1), и какие свойства ее топологии требуют более реалистичного описания действий агентов.

Общая структура работы следующая. В разделе 2 представлено описание используемой в статье агентной модели банковской системы и появляющейся в ней сети МБК. В разделе 3 анализируются свойства глобальных подструктур модельного графа, проводится сравнение их размеров с размерами аналогичных компонент реальных сетей, а также приводится интерпретация влияния ориентированных циклов в сети МБК на совокупные активы в системе. В разделе 4 рассматриваются различные локальные характеристики графа. Некоторые дополнительные соображения и выводы приведены в заключении.

2. Агентная модель банковской системы

Агентная модель банковской системы [Ермолова и др., 2018] включает описание поведения на следующих трех рынках.

- Рынок кредитов, на котором банки выдают займы своим клиентам. Считается, что клиенты банков – это нефинансовые организации или физические лица. Спрос на кредиты описывается некоторым случайным процессом.
- Рынок депозитов, на котором банки принимают поступающие к ним депозиты физических лиц или нефинансовых организаций. Предложение депозитов также описывается некоторым случайным процессом.
- Рынок межбанковского кредитования, на котором банки, испытывающие дефицит ликвидности в связи с необходимостью выплат по депозитам или нехваткой средств на выдачу запрошенного кредита, могут получить кредит от банков с профицитом ликвидности.

Модель описывает эволюцию банковской системы в дискретном времени с шагом в один день.

В работе [Ермолова и др., 2018] описаны характерные режимы модели с плоской кривой процентных ставок по депозитам и кредитам. В этом случае функционирование системы определяется следующим набором характеристик:

- начальное количество банков в системе N ;
- начальное распределение капитала банков. Рассматривались два случая:
 - равномерный начальный капитал;
 - реалистичное распределение по начальному капиталу, приведенное на рис. 2³;

³ Информация агрегирована с сайта Банка России из архива отчетных форм 101, 102, доступных по следующей ссылке: <http://www.cbr.ru/credit/forms.asp>

• параметры, характеризующие случайный поток кредитов и депозитов, приведенные в табл. 2. Кроме того, для характеристики соотношения между средними совокупными ежедневными потоками процентных платежей по кредитам и депозитам удобно ввести величины $\Omega_i = r_i N_i$ ($i = c, d$);

• на рынке МБК осуществляются только сделки overnight, а займы выдаются по единой ставке r_{IB} , определяющейся соотношением

$$(1) \quad r_{IB} = \frac{r_c + r_d}{2}.$$

Рис. 2. Гистограмма реального распределения банков по капиталу, использованного в качестве начального распределения в модели

Таблица 2.

Параметры, характеризующие случайный поток кредитов и депозитов в модели с плоской срочной структурой процентных ставок

Параметр	Рынок			
	кредитный		депозитный	
	обозначение	значение в симуляции рис. 3	обозначение	значение в симуляции рис. 3
Среднее количество в день	N_c	1000	N_d	1000
Объем	V_c	100	V_d	100
Срочность	M_c	200	M_d	100, 150, 200
Ставка	r_c	15%	r_d	10%

В работе [Ермолова и др., 2018] было показано, что при условии равенства срочностей внешних кредитов и депозитов в модели наблюдаются три различных режима в зависимости от соотношения между Ω_c и Ω_d :

- $\Omega_c > \Omega_d$: режим растущего капитала;
- $\Omega_c = \Omega_d$: режим флуктуирующего капитала;
- $\Omega_c < \Omega_d$: режим убывающего капитала.

2.1. Эффект разрыва ликвидности

Классификация режимов, приведенная выше, верна только в случае равенства срочностей между кредитами и депозитами, $M_c = M_d$. В более реалистичном случае, когда выполнено соотношение $\Omega_c > \Omega_d$, но срочность депозитов меньше срочности кредитов, $M_d < M_c$, динамика может быть существенно иной вследствие возникновения эффекта разрыва ликвидности. Поясним, в чем заключается этот эффект, на конкретном примере.

Предположим, что

- в момент времени $t = 0$ банк обладает запасом наличности C_0 , равным собственному капиталу банка K_0 ;
- другие активы и обязательства отсутствуют;
- банк выдает один кредит объемом V со ставкой r_c , срочностью $M_c = k_c \tau$, где τ – количество дней в месяце; k_c – количество месяцев, на которое выдан кредит;
- банк принимает один депозит объемом V со ставкой r_d , срочностью $M_d = k_d \tau$, где k_d – количество месяцев, на которое принят депозит;
- $M_d < M_c$;
- $\Delta r = r_c - r_d > 0$;
- проценты по кредитам и депозитам выплачиваются каждый месяц (т.е. каждые τ дней);
- в последующие моменты времени банк не выдает новых кредитов и не принимает новых депозитов.

Динамика статей баланса банка приведена в табл. 3. Как видно из данной таблицы, до момента времени $t = M_d$ наблюдается синхронный рост объема наличности и величины капитала банка за счет положительного спреда между ставками по кредиту и депозиту. Момент времени $t = M_d$ – это момент, когда банк должен вернуть депозит.

Если в момент времени $t = M_d$ выполнено условие $C_0 + k_d \Delta r V - V \geq 0$, то банку хватит собственной наличности для выплаты процентов по депозитам и возврата депозита, эффекта разрыва ликвидности не возникает (см. предпоследний столбец в табл. 3). Рассмотрим подробнее случай, когда $C_0 + k_d \Delta r V - V < 0$ (см. последний столбец в табл. 3), т.е. когда у банка недостаточно наличности для возврата депозита. В этом случае в момент времени $t = M_d$ банк вынужден выходить на МБК.

Таблица 3.

**Динамика статей баланса банка в примере, иллюстрирующем возникновение
эффекта разрыва ликвидности при $t \leq M_d$**

День	0	τ	2τ	...	$M_d = k_d \tau$		
Условие				...	$C_0 + k_d \Delta r V -$ $-V \geq 0$	$C_0 + k_d \Delta r V -$ $-V < 0$	
Актив	Наличность	C_0	$C_0 + \Delta r V$	$C_0 + 2\Delta r V$	...	$C_0 + k_d \Delta r V - V$	0
	Кредиты	V	V	V	...	V	V
	Кредиты МБК	0	0	0	...	0	0
	Итого	$C_0 + V$	$C_0 + \Delta r V + V$	$C_0 + 2\Delta r V + V$	...	$C_0 + k_d \Delta r V$	V
Пассив	Капитал	C_0	$C_0 + \Delta r V$	$C_0 + 2\Delta r V$	...	$C_0 + k_d \Delta r V$	$C_0 + k_d \Delta r V$
	Депозиты	V	V	V	...	0	0
	Депозиты МБК	0	0	0	...	0	$V - k_d \Delta r V - C_0$
	Итого	$C_0 + V$	$C_0 + \Delta r V + V$	$C_0 + 2\Delta r V + V$	...	$C_0 + k_d \Delta r V$	V

Введем обозначение $V^{IB}_{M_d} = V - k_d \Delta r V - C_0$ для объема займа МБК в момент времени M_d . Отметим, что следующее поступление процентов по кредиту произойдет только в момент времени $t = M_d + \tau$, до этого момента каждый день наличность банка будет нулевой, в результате чего банк будет вынужден выходить на МБК, чтобы взять кредит для погашения ранее взятого займа МБК и процентов по нему (табл. 4). Как следует из табл. 4, в течение промежутка времени $[M_d, M_d + \tau - 1]$ капитал банка снижается. Кроме того, если в какой-то момент банк не сможет найти кредитора на рынке МБК, он обанкротится в силу отсутствия собственной ликвидности. Момент времени $M_d + \tau$ характеризуется поступлением процентов по кредиту в объеме $r_c V$. Если этой суммы будет достаточно для погашения займа МБК, т.е. если выполнено следующее условие:

$$r_c V > V^{IB}_{M_d} \left(1 + \frac{r^{IB}}{\tau} \right)^{\tau-1},$$

то банк перестанет испытывать дефицит ликвидности и, следовательно, выходить на МБК. Иначе, процесс продолжится.

Таблица 4.

Динамика статей баланса банка в примере, иллюстрирующем возникновение эффекта разрыва ликвидности, при $t \geq M_d$ в случае, когда $C_0 + k_d \Delta r V - V < 0$

День	$M_d = k_d \tau$	$M_d + 1$	$M_d + 2$	...	
Условие	$C_0 + k_d \Delta r V -$ $-V < 0$			...	
Актив	Наличность	0	0	...	
	Кредиты	V	V	...	
	Кредиты МБК	0	0	...	
	Итого	V	V	...	
Пассив	Капитал	$C_0 + k_d \Delta r V -$ $-\frac{r_{IB}}{\tau} V_{M_d}^{IB}$	$C_0 + k_d \Delta r V -$ $-\frac{r_{IB}}{\tau} V_{M_d}^{IB} \left(1 + 1 + \frac{r_{IB}}{\tau} \right)$	$C_0 + k_d \Delta r V - \frac{r_{IB}}{\tau} V_{M_d}^{IB} \left(1 + \right.$ $\left. + 1 + \frac{r_{IB}}{\tau} + \left(1 + \frac{r_{IB}}{\tau} \right)^2 \right)$	...
	Депозиты	0	0	...	
	Депозиты МБК	$V_{M_d}^{IB} \left(1 + \frac{r_{IB}}{\tau} \right)$	$V_{M_d}^{IB} \left(1 + \frac{r_{IB}}{\tau} \right)^2$	$V_{M_d}^{IB} \left(1 + \frac{r_{IB}}{\tau} \right)^3$	...
	Итого	V	V	V	...

Таким образом, эффект разрыва ликвидности, проявляющийся как дефицит наличности, возникающий когда срочность депозитов меньше срочности кредитов, является причиной выхода банков на МБК. Следует отметить, что рассмотренный выше пример – иллюстрация отклика на единственное событие выдачи кредита и принятия депозита с соответствующими параметрами. При наличии суперпозиции нескольких подобных событий, происходящих в разные дни, во временном промежутке $[M_d, M_c]$ банк будет вынужден каждый день возвращать не только ранее взятые займы МБК (как в примере), но и возвращать депозиты. Тем самым, потребность в наличности у банка возрастает, вследствие чего возрастает и спрос на рынке МБК. Если с подобным явлением сталкивается большое количество банков, то появляются существенные системные риски, поскольку может наблюдаться дефицит наличности в системе в целом. Приведем оценку изменения совокупного объема наличности в системе. Пусть

- C_t – объем наличности в момент времени t ;
- n_c^t, n_d^t – количество кредитов и депозитов соответственно, выданных в момент времени t ;

- τ – периодичность выдачи процентов по кредитам и депозитам;
- остальные обозначения перечислены в табл. 2.

Тогда изменение объема наличности в случае отсутствия банкротств в системе составляет

$$(2) \quad \Delta C_t = C_t - C_{t-1} = -V_c n_c^t + V_d n_d^t - V_d r_d \left(\sum_{k=1}^{\min\left(\left\lfloor \frac{M_d}{\tau} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor\right)} n_d^{t-k\tau} \right) + \\ + V_c r_c \left(\sum_{k=1}^{\min\left(\left\lfloor \frac{M_c}{\tau} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor\right)} n_c^{t-k\tau} \right) + V_c n_c^{t-M_c} - V_d n_d^{t-M_d},$$

где первые два слагаемых соответствуют выдаче новых кредитов и приему новых депозитов, вторые два слагаемых относятся к выдаче процентов по депозитам и получению процентов по кредитам, оставшаяся часть – возврат ранее выданных кредитов и полученных депозитов. Предположим, что объем кредитов и депозитов совпадает ($V_c = V_d = V$) и что среднее количество депозитов и заявок на кредиты в день также совпадает и равно N_{cd} . Рассмотрим динамику среднего изменения объема наличности в период времени $[M_d, M_c]$:

$$(3) \quad \overline{\Delta C_t} = -VN_{cd} \left(\frac{\epsilon_{cd}^t}{N_{cd}} + r_d \frac{M_d}{\tau} - r_c \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{t}{\tau} \right\rfloor} \left(1 + \frac{\epsilon_{cd}^{t-k\tau}}{N_{cd}} \right) + 1 \right),$$

где $\epsilon_{cd}^t = \overline{n_c^t - n_d^t}$ – средняя разница между количеством выданных кредитов и депозитов. Отметим, что если бы все заявки на выдачу кредитов удовлетворялись, то величина ϵ_{cd}^t была бы равна нулю. Поскольку банки могут не удовлетворить часть заявок (в случае дефицита ликвидности), $\epsilon_{cd}^t \leq 0$. Рассмотрим приближенную оценку $\overline{\Delta C_t}$, полученную в предположении, что удовлетворяются все заявки на выдачу кредитов (или что доля неудовлетворенных заявок мала). В этих предположениях получим

$$(1) \quad \overline{\Delta C_t} \approx -VN_{cd} \left(r_d \frac{M_d}{\tau} - r_c \frac{t}{\tau} + 1 \right).$$

Если величина $\overline{\Delta C_t}$, оцененная в соотношении (4), составляет значительную долю исходного объема наличности C_t , то можно ожидать роста числа банкротств в системе, поскольку не все банки смогут найти контрагента-кредитора на рынке МБК.

На рис. 3 (штрихпунктирная и пунктирная линии) продемонстрирована динамика капитала (рис. 3а), наличности (рис. 3б) и количества банков в системе (рис. 3в) в симуляциях с $M_c > M_d$. В отличие от эволюции тех же показателей в режиме растущего капитала при $M_c = M_d$ (рис. 3, штриховая линия), эта динамика характеризуется, прежде всего, существенными флуктуациями капитала и наличности в начальный момент времени. Падение объема наличности за период $[M_d, M_c]$ составляет порядка $4 \cdot 10^6$, что сопоставимо с начальным совокупным капиталом банков в системе⁴.

Рис. 3. Динамика совокупного объема капитала (а), совокупного объема наличности (б) и количества банков (в) в различных симуляциях (значения параметров, использованных в симуляциях, приведены в табл. 2 и 3)

⁴ Если подставить в соотношение (4) величины, использованные в одной из симуляций, приведенной на рис. 3 ($V = 100, N_{cd} = 1000, r_d = 10\%, r_c = 15\%, M_d = 100, M_c = 200$), и просуммировать изменения наличности за период $t \in [100, 200]$, то получим значение ожидаемого изменения наличности $\overline{\Delta C_{100-200}} \approx -4,5 \cdot 10^6$, что соответствует среднему изменению, наблюдаемому в симуляциях (рис. 3б). Для получения более точной оценки необходимо учитывать наличие банкротств банков и значение поправки ϵ_{cd}^t .

Можно отметить следующие характерные особенности динамики. Во-первых, падение наличности предшествует падению капитала. Данный факт находится в полном соответствии с логикой, описанной в примере выше. А именно, причина падения наличности – необходимость возврата депозитов в условиях, когда срок возврата кредитов еще не наступил. В свою очередь, совокупный капитал системы изменяется по двум причинам. Во-первых, дефицит наличности приводит к тому, что банки выдают меньше кредитов, а значит, получают меньше прибыли в виде процентных платежей. Во-вторых, дефицит ликвидности – причина каскадного банкротства банков, вследствие которого совокупный капитал системы уменьшается. Отметим, что величина сделок МБК прямо не отражается на агрегированных по всей системе характеристиках. Вместе с тем, рост спроса на кредиты МБК является свидетельством дефицита ликвидности у банков, а значит и роста системных рисков, проявляющихся в виде каскада банкротств. Циклическое повторение, наблюдаемое как в динамике наличности, так и в динамике капитала – следствие описанного выше эффекта для новых банков, появившихся после каскадного банкротства. Отметим, что амплитуда и продолжительность флуктуаций больше в симуляции с $M_c - M_d = 100$, чем в симуляции с $M_c - M_d = 50$. Данный эффект связан с тем, что доля новых банков в первом случае больше, чем во втором.

Следует отметить, что описанная выше динамика – это по большей части эффект начальных условий в симуляциях. Тем не менее легко понять, что аналогичные эффекты могут наблюдаться в случае возникновения некоторого шока в экономике, в результате которого наблюдается одновременный рост объема спроса на кредиты и предложения депозитов в условиях, когда срочность депозитов меньше срочности кредитов, либо, еще более явно, в случае роста только объема депозитов.

2.2. Модель с возрастающей структурой процентных ставок и реалистичным распределением объемов и частот кредитов/депозитов по срочностям

Выше всюду речь шла о модели, в которой ставки по кредитам и депозитам не зависели от срочности. Как известно, в реальности величина ставки прямо зависит от срочности, эта зависимость описывается кривой доходности. Так, на рис. 4 приведена усредненная по периоду 2013–2017 гг. кривая бескупонной доходности государственных облигаций Российской Федерации. Наличие подобной возрастающей структуры процентных ставок обуславливает предпочтительность для банков выдачи «длинных» кредитов и приема «коротких» депозитов, увеличивая таким образом величину спреда процентных ставок. Очевидно, что такая структура портфеля активов и пассивов банков может быть причиной появления эффекта разрыва ликвидности, описанного в предыдущем подразделе.

В анализируемой агентной модели банковской системы агенты-банки не оптимизируют свой портфель. В связи с этим реалистичность итогового распределения объемов кредитов и депозитов в системе обеспечивается экзогенным заданием реалистичного распределения объемов и частот заявок во внешнем случайном потоке. Использованное стилизованное распределение объемов и частот заявок по срочности приведено на рис. 5⁵.

⁵ В модели использовано стилизованное распределение, характеризующее ключевые особенности портфелей активов и обязательств российских банков, полученное на основе анализа ин-

Параметры, характеризующие внешний поток кредитов и депозитов (помимо формы кривой процентных ставок), приведены в табл. 5.

Рис. 4. Кривая бескупонной доходности государственных облигаций РФ, полученная усреднением за период 2013–2017 гг. Данная кривая была использована в модели с возрастающей срочной структурой процентных ставок

Рис. 5. Распределение совокупных объемов заявок (за 1000 дней симуляции) и частот прихода кредитов и депозитов разной срочности в модели с возрастающей структурой процентных ставок

формации с сайта Банка России из архива отчетных форм 101, 102, доступных по следующей ссылке: <http://www.cbr.ru/credit/forms.asp>

Таблица 5.

**Параметры, характеризующие случайный поток кредитов и депозитов
в модели с возрастающей срочной структурой процентных ставок**

Параметр	Рынок			
	кредитный		депозитный	
	обозначение	значение в симуляции рис. 3	обозначение	значение в симуляции рис. 3
Совокупный объем в день (разной срочности)	V_c^{Tot}	20000	V_d^{Tot}	20000
Максимальная срочность, дней	M_c^{max}	720	M_d^{max}	240
Среднее совокупное количест- во в день (разной срочности)	N_c	1000	N_d	1000
Спред относительно «базовой» кривой процентных ставок ⁶	Δr_c	5%	Δr_d	-0,1%
Спред между кредитными и депозитными ставками	$\Delta r = \Delta r_c - \Delta r_d$			

Динамика совокупного капитала, объема наличности и количества банков в системе приведена на рис. 3 (сплошная линия). В данном случае наличие кредитов и депозитов разной срочности сглаживает динамику (по сравнению со случаями с плоской кривой и различными срочностями депозитов и кредитов), однако эффекты, связанные с разрывом ликвидности, сохраняются. Так, наличие разрыва ликвидности приводит к росту дефицита наличности у банков и, следовательно, уменьшению совокупного объема наличности в системе. В результате, как упоминалось выше, растут системные риски, связанные с ростом вероятности банкротства ряда банков. Так, в симуляции, приведенной на рис. 3, момент времени 434 – это момент начала каскада банкротств (см. рис. 3в), с которым связано падение совокупного капитала системы. Отметим, что поскольку новые банки в системе не появляются⁷, цикличность, описанная в предыдущем подразделе, отсутствует.

⁶ Если срочная структура процентных ставок задана «базовой» кривой r_t , то кредитная кривая процентных ставок задается соотношением $r_{c,t} = r_t + \Delta r_c$, а депозитная кривая – соотношением $r_{d,t} = r_t + \Delta r_d$.

⁷ Вероятность появления новых банков определяется темпом прироста активов в системе и количеством банков, обанкротившихся за период. Темпы уменьшения количества банков в системе, так же как темпы прироста активов, в симуляциях с возрастающей структурой процентных ставок значительно меньше аналогичных величин в симуляциях с плоской кривой. В результате вероятность появления нового банка значительно меньше в этих симуляциях.

Поскольку модель с возрастающей структурой процентных ставок и реалистичным распределением капитала является наиболее реалистичной, исследование топологии сети МБК будет проводиться именно для данной версии модели.

2.3. Описание анализируемой сети

Сеть МБК – это взвешенный ориентированный граф, вершинами которого являются банки, а ребра отражают взаимоотношения должник-кредитор на рынке МБК. Направление ребра в этом графе соответствует направлению от заемщика (Out-связь) к кредитору (In-связь). Формально данный граф характеризуется матрицей смежности $Z = \{z_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$, где z_{ij} – объем кредита, выданного банком j банку i . Удобно также ввести следующие обозначения:

- $W = \{w_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$, где $w_{ij} = \frac{z_{ij}}{z^{max}} \leq 1$, z^{max} – некоторый нормировочный множитель (максимальный элемент матрицы смежности во всех симуляциях);
- $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$, где $a_{ij} = \mathbb{I}(w_{ij} > 0)$, матрица смежности невзвешенного ориентированного графа, полученного из исходного путем удаления информации о весах ребер;
- $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$, где $b_{ij} = b_{ji} = \mathbb{I}(\{w_{ij} > 0\} \cup \{w_{ji} > 0\})$, матрица смежности невзвешенного неориентированного графа, полученного из исходного путем удаления информации о весах и направлениях ребер.

На рис. 6 приведена динамика отношения совокупного объема рынка МБК к совокупному капиталу в системе. Возникновение рынка МБК в данном случае – следствие описанного выше эффекта разрыва ликвидности, являющегося следствием того, что наибольший объем депозитов предоставляется на срок значительно меньший, чем срочность кредитов. При рассмотрении достаточно большого временного интервала влияние данного эффекта исчезает, количество банков в системе стабилизируется, так же как исчезает потребность выхода на рынок МБК. Таким образом, увеличение объемов МБК – эффект влияния начальных условий, так как стационарный режим аналогичен режиму растущего капитала в случае плоской кривой. Вместе с тем эволюция, аналогичная начальной эволюции системы в модели, может характеризовать определенное кризисное состояние экономики, при котором в определенный момент времени объем депозитов значительно превышает объем кредитов. Именно поэтому изучение сети, возникающей при переходе от начального состояния к стационарному, представляет интерес для исследования.

Топологические характеристики сети существенно зависят от периода агрегирования данных. В литературе рассматриваются сети разной агрегации, от графов, характеризующих ежедневную динамику, до годовой периодичности. Сеть РФ 2011–2014 гг. изучалась в работах [Леонидов, Румянцев, 2013; Leonidov, Rumyantsev, 2016] на основе официальной ежедневной статистики Банка России, а также в работах [Vandermarliere, Ryckebusch, Schoors, 2012; Vandermarliere et al., 2015] на основе месячной статистики за 1999–2004 гг., представленной в частной базе данных.

Рис. 6. Динамика отношения объема рынка МБК к совокупному капиталу в системе в модели с возрастающей структурой процентных ставок (значения параметров приведены в табл. 3)

Наиболее интересным является анализ дневной сети МБК. Однако, не проводя дополнительного анализа, можно утверждать, что дневная сеть МБК в модели будет значительно отличаться от реальной дневной сети. Так, в модельной сети в дневном графе МБК отсутствуют узлы, которые являются одновременно кредиторами и заемщиками, тогда как в реальности такие банки существуют. Данное утверждение является следствием того, что, во-первых, в модели описаны только сделки overnight, тогда как в реальной сети существенный объем сделок имеют большую длительность, а во-вторых, в модели на рынке МБК все сделки совершаются по одной ставке. В реальности же различие ставок стимулирует банки выступать посредниками, выдавая кредиты по большей ставке банкам, характеризующимся большими рисками, а занимая по меньшей ставке.

Однако можно ожидать, что свойства модельной сети будут более реалистичными при агрегировании по большому временному интервалу. В связи с этим при анализе модельной сети рассматривались свойства графа при агрегации данных за неделю (5 дней в модели) и за год (240 дней в модели). При проведении исследования было проведено 10 симуляций со значениями параметров, приведенными в табл. 5, в результате чего было получено 10 реализаций годовых сетей и 240 реализаций недельных сетей МБК.

3. Компонентная структура сети МБК

3.1. Сопоставление размеров компонент модельной сети с характеристиками реальных сетей

Анализ свойств сети МБК наиболее естественно начинать с характеристики свойств ее глобальных подструктур. В теории графов к таким подструктурам принято относить, прежде всего, компоненты связности – множества вершин, любые две из которых соединены путем. А именно, для ориентированного графа выделяют:

- слабосвязные компоненты (WCC) – множества вершин, любые две из которых соединены путем, но этот путь не обязательно ориентированный⁸;
- сильносвязные компоненты (SCC) – множества вершин, любые две из которых соединены ориентированным путем;
- гигантскую слабосвязную компоненту (GWCC) – WCC наибольшего размера;
- гигантскую сильносвязную компоненту (GSCC) – SCC наибольшего размера;
- In-компоненту – множество вершин, не находящихся в GSCC, которые соединены ориентированным путем с вершинами из GSCC;
- Out-компоненту – множество вершин, не входящих в GSCC, каждая из которых может быть достигнута из GSCC;
- Tendrils – вершины, входящие в GWCC, но не являющиеся частями In-, Out- и GSCC компонент;
- несвязанные компоненты (DC) – прочие WCC (в том числе несвязанные вершины).

Характеристика графа в таких терминах в литературе называется Bow-Tie-представлением. Относительные размеры указанных компонент – важная характеристика ориентированного графа. В частности, то, какой смысл имеет размер GSCC, будет более подробно пояснено в следующем подразделе.

Кроме этого, может быть предложена и более естественная с экономической точки зрения классификация вершин на чистых заемщиков, чистых кредиторов и тех, которые выполняют обе роли одновременно. Соотношение между двумя описанными классификациями схематически проиллюстрировано на рис. 7.

Рис. 7. Соотношение между классификацией по выполняемой роли и Bow-tie представлением

Размеры указанных компонент графов приведены в табл. 6. В классификации по выполняемой роли результаты, полученные по недельным данным, близки к классификации вершин годового сети. В случае же Bow-Tie-структуры недельный граф значительно отличается от годового, а именно во всех симуляциях в графе отсутствовала GSCC и лишь в 11 симуляциях в графе присутствовал один ориентированный цикл.

В ряде работ анализировались аналогичные характеристики для реальных графов МБК. Так, в работе [Леонидов, Румянцев, 2013] исследовались характеристики российской

⁸ WCC – компонента в неориентированном графе, полученном из ориентированного путем удаления информации о направлении ребра, т.е. заданный матрицей B .

сети МБК 2011 г. В работе приведены размеры компонент графа в классификации по выполняемой роли. Средняя доля чистых заемщиков в графе составляла 14%, доля чистых кредиторов – 44%, доля банков, выполнявших обе функции, – 17%. Сравнение с результатами, приведенными в табл. 6, показывает, что в модельной сети, в отличие от реальной, доля чистых заемщиков превосходит долю чистых кредиторов. Кроме того, количество банков, выполняющих обе роли, в модельной сети значительно больше (54%), чем в реальной, а банков, которые не выходят на рынок МБК, в модельной сети, напротив, значительно меньше (2% против 25% в реальности). Вероятно, такие диспропорции могут быть следствием отсутствия какого-либо планирования у банков в модели. Судя по всему, наличие планирования приводит к тому, что часть банков не выходит на рынок МБК в качестве заемщиков и, как следствие, уменьшается доля чистых заемщиков и доля банков, выполняющих обе функции, тогда как доля чистых кредиторов растет.

Таблица 6.

Компонентная структура графа МБК (значения, приведенные в таблице, соответствуют средним по десяти симуляциям размерам соответствующих компонент, в % от общего числа вершин в графе. Для агрегации по году приведено среднее значение в 10 симуляциях, для недельных данных в скобках указаны стандартные отклонения в процентах)

Степень агрегации	Год	Неделя
Классификация по выполняемой роли		
Чистые заемщики	35	28 (2)
Чистые кредиторы	12	16 (1)
Обе роли	53	54 (3)
Bow-Tie-структура		
In	27	
Out	17	
GSCC	42	–
Tendrils	14	
DC	0	

Структура Bow-Tie анализировалась для различных сетей МБК в ряде работ, некоторые из которых перечислены в табл. 7. Наиболее интересными для сравнения со свойствами модельной сети являются результаты исследования сети МБК Италии, представленные в работе [Bargigli et al., 2014], поскольку в ней рассматривалась сеть сделок overnight с агрегацией данных за год, что полностью аналогично модельному случаю годовой сети. Помимо этого, итальянская сеть состоит из примерно того же количества банков, как и использованное при моделировании. Размер GSCC Италии значительно превосходит размер этой компоненты в модельной сети. Однако однозначный вывод о причинах расхождения сделать трудно, так как можно ожидать зависимости размеров компонент от

распределения по размерам банков в системе. Поскольку в модели используется реальное распределение банков по капиталу в России, интерес также представляет сравнение с результатами исследования российских сетей [Vandermarliere, Ryckebusch, Schoors, 2012; Leonidov, Rummyantsev, 2016]. Справочно в табл. 7 также приведены результаты оценки величины компонент в других сетях МБК. Можно отметить, что размер GSCC может быть существенно разным для разных сетей (и даже для сети одной страны в разные периоды времени), что довольно естественно, поскольку размер компонент зависит как от распределения банков по капиталу, так и от периода агрегирования данных. Тем не менее важный результат, который следует из сравнения свойств модельной сети со свойствами реальных сетей МБК, заключается в наличии GSCC существенного размера.

Таблица 7.

Размеры компонент Bow-Tie структуры разных сетей

Страна	Период	Количество вершин в сети	Периодичность данных	GSCC	IN	OUT	Ссылка
Италия	2008, 2012	573 (в 2008), 532 (в 2012)	год (только over-night сделки)	86%	–	–	Bargigli et al., 2014
Россия	1998–1999	100–400	месяц	0–10%	–	–	Vandermarliere, Ryckebusch, Schoors, 2012
	2001	600–800		10–40%	40–80%	30–50%	
	2003–2004	800–900		30–50%	40–80%	40–70%	
Россия	2011–2014	400–550	день	10–15%	–	–	Leonidov, Rummyantsev, 2016
США (Fedwire)	2004	7584	день	90%	8%	12%	Soramäki et al., 2007
США (Federal fund network)	1998–2006	450–660	день (только over-night сделки)	10–15%	55–65%	10–20%	Bech, Atalay, 2010
Мексика	2005–2011	27–42	день	24–30%	–	–	Martinez-Jaramillo et al., 2014
Нидерланды	1998–2008	91–103	квартал	10–19%	–	–	Veld, van Lelyveld, 2014

Довольно естественно ожидать, что банки с большим объемом капитала должны выступать в роли кредиторов, а банки с малым капиталом – скорее в роли заемщиков. В модели с реалистичным распределением начального капитала и возрастающей кривой процентных ставок такое соотношение действительно выполняется, что продемонстрировано на диаграмме рис. 8. Как следует из схемы рис. 7, только часть банков, являющихся одновременно кредиторами и заемщиками, принадлежат к гигантской сильносвязной компоненте. Однако из табл. 6 следует, что при рассмотрении годовой сети эта часть до-

вольно существенна – 80% всех банков, являющихся одновременно кредиторами и заемщиками, принадлежат GSCC. Наглядным представлением этого является сопоставление диаграммы рис. 8 с диаграммой, приведенной на рис. 9.

Рис. 8. Соотношение между объемом капитала банка и выполняемой им ролью

Рис. 9. Соотношение между объемом капитала банка и его ролью в Bow-tie-представлении

3.2. Влияние циклов на величину совокупных активов банков

Поясним, какое значение имеет размер GSCC. Как было отмечено выше, любые две вершины GSCC соединены ориентированным путем, а значит, любые две вершины входят хотя бы в один ориентированный цикл. Наличие циклов на рынке МБК приводит к тому, что величина бухгалтерских активов банка не является объективным индикатором состояния банка. Поясним это на небольшом примере.

Пусть имеется три банка: Банк 1, Банк 2, Банк 3. Предположим, что Банк 1 занимает единицу у Банка 2. При этом баланс Банка 2 не меняется, а баланс Банка 1 увеличивается на единицу. Теперь предположим, Банк 2 занимает единицу у Банка 3, а Банк 3 занимает единицу у Банка 1. В результате формирования такого цикла на рынке МБК размер активов всех банков увеличился на единицу. Учет такого явления может оказаться полезным дополнением к существующим методикам оценки вероятности дефолтов [Karminsky, Kostrov, 2017].

Наличие циклов в сети МБК – это естественное явление, поскольку, как показано в работах, посвященных эмпирическому анализу реальных сетей МБК (см. ссылки в табл. 7), во всех реальных сетях присутствует GSCC существенного размера. Исходя из этого, бухгалтерская стоимость активов банков не является информативной величиной, которую можно использовать для оценки их реальной стоимости. Для вычисления поправки на наличие циклов в сети МБК можно предложить процедуру, схожую с процедурой, предложенной в работе [Eliot, Golub, Jackson, 2014; Vitali, Glattfelder, Battiston, 2011]. Введем следующие обозначения:

- $V_i, i = 1, \dots, N$ – размер активов банка i ;

• $V_i^{out}, i = 1, \dots, N$ – размер «внешних» по отношению к сети МБК активов, т.е. все активы кроме кредитов МБК (в модели это наличность и внешние кредиты);

- z_{ij} – объем задолженности банка i перед банком j .

Заметим, что

$$(5) \quad V_i = V_i^{out} + \sum_{j \neq i} z_{ji}, i = 1, \dots, N.$$

Для того чтобы сделать поправку на наличие циклов, необходимо, чтобы каждое ребро графа МБК учитывалось в активах только одного банка. Для этого преобразуем правую часть соотношения (5) следующим образом:

$$(6) \quad v_i = V_i^{out} + \underbrace{\sum_{j \neq i} z_{ji} - \sum_{j \neq i} z_{ij}}_{\text{чистые активы МБК}},$$

где для справедливой стоимости активов введено обозначение $v_i (i = 1, \dots, N)$. То же самое в матричной форме:

$$(7) \quad \mathbf{v} = \mathbf{V}^{out} + (\mathbf{Z}' - \mathbf{Z})\mathbf{1},$$

где $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_N)'$; $\mathbf{V}^{out} = (V_1^{out}, \dots, V_N^{out})'$; $\mathbf{1}$ – вектор, состоящий из единиц.

Как следует из табл. 7, даже дневные сети МБК характеризуются наличием GSCC, а следовательно, даже в дневных реальных сетях МБК присутствуют циклы. Как уже было отмечено выше, в этом отношении модельная сеть отличается от реальных. Однако свойства глобальных подструктур агрегированной по году сети в значительной степени схожи с характеристиками реальных сетей. Поэтому для демонстрации величины влияния циклов на активы банков было рассмотрено соотношение между среднегодовыми активами банков в модели и величиной активов с поправкой на циклы, рассчитанной по формуле (7), в которой в качестве матрицы $\mathbf{Z}$ использовалась среднегодовая матрица. На рис. 10 продемонстрировано соотношение между величиной среднегодовых активов и величиной активов с учетом поправки на циклы. Можно отметить, что величина поправки может быть довольно существенной.

Рис. 10. Соотношение между величиной среднегодовых активов и величиной среднегодовых активов за вычетом поправки на циклы в сети МБК

4. Локальные характеристики сети МБК в модели

4.1. Свойства распределения по степеням вершин и объемам привлеченных (размещенных) средств

Важной локальной характеристикой графа является распределение по степеням вершин. Степенью вершины в неориентированном графе называется количество ребер, смежных с данной вершиной. В ориентированном графе можно выделить In- и Out-степени. In-степень – это количество ребер, входящих в данную вершину (количество заемщиков в случае графа МБК), Out-степень – количество исходящих ребер (количество кредиторов в графе МБК). Если d_i^{in} и d_i^{out} – это In- и Out- степени вершины i соответственно, то они определяются следующими соотношениями:

$$(8) \quad d_i^{in} = \sum_{j=1}^N a_{ji},$$

$$(9) \quad d_i^{out} = \sum_{j=1}^N a_{ij}.$$

Следует отметить, что в модели случайного графа Эрдеша – Реньи⁹, использованной в ряде работ для анализа каскадного банкротства [Gai, Kapadia, 2010; Gai, Haldane, Kapadia, 2011], распределение по степеням описывается пуассоновским законом. Отличительной же чертой реальных сетей межбанковского кредитования, как и многих других социаль-

⁹ Модель случайного графа Эрдеша – Реньи – это модель, в которой предполагается, что ребра в графе проводятся независимо с некоторой фиксированной вероятностью p .

ных сетей, является наличие тяжелых хвостов распределения степеней вершин графа [Soramäki et al., 2007; Bech, Atalay, 2010; Santos, Cont, 2010; Martinez-Jaramillo et al., 2014; Bargigli et al., 2014; Veld, van Lelyveld, 2014; Vandermarliere et al., 2015; Leonidov, Rummyantsev, 2016], т.е. реальные сети существенно отличаются от случайного графа Эрдеша – Реньи.

В частности, в работе [Leonidov, Rummyantsev, 2016] для российской сети 2011–2014 гг. приведены значения показателей степенной функции распределения, наилучшим образом описывающие хвост распределений In- и Out-степеней. Так, если предположить, что функция распределения в хвосте степенная с показателем α :

$$(10) \quad p(x) \sim x^{-\alpha},$$

где x – In- (Out-) степень вершины; $p(x)$ – плотность распределения, то для In-степени показатель α равен 8,14, а для Out-степени – 6,28.

На рис. 11 представлены эмпирические плотности In- и Out-степеней графа в модели с реальным начальным распределением капитала и возрастающей кривой процентных ставок при недельной агрегации данных. Из этих диаграмм следует, что распределения как In-, так и Out-степеней существенно отличаются от пуассоновского. В частности, распределения характеризуются тяжелыми хвостами, которые можно аппроксимировать степенным распределением с параметрами –2,06 и –6,13 для In- и Out-степеней соответственно.

Рис. 11. Плотности распределений по In- и Out-степеням в модели (недельная агрегация данных)

Поскольку рассматриваемый граф является взвешенным, важной характеристикой его топологии является не только распределение по степеням вершин, но и распределение по совокупным объемам привлеченных и размещенных средств. Если s_i^{in} и s_i^{out} – объемы размещенных и привлеченных средств соответственно, то они определяются следующими соотношениями:

$$(11) \quad s_i^{in} = \sum_{j=1}^N z_{ji},$$

$$(12) \quad s_i^{out} = \sum_{j=1}^N z_{ij}.$$

Для ряда реальных сетей в литературе приводится свидетельство того, что распределения по объемам размещенных и привлеченных средств реальных сетей МБК также характеризуются тяжелыми хвостами. Так, в работе [Soramäki et al., 2007] указано, что хвосты соответствующего распределения сети Fedwire (США) степенные. Сеть Federal fund network (США), а также российская сеть характеризуются логнормальными хвостами распределений по объемам размещенных (привлеченных) средств [Bech, Atalay, 2010; Vandermarkliere et al., 2015]. В модельной сети наличие тяжелого хвоста характерно только для объема размещенных средств (рис. 12).

Рис. 12. Плотности распределений по объемам размещенных и привлеченных средств в модели (недельная агрегация данных)

Важной характеристикой взвешенного графа является нагруженность ребер – соотношение между In-(Out-) степенью вершины и общим объемом размещенных (привлеченных) средств. Как отмечается в работе [Леонидов, Румянцев, 2013], для российского графа 2011 г. характерен почти линейный рост объема при росте степени при малых степенях и выполаживание зависимости при достаточно больших степенях. Особенно отчетливо это заметно в зависимости между Out-степенью и объемом привлеченных средств, где угол наклона уменьшается до нуля при сравнительно небольших степенях. Авторы данной работы предположили, что такое выполаживание может быть связано с лимитами на кредитование в больших объемах.

Как следует из зависимости рис. 13, объем размещенных средств в модели также растет с увеличением степени, однако, во-первых, этот рост быстрее линейного, а во-вто-

рых, выполаживание отсутствует, что естественно в силу отсутствия каких-либо внешних ограничений на объем транзакций и внутрибанковского риск-менеджмента в модели.

Рис. 13. Нагруженность ребер в модельных недельных графах

Для Out-степени зависимость существенно иная. А именно, узлы с малыми Out-степенями могут характеризоваться как малыми, так и относительно большими объемами, однако при степенях больше 15 узлы характеризуются только относительно большим объемом. Такая зависимость – результат случайного мэтчинга на рынке МБК в модели. Если банку требуется малый объем средств, то он с большой вероятностью сможет занять его у малого числа контрагентов. Если требуется большой объем средств, то количество контрагентов определяется успешностью выбора. Если банк случайным образом обращается в банк с большим объемом ликвидности, то ему не потребуется задействовать большое количество контрагентов. Если же случайные контрагенты на рынке МБК не обладают большим объемом ликвидности, то банк будет вынужден разбивать требуемую сумму на части и тем самым увеличивать число кредиторов. Если сравнивать такую зависимость с реальной, то следует отметить отсутствие в реальной сети узлов с большим объемом заимствования и малой степенью. Вероятно, это согласуется с предположением авторов работы [Леонидов, Румянцев, 2013] о наличии лимитов у реальных банков.

Как отмечается в ряде работ [Soramäki et al., 2007; Леонидов, Румянцев, 2013; Martinez-Jaramillo et al., 2014; Bargigli et al., 2015], реальные графы МБК характеризуются свойством дисассортативности. В таких графах вершины с большой In-степенью связаны в основном с вершинами с маленькой In-степенью и наоборот, аналогичное свойство выполнено и для Out-степеней вершин. В модельном графе такое свойство также имеет место (рис. 14), а именно, вершины с достаточно большой In-степенью (больше 20) связаны с вершинами, у которых In-степень равна нулю (т.е. с чистыми заемщиками). Схожая зависимость характерна и для Out-степеней – при Out-степени, превышающей 15, наиболее вероятно, что кредиторы являются чистыми кредиторами. Однако следует отметить и наличие различия между реальной и модельной сетями. А именно, в реальной сети с ростом In-(Out-) степени средняя In-(Out-) степень соседей убывает медленнее, чем в модельной сети.

Рис. 14. Межузловая корреляция в модельных графах

4.2. Кластеризация сети

В работах, посвященных анализу топологии реальных сетей МБК [Soramäki et al., 2007; Vandermarliere, Ryckebusch, Schoors, 2012; Леонидов, Румянцев, 2013; Martinez-Jaramillo et al., 2014; Bargigli et al., 2015], отмечается, что данные графы, как и большинство социальных сетей, являются высоко кластеризованными. В таких сетях высока вероятность наличия связи между двумя вершинами, имеющими общего соседа. Стандартной характеристикой степени кластеризации сети в случае неориентированного графа является коэффициент кластеризации. Коэффициент кластеризации вершины i (C_i) определяется как отношение количества треугольников вокруг i в сети к максимально возможному их количеству (если бы все соседи i были соединены ребрами между собой). Коэффициент кластеризации всего графа определяется путем усреднения по вершинам графа. Как отмечается в литературе, коэффициент кластеризации реальных сетей значительно превышает коэффициент кластеризации случайного графа Эрдеша – Реньи¹⁰. В табл. 8 приведены значения коэффициента кластеризации модельной сети. Как следует из данных результатов, модельная сеть, в отличие от реальных, менее кластеризована, чем случайный граф.

Результаты, приведенные в табл. 8, являются характеристикой сети без учета информации о весах и ориентации ребер в графе. В работе [Fagiolo, 2007] для анализа кластеризации взвешенных ориентированных графов был предложен подход, основанный на выделении четырех различных типов треугольников – *сус*, *mid*, *in*, *out* (рис. 15). В соответствии с этим подходом могут быть выделены коэффициенты кластеризации пяти типов: общий, характеризующий вес треугольников всех типов относительно максимально

¹⁰ В работе [Newman, 2003] показано, что коэффициент кластеризации случайного графа Эрдеша – Реньи равен плотности графа, т.е. отношению числа ребер в графе к максимально возможному числу ребер.

возможного веса треугольников, а также коэффициенты кластеризации, связанные с каждым из выделенных типов треугольников в отдельности. Как отмечается в работе [Tabak et al., 2014], для сети МБК Бразилии наименьшее значение среди коэффициентов кластеризации четырех типов, как правило, характерно для треугольников типа *cus*, тогда как наибольшее – для треугольников типа *mid*. Кроме того, отмечается высокая степень неравномерности распределения значений коэффициентов кластеризации по вершинам графа.

Таблица 8.

Значения коэффициента кластеризации неориентированного невзвешенного графа в модели с реальным начальным распределением капитала банков и возрастающей срочной структурой процентных ставок

Период агрегации	Неделя	Год
Коэффициент кластеризации	0,023 (0,002)	0,12 (0,06)
Коэффициент кластеризации случайного графа Эрдеша – Реньи (плотность неориентированного графа)	0,045 (0,003)	0,34 (0,03)

Рис. 15. Четыре типа треугольников, используемые для расчета коэффициента кластеризации взвешенного ориентированного графа [Fagiolo, 2007].

Подпись под треугольниками характеризует вес треугольника при расчете коэффициента кластеризации

На рис. 16 приведены значения коэффициентов кластеризации для ориентированного взвешенного графа в моделях с реальным начальным распределением капитала и возрастающей срочной структурой процентных ставок при агрегации по неделе и по году. Для сравнения приведены аналогичные коэффициенты случайных графов с распределением весов, соответствующим распределению весов в модели. Как можно заметить, случайные графы характеризуются равными коэффициентами кластеризации всех пяти типов, тогда как для модельного графа наблюдается существенная диспропорция: наименьшее значение коэффициента кластеризации наблюдается для треугольников типа *cus* (нулевое), а наибольшее – для треугольников типа *mid*. Более наглядно данное свойство проиллюстрировано на рис. 17 в виде средних по вершинам весовых долей треугольников разных типов. Из этих результатов видно, что в случайном графе доли треугольников разных типов вокруг вершин равны, тогда как в модельной сети наблюдается преобладание треугольников типа *mid* и отсутствие треугольников типа *cus*. Таким образом, ранжирование величин коэффициентов по типам треугольников соответствует

реальному, однако в реальной сети это различие не столь существенно [Tabak et al., 2014]. Кроме того, из сравнения нормированного коэффициента Херфиндаля¹¹ для модельных сетей и случайных графов (рис. 16) следует, что модельная сеть, так же как и реальная, характеризуется значительной неравномерностью распределения коэффициента кластеризации между вершинами. Однако важно отметить, что абсолютные значения коэффициентов кластеризации значительно меньше, чем в случайном графе.

Рис. 16. Значения коэффициентов кластеризации для взвешенного ориентированного графа [Fagiolo, 2007] в модельных сетях и в случайных графах (с тем же распределением весов, что и модельных графах)

Рис. 17. Соотношение между долями треугольников разных типов в модельных сетях и в случайных графах (с тем же распределением весов, что и в соответствующих моделях)

¹¹ Нормированный коэффициент Херфиндаля H^* определяется следующим выражением:

$$H^* = \frac{H - 1/N}{1 - 1/N}, H^* \in [0, 1],$$

где $H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{C_i}{\sum_{j=1}^N C_j} \right)^2$ – индекс Херфиндаля; N – количество банков. Близкие к нулю значения H^*

характеризуют относительно равномерное распределение, тогда как близкие к единице величины свидетельствуют о наличии некоторых «доминантных игроков».

5. Заключение

В заключение перечислим как характеристики модельной сети, которые схожи с аналогичными характеристиками реальных сетей, так и те, которые не являются реалистичными.

Со свойствами реальных сетей совпадают следующие характеристики:

- в годовой модельной сети присутствует GSCC размера, сопоставимого с размерами аналогичных реальных компонент;
- распределения как In-, так и Out-степеней в модели характеризуются наличием тяжелых хвостов;
- распределение объемов размещенных средств также характеризуется наличием тяжелого хвоста;
- совокупная нагруженность In-ребер растет с ростом степени вершины;
- большая нагруженность Out-ребер характерна только для вершин с большой степенью;
- наблюдается свойство дисассортативности;
- в модельной сети, как и в реальной велика доля треугольников типа *mid* и мала доля треугольников типа *cus*;
- модельная сеть, так же как и реальная, характеризуется неравномерностью распределения коэффициента кластеризации по вершинам.

Отличие модельной сети от реальной заключается в следующем.

- В сетях малой агрегации (день, неделя) отсутствуют ориентированные циклы и, как следствие, GSCC. Наличие ориентированных циклов даже в реальных дневных сетях – следствие двух факторов. Во-первых, наличие сделок длительности более чем *overnight* и, во-вторых, наличие посредничества, при котором банк выступает одновременно и кредитором, и заемщиком. Оба этих фактора отсутствуют в исследуемой модели на данный момент.

- В модельной сети слишком мала доля банков, которые не выходят на рынок МБК, кроме того, мала доля чистых кредиторов. Доля банков, выполняющих одновременно роль заемщиков и кредиторов, напротив, велика по сравнению с реальной. Данные различия, вероятно, связаны с отсутствием планирования у банков. Наличие планирования могло бы снизить долю банков, выходящих на рынок МБК в качестве заемщиков, что увеличило бы долю банков, вообще не выходящих на рынок МБК за счет уменьшения доли чистых заемщиков, и увеличило бы долю чистых кредиторов за счет уменьшения доли банков, выполняющих обе функции.

- Распределение по объемам привлеченных средств реальной сети, в отличие от модельной, характеризуется наличием тяжелых хвостов.

- Модельная сеть значительно менее кластеризована, чем реальные сети.

Обобщая перечисленные выше результаты, стоит отметить, что модели нулевого уровня с агентами-автоматами достаточно для описания довольно широкого спектра свойств, которыми обладают реальные сети. Тем не менее есть свойства, для воспроизводства которых требуется более глубокая проработка описания поведения агентов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ермолова М.Д., Леонидов А.В., Нечитайло В.А., Пеникас Г.И., Пильник Н.П., Серебрянникова Е.Е. Моделирование сетевых эффектов для российского рынка МБК [Электронный ресурс]: текст доклада на XIX Апрельской международной научной конференции НИУ ВШЭ, Москва, 13 апреля 2018 г. URL: https://events-files-bpm.hse.ru/files/_reports/EA2D1D10-E511-4008-84EB-723612C7B88B/2018%2003%2012%20ABM.pdf (дата обращения: 26.06.2018).

Леонидов А.В., Румянцев Е.Л. Оценка системных рисков межбанковского рынка России на основе сетевой топологии // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. Т. 3. № 19. С. 65–80.

Bargigli L. et al. The Multiplex Structure of Interbank Networks // Quantitative Finance. 2015. Vol. 15. № 4. P. 673–691.

Bech M.L., Atalay E. The Topology of the Federal Funds Market // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2010. Vol. 389. № 22. P. 5223–5246.

Fagiolo G. Clustering in Complex Directed Networks // Physical Review E. 2007. Vol. 76. № 2. P. 026107.

Elliott M., Golub B., Jackson M.O. Financial Networks and Contagion // American Economic Review. 2014. Vol. 104. № 10. P. 3115–3153.

Gai P., Haldane A., Kapadia S. Complexity, Concentration and Contagion // Journal of Monetary Economics. 2011. Vol. 58. № 5. P. 453–470.

Gai P., Kapadia S. Contagion in Financial Networks // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. The Royal Society, 2010. P. 2401–2423.

Karminsky A., Kostrov A. The Back Side of Banking in Russia: Forecasting Bank Failures with Negative Capital // International Journal of Computational Economics and Econometrics. 2017. Vol. 7. № 1–2. P. 170–209.

Leonidov A.V., Rumyantsev E.L. Default Contagion Risks in Russian Interbank Market // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2016. Vol. 451. P. 36–48.

Martinez-Jaramillo S. et al. An Empirical Study of the Mexican Banking System's Network and its Implications for Systemic Risk // Journal of Economic Dynamics and Control. 2014. Vol. 40. P. 242–265.

Newman M.E.J. The Structure and Function of Complex Networks // SIAM Review. 2003. Vol. 45. № 2. P. 167–256.

Santos E.B., Cont R. The Brazilian Interbank Network Structure and Systemic Risk // Banco Central Do Brasil Working Paper Series. № 219. 2010.

Soramäki K. et al. The Topology of Interbank Payment Flows // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. Vol. 379. № 1. P. 317–333.

Tabak B.M. et al. Directed Clustering Coefficient As a Measure of Systemic Risk in Complex Banking Networks // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2014. Vol. 394. P. 211–216.

Vandermarliere B., Ryckebusch J., Schoors K. Network Analysis of the Russian Interbank System // Master of Science Thesis at the Gent University. 2012.

Vandermarliere B. et al. Beyond the Power Law: Uncovering Stylized Facts in Interbank Networks // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2015. Vol. 428. P. 443–457.

Veld D. in't, van Lelyveld I. Finding the Core: Network Structure in Interbank Markets // Journal of Banking & Finance. 2014. Vol. 49. P. 27–40.

Vitali S., Glattfelder J.B., Battiston S. The Network of Global Corporate Control // PloS One. 2011. Vol. 6. № 10. P. e25995.

Interbank Network Topology in the Agent-based Model of Banking System

Andrey Leonidov¹, Vladimir Nechitailo², Ekaterina Serebryannikova³

¹ P.N. Lebedev Physical Institute,
53, Leninsky av., Moscow, 119333, Russian Federation.
E-mail: leonidov@lpi.ru

² P.N. Lebedev Physical Institute,
53, Leninsky av., Moscow, 119333, Russian Federation.
E-mail: nechit@lpi.ru

³ P.N. Lebedev Physical Institute,
53, Leninsky av., Moscow, 119333, Russian Federation.
E-mail: serebryannikova@lpi.ru

The study analyzes the topology of the interbank network in the agent-based model of the banking system with detailed description of the protocols and stylized one of the external (with respect to the banking system) economy. It is shown that the main incentive for the interbank market creation originates from liquidity gaps resulting from maturities mismatch between deposits and credits. The impact of this effect on the dynamics of total capital and cash in the case of increasing term structure of the yield curve generating credit and deposit's maturities mismatch as a result of banks optimizing behavior, is illustrated. Different properties of this graph are compared to those of the real interbank networks. It is shown that the model in which banks are represented by agents-automata can reproduce various topological properties of the real interbank networks. These properties are: significant size of the giant strongly connected component, fat-tailed nature of the distributions of In- and Out-degrees, fat-tailed nature of the distribution of allocated funds, disassortativity, nonuniformity of the distribution of clustering coefficient over the vertices. The properties which can be reproduced only in the model with a more detailed description of agents' behavior were also marked out. These properties are the following: absence of the oriented cycles in the networks with low aggregation of the data, low fraction of the banks not participating in the interbank market and of the net-creditor banks, absence of fat tails in the distribution over the borrowed funds, low clustering coefficient. The reasons for such a difference between the properties of model networks and the real ones are noted. The changes of the model needed to reproduce such properties of real networks are discussed.

Key words: agent-based model; interbank market; network topology; liquidity gap.

JEL Classification: C63, D85, G17, G21.

* *
*

References

- Ermolova M., Leonidov A., Nechitailo V., Penikas H., Pilnik N., Serebryannikova E. (2018) *Modelirovanie setevykh jeffektov dlja rossijskogo rynka MBK [Jelektronnyj resurs]: tekst doklada na XIX Aprel'skoj mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii NIU VShJe, Moskva, 13 aprelya 2018 g.* [Modelling of the Network Effects in the Russian Interbank Market: Materials for the Authors' Report in the XIX April International Academic Conference of the Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation, April 13, 2018]. Available at: https://events-files-bpm.hse.ru/files/_reports/EA2D1D10-E511-4008-84EB-723612C7B88B/2018%2003%2012%20ABM.pdf (accessed: 26.06.2018).
- Leonidov A.V., Rumyantsev E.L. (2013) Ocenka sistemnyh riskov mezhsbankovskogo rynka Rossii na osnove setevoj topologii [Leonidov A.V., Rumyantsev E.L. Russian Interbank Systemic Risks Assessment from the Network Topology Point of View]. *Journal of the New Economic Association*, 3, 19, pp. 65–80.
- Bargigli L. et al. (2015) The Multiplex Structure of Interbank Networks. *Quantitative Finance*, 15, 4, pp. 673–691.
- Bech M.L., Atalay E. (2010) The Topology of the Federal Funds Market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389, 22, pp. 5223–5246.
- Fagiolo G. (2007) Clustering in Complex Directed Networks. *Physical Review E*, 76, 2, p. 026107.
- Elliott M., Golub B., Jackson M.O. (2014) Financial Networks and Contagion. *American Economic Review*, 104, 10, pp. 3115–3153.
- Gai P., Haldane A., Kapadia S. (2011) Complexity, Concentration and Contagion. *Journal of Monetary Economics*, 58, 5, pp. 453–470.
- Gai P., Kapadia S. (2010) Contagion in Financial Networks. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, pp. 2401–2423.
- Karminsky A., Kostrov A. (2017) The Back Side of Banking in Russia: Forecasting Bank Failures with Negative Capital. *International Journal of Computational Economics and Econometrics*, 7, 1–2, pp. 170–209.
- Leonidov A.V., Rumyantsev E.L. (2016) Default Contagion Risks in Russian Interbank Market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 451, pp. 36–48.
- Martinez-Jaramillo S. et al. (2014) An Empirical Study of the Mexican Banking System's Network and its Implications for Systemic Risk. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 40, pp. 242–265.
- Newman M.E.J. (2003) The Structure and Function of Complex Networks. *SIAM Review*, 45, 2, pp. 167–256.
- Santos E.B., Cont R. (2010) *The Brazilian Interbank Network Structure and Systemic Risk*. Banco Central Do Brasil Working Paper Series, no 219.
- Soramäki K. et al. (2007) The Topology of Interbank Payment Flows. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379, 1, pp. 317–333.
- Tabak B.M. et al. (2014) Directed Clustering Coefficient As a Measure of Systemic Risk in Complex Banking Networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 394, pp. 211–216.
- Vandermarliere B., Ryckebusch J., Schoors K. (2012) *Network Analysis of the Russian Interbank System*. Master of Science Thesis at the Gent University.
- Vandermarliere B. et al. (2015) Beyond the Power Law: Uncovering Stylized Facts in Interbank Networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 428, pp. 443–457.
- Veld D. in't, van Lelyveld I. (2014) Finding the Core: Network Structure in Interbank Markets. *Journal of Banking & Finance*, 49, pp. 27–40.
- Vitali S., Glattfelder J.B., Battiston S. (2011) The Network of Global Corporate Control. *PloS One*, 6, 10, p. e25995.