

Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22. № 3. С. 330–361.
HSE Economic Journal, 2018, vol. 22, no 3, pp. 330–361.

Модель оптимального потребления при наличии возможности кредитования в случайные моменты времени¹

Жукова А.А., Поспелов И.Г.

В данной работе рассматривается классическая задача максимизации дисконтированной полезности при условии, что момент следующей покупки и получения кредита – случайный (пуассоновский). Цель исследования – моделирование случайного периода ожидания возможности изменения долга агента для того, чтобы учесть его влияние на потребление. Модель формулируется как задача оптимального стохастического управления. Потребитель в случайные моменты покупает продукт по неслучайной цене и в те же случайные моменты может брать и возвращать бессрочные кредиты. По кредитам агент непрерывно платит проценты. Он непрерывно получает дивиденды в виде внешнего поступления денег на счет и может накапливать беспроцентные безналичные деньги. Условия оптимальности получаются с помощью метода множителей Лагранжа. Достаточные условия оптимальности сводятся к уравнениям в частных производных с переменным и неизвестным запаздыванием. Их удается решить только сочетанием аналитических

¹ Исследование выполнено за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 17-01-00588 «Динамические модели экономики со случайным шагом по времени». Авторы благодарны С.И. Безродных за плодотворное обсуждение материалов.

Жукова Александра Александровна – к.физ.-мат.н., и.о. старшего научного сотрудника Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук; преподаватель кафедры математического моделирования сложных процессов и систем и оптимизации, доцент кафедры математических основ управления Московского физико-технического Института (Государственный университет); преподаватель департамента теоретической экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: sasha.mymail@gmail.com

Поспелов Игорь Гермогенович – д.физ.-мат.н., член-корреспондент РАН, заведующий отделом Вычислительного центра им. А.А. Дородницына Российской академии наук Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской академии наук, заведующий кафедрой математического моделирования сложных процессов и систем и оптимизации Московского физико-технического института (Государственный университет), ведущий научный сотрудник Научно-учебной лаборатории макроструктурного моделирования экономики России Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: pospeli@yandex.ru

Статья поступила: 24.07.2018/Статья принята: 20.09.2018.

разложений по малому параметру (обратной величине большой частоты сделок-продаж) и численных расчетов. Особую трудность представляет регуляризация («смягчение») условий дополняющей нежесткости. В результате получены функции, определяющие оптимальное управление процессом покупок потребительского товара и размер кредита. На конечном интервале планирования можно проследить, как меняется потребление по мере приближения конца периода планирования. Во-первых, потребление определяется не запасом денег и долга в отдельности, а их разницей – собственными средствами потребителя. Во-вторых, вдали от горизонта планирования потребление мало и растет по мере приближения конечного момента времени. Такая модель может быть использована как часть описания агента-потребителя в динамических стохастических моделях общего равновесия.

Ключевые слова: полезность; оптимальное управление; пуассоновский процесс; множитель Лагранжа; долг; кредит.

DOI: 10.17323/1813-8691-2018-22-3-330-361

Введение

Экономические модели принято записывать в дискретном времени в соответствии с шагом сбора статистических данных. Однако такой подход приводит к избыточной синхронизации экономических процессов и даже необходимости решать бессмысленные вопросы типа «Что происходит раньше: все покупки или все продажи?». Реально экономические процессы реализуются обычно как потоки дискретных сделок, причем момент следующей сделки служит важным элементом неопределенности в экономике.

Цель работы – развитие методики моделирования экономики при случайной сетке шагов по времени. Исследовательский вопрос в рамках данной работы заключается в получении оптимального поведения агента-заемщика при случайной сетке шагов по времени. Данная модель строится как часть модели динамического стохастического общего равновесия. В данном случае представлена модель поведения потребителя. Стохастическая составляющая моделируется несовершенством рынка капитала в виде случайного потока моментов кредитования и ограничений кредитоспособности. Анализ этой модели, выведение оптимального потребления потребителя-заемщика дает представление о поведении этого агента при его взаимодействии с агентом-банком (или, в целом, произвольным кредитором), с учетом взаимного влияния кредитов на поведение агента в роли покупателя на рынке потребительского товара. Отдельные предположения модели встречаются в формулировках моделей DSGE. Мгновенная полезность потребления является стандартной для DSGE-моделей полезностью (см.: [Smets, Wouters, 2007]), ограничения ликвидности вызывают несовершенства финансовых рынков в других моделях (см.: [Bernanke, Gertler, Gilchrist, 1999; Fernández-Villaverde, 2010] – для фирм-заемщиков, [Christiano, Motto, Rostagno, 2014] – в случае предпринимателей в составе домашних хозяйств, которые получают займы на проекты у паевых фондов). Возможность брать кредиты на потребление моделируется в работах [Bilbiie, Monacelli, Perotti, 2013; Eggertsson, Krugman,

2012] и в следующих за ними статьях. В этих работах за основу взята DSGE-модель с домашними хозяйствами, занимающими средства в условиях ограниченного размера долга, но авторы заранее предполагают, что такие ограничения будут активны для агенто-должников в стационарном состоянии. В нашей работе вводится случайная последовательность сделок по покупке товара и получению займов, а также, в отличие от большинства работ, не делается предварительных предположений о том, что ограничение на долг потребителя активно, а наоборот, исследуется и демонстрируется, в каких случаях оно активно, а в каких нет, и какие нелинейные эффекты проявляются в пространстве возможных состояний агента. Тем самым, показано, что существенная нелинейность требует выхода за рамки методов линеаризации при исследовании моделей типа DSGE. Проблема получения точного решения оптимизационных задач в прикладных стохастических моделях общего равновесия обозначена в работе [Arefev, 2011]. Данное исследование представляет также один из способов анализа возникающих оптимизационных задач.

В данной работе рассматривается классическая задача максимизации дисконтированной полезности при условии, что момент следующей покупки – случайный (пуассоновский). Эта задача оказывается чрезвычайно сложной. Условия оптимальности сводятся к уравнениям в частных производных с переменным и неизвестным запаздыванием. Их удается решить только сочетанием тонких аналитических разложений по малому параметру (обратной величине большой частоты сделок-продаж) и численных расчетов. Особую трудность представляет регуляризация («смягчение») условий дополняющей жесткости.

Рынок кредитования позволяет потребителям получить средства для расходов на текущее потребление. Идеальными для потребителя были бы условия, при которых он может занимать деньги в тот момент, когда ему это необходимо. Однако реальные рынки займа несовершенны. Асимметрия информации, моральный риск (*moral hazard*), отрицательный отбор, скрытая информация, риск дефолта создают условия, при которых взаимодействие на кредитном рынке заемщика и кредитора становится длительным процессом, сопровождающимся дополнительными издержками на формирование и осуществление контракта [Stiglitz, Weiss, 1981; Gertler, Gilchrist, 1993; Gottfries, 1991]. Авторы работы [Karlan, Zinman, 2009] обнаружили, что наибольшую роль на рынке потребительского кредита играет моральный риск. Потребление, более чувствительное к колебаниям текущего дохода, наблюдается в тех регионах, в которых потребители меньше берут в долг [Jappelli, Pagano, 1989]. Также замечено, что улучшение возможностей кредитования за счет доступа к иностранным финансовым рынкам помогает потребителям смягчать колебания доходов [Leblebicioğlu, 2009].

Поскольку имеет место несовершенство рынка кредита, процесс кредитования занимает время и динамика долга может иметь довольно сложную структуру. Было обнаружено, что показатели деятельности кредитных организаций по различным видам деятельности имеют большой спектр характерных частот изменений [Дедова, Малахов, Пильник, 2017]. В частности, размер текущего долга по потребительскому кредиту на агрегированном уровне не является непрерывным процессом, а скорее напоминает случайный процесс со случайным периодом исходящих и входящих платежей.

Модели макроэкономической динамики учитывают неравномерность принятия решений экономическими агентами. Наиболее часто используют предположения об устойчивости (*stickiness*) или негибкости цен товаров. Гибкость означает возможность цен

меняться со временем. Модели устойчивых цен возникли как альтернатива абсолютной, в неоклассических моделях экономики, гибкости цен. В неокейнсианских моделях стали возникать предположения с устойчивостью цен, заработных плат и других показателей. Цены могут меняться в фиксированные моменты времени [Taylor, 2016], обусловленные предположениями модели (рыночным механизмом). Более сложным является предположение о случайных моментах смены цен, причем случайные процессы независимы у всех экономических агентов [Calvo, 1983; Taylor, 2016]. Исследования часто опираются на то, что частота изменений цен низкая, что, в свою очередь, дает возможность монетарной политике повлиять на реальную экономику [Kehoe, Midrigan, 2015].

Современные прикладные модели экономической динамики часто опираются на неокейнсианские предположения об инерционности цен. Популярным инструментом макроэкономического анализа и прогнозирования являются модели вычислимого общего равновесия (CGE) и динамические стохастические модели общего равновесия (DSGE). В такие модели вводятся предположения не только инерционности цен, но и заработных плат [Taylor, 2016], моментов смены других управляемых экономическими агентами переменных [Arefev, 2011].

Потребители могут учитывать фактор неопределенности в ожидании момента возможности сделки в процессе принятия решений. Это касается спроса на потребительский продукт, который был исследован в моделях [Жукова, Поспелов, 2012; Поспелов, 2018]. В данном исследовании к спросу на потребительский продукт добавляется спрос на кредит и используется тот же подход, что и в работах [Жукова, Поспелов, 2012; 2014]. Вместе с возможностью взять кредит накладывается ограничение кредитоспособности, которое исключает возможность банкротства агента. Введение ограничения на задачу оптимального поведения агента добавляет существенную сложность в математический анализ модели. Для того чтобы ее преодолеть, предпринята попытка смягчения условий дополняющей нежесткости, сходная с тем, что предлагают для моделей общего равновесия [Васильев, Пильник, Радионов, 2018].

Статья состоит из введения, трех разделов и заключения. В первом разделе описывается модель поведения потребителя, который берет заем в случайные моменты времени. В этом разделе ставится задача оптимального стохастического управления. Второй раздел исследует предложенную математическую модель с помощью методов оптимального управления. Формулируются достаточные условия оптимальности поведения потребителя. С помощью аналитических методов и численных расчетов находится приближенное решение оптимизационной задачи для разного значения переменных времени и переменных, описывающих текущее состояние агента. Третий раздел подводит итог проделанному анализу математической задачи и обсуждает результаты. В заключении делаются выводы и обозначаются дальнейшие направления исследований.

1. Описание модели

Данная работа концентрируется на роли случайности во времени смены состояния агента-потребителя. Потребитель в случайные моменты покупает продукт по неслучайной цене и в те же случайные моменты может брать и возвращать бессрочные кредиты. По кредитам агент непрерывно платит проценты. Он непрерывно получает дивиденды в виде внешнего поступления денег на счет и может накапливать беспроцентные безличные деньги.

Состояние экономического агента характеризуется следующими величинами:

$L(t)$ – текущий объем кредитов, полученных агентом (текущий долг);

$A(t)$ – текущий запас денег у агента;

$Y(t)=A(t)-L(t)$ – текущий размер собственных средств;

$C(t)$ – величина текущего потребления;

$K(t)$ – величина кредита.

Внешними переменными для агента являются

$r(t)$ – процентная ставка по займам;

$Z_{\pi}(t)$ – внешний доход (дивиденды);

$p_y(t)$ – цена потребления.

Эти функции предполагаются неслучайными и настолько гладкими, насколько потребуется для решения задачи.

Поток случайных моментов возможности взять кредит описывается пуассоновским потоком и обозначается переменной $\eta(t)$. Формальная запись использует следующие обозначения: $d\eta(t) = 1$, если в малой окрестности момента времени t возможность сделки наступает; $d\eta(t) = 0$, если возможность сделки не наступает. Вводится переменная Λ , обозначающая интенсивность пуассоновского потока моментов возможности взять кредит.

Запас денег у агента выражается функцией $A(t)$ и растет за счет внешних доходов (дивидендов) $Z_{\pi}(t)$, уменьшается из-за выплаты процентов по займам $L(t)$, увеличивается за счет кредита $K(t)$ и скачком меняется на стоимостную оценку покупки потребительского товара $C(t)$, который агент покупает по неслучайной цене, целым куском, в момент получения кредита. Было бы более реалистично предположить два случайных процесса для кредитов и покупок, но пока мы рассматриваем модель с одним процессом. Динамика запаса денег $A(t)$:

$$(1) \quad dA(t) = Z_{\pi}(t)dt - r_i(t)L(t)dt - p_y(t)C(t)d\eta(t) + K(t)d\eta(t).$$

Динамика текущего долга агента $L(t)$:

$$(2) \quad dL(t) = K(t)d\eta(t).$$

1.1. Ограничения

Модель предполагает, что в любой момент времени потребитель может брать кредит, но исключена возможность его выдавать, т.е.

$$(3) \quad L(t) \geq 0.$$

Дополнительное предположение кредитоспособности агента заключается в том, что количество денег на руках у потребителя не может быть отрицательным, т.е. он всегда кредитоспособен:

$$(4) \quad A(t) \geq 0.$$

Также вводится ограничение на рост капитала потребителя по аналогии с работой [Поспелов, Пильник, 2007]:

$$(5) \quad A(T) + aL(T)L(T) \leq (A(t_0) + aL(t_0)L(t_0))e^{\gamma(T-t_0)}.$$

Это ограничение исключает возникновение так называемых «пузырей». Стоит заранее предупредить, что в данной работе такое терминальное ограничение рассматривалось, но возникающие сложности математических формул пока не позволили получить какие-либо результаты. Основная проблема заключается в том, что, поскольку момент переключения управления случайный, с положительной вероятностью интервал с момента последнего переключения управления до горизонта планирования T может быть сколь угодно большим, и поэтому нет возможности обеспечить точного выполнения условий на терминальные значения. Поэтому такое ограничение было заменено на штраф для терминальных значений переменных $A(T), L(T)$ в виде терминального члена в целевой функции агента, изложенной ниже.

1.2. Задача потребителя

Перед потребителем стоит задача выбора стратегии поведения во время возможных сделок по получению кредита $K(t)$, руководствуясь задачей *максимизации* ожидаемой полезности:

$$(6) \quad E \left\{ \int_0^T U \left(\frac{C(t)}{C_0} \right) e^{-\Delta t} d\eta(t) + W(A(T) - L(T)) \right\}.$$

Здесь $U \left(\frac{C(t)}{C_0} \right)$ – моментальная полезность потребления товара в объеме $C(t)$.

Предполагается, что $U'(0) = \infty$ и, в частности, в анализе далее, что $U(X) = \ln(X)$. Запись $\int_0^T U \left(\frac{C(t)}{C_0} \right) e^{-\Delta t} d\eta(t)$ означает, что потребитель получает полезность потребления в момент покупки продукта в объеме $C(t)$, а константа C_0 служит для того, чтобы аргумент полезности был безразмерной величиной. Ограничение $C(t) > 0$ должно выполняться автоматически в силу того, что $U'(0) = \infty$. Дисконтирующий множитель $e^{-\Delta t}$ определяет степень «нетерпеливости» агента через параметр Δ .

Здесь $W(A - L)$ – функция штрафа на значение собственных средств в конечный момент времени. Ее мы предполагаем квадратичной функцией там, где она отлична от нуля.

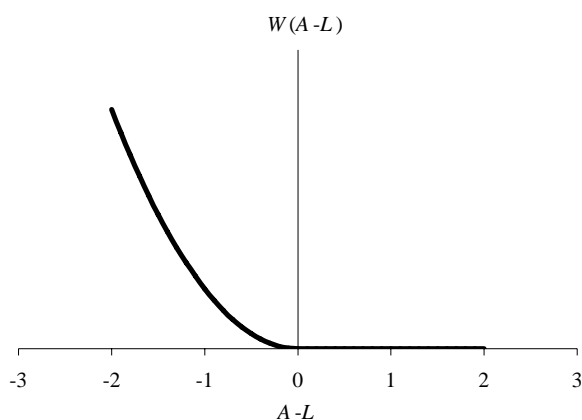


Рис. 1. Функция штрафа на терминальные значения собственных средств агента

Все процессы $A(\cdot)$, $C(\cdot)$, $K(\cdot)$, $L(\cdot)$, $Y(\cdot)$ считаются полунепрерывными слева с определенным пределом справа процессами, адаптированными к естественной фильтрации $\{E_t\}_{t \geq 0}$, порожденной случайным пуассоновским процессом $\eta(\cdot)$. Все математические ожидания в данной статье понимаются как интегралы по мере на $\{E_t\}_{t \geq 0}$, определенной пуассоновским процессом $\eta(\cdot)$ с частотой Λ .

Задача состоит в поиске оптимального неупреждающего управления в виде двух процессов $C(\cdot)$ и $K(\cdot)$ такого, что при заданных начальных условиях $A(0)$, $C(0)$, $K(0)$, $L(0)$ процессы $A(\cdot)$, $C(\cdot)$, $K(\cdot)$, $L(\cdot)$ удовлетворяют (1), (2) и ограничениям (3), (4), а функционал (6) достигает максимума.

2. Анализ модели

Решение задачи основывается на идее поиска оптимального управления как седловой точки функционала Лагранжа без ограничений [Жукова, Поспелов, 2012; Жукова, Поспелов, 2014]. Ниже приведен этот функционал. В нем двойственные переменные (произвольного знака) к ограничениям-равенствам (1), (2) обозначены $\tilde{\Psi}_1(t)$, $\tilde{\Psi}_2(t)$, а неотрицательные двойственные переменные к ограничениям типа неравенства (3), (4) обозначены $\tilde{\Phi}_1(t)$, $\tilde{\Phi}_2(t)$ соответственно.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}_{[\tilde{\Psi}_1(\cdot), \tilde{\Psi}_3(\cdot), \tilde{\Phi}_2(\cdot), \tilde{\Phi}_4(\cdot)]}[A(\cdot), L(\cdot), K(\cdot), C(\cdot)] = \\
& = \mathbb{E} \left[\int_0^T U \left(\frac{C(t)}{C_0} \right) e^{-\Delta t} d\eta(t) + \tilde{\Psi}_1(t) (K(t)d\eta(t) - dL(t)) + \right. \\
(7) \quad & + \tilde{\Phi}_2(t)A(t)dt + \tilde{\Phi}_4(t)L(t)dt + \\
& \left. + \tilde{\Psi}_3(t) \left(Z_\pi(t) - r(t)L(t) - p_y(t)C(t)d\eta(t) + K(t)d\eta(t) - dA(t) \right) \right] + \\
& + W(A(T) - L(T)) \Big].
\end{aligned}$$

Авторы статьи [Rockafellar, Wets, 1977] предложили включать в функционал Лагранжа ограничения неупреждения. Мы этого не делаем, поскольку достаточные условия подразумевают поиск двойственных к этим ограничениям, что является довольно сложной задачей.

Для того чтобы корректно определить функционал \mathcal{L} , необходимо определить класс, в котором ищутся двойственные переменные. Будем считать их достаточно гладкими функциями от $\{t, A(t+0), L(t+0)\}$. Поэтому считаем, что

$$(8) \quad \tilde{\Psi}_{1,3}(t) = \Psi_{1,3}(t, A(t+0), L(t+0)).$$

Определенные так множители Лагранжа оказываются непрерывными справа функциями времени, с разрывами только в точках скачка процесса $\eta(t)$. Что же касается $\tilde{\Phi}_{2,4}(t)$, то указанные ниже условия дополняющей нежесткости можно считать конечным уравнением, выражающим $\tilde{\Phi}_{2,4}(t)$ через $A(t), L(t)$, поэтому для $\tilde{\Phi}_{2,4}(t)$ естественно ожидать непрерывности слева. Подводя итог, все функции в (7) считаются однозначными, кусочно-непрерывными и ограниченными. Тогда интегралы по $dA(t)$, $dL(t)$ и $d\eta(t)$ можно понимать в следующем смысле:

$$(9) \quad \int_a^b \lambda(t) dn(t) \triangleq \sum_{k=0}^T \lambda(\tau_k) \Delta n_k + \sum_{k=0}^T \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \lambda(t) n'(t) dt,$$

где $n, \lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ – кусочно-непрерывные функции, которые имеют на отрезке $[a, b]$ конечное число разрывов первого рода в точках τ_k , $k = 1, \dots, T$, $\tau_0 \triangleq a$, $\tau_{T+1} \triangleq b$, причем $n(\cdot)$ – дифференцируема между разрывами. Хотя формула интегрирования по частям для (9) неверна в произвольном случае, в том специальном случае, который нам понадобится, она имеет место. Можно доказать утверждения (см.: [Жукова, Поспелов, 2012]).

Утверждение 1. Если $n(\cdot)$ – непрерывна слева, а $\lambda(\cdot)$ – непрерывна справа, а между разрывами обе функции гладкие, и a, b не являются точками их разрыва, то для (9) выполняется соотношение

$$\int_a^b \lambda(t) dn(t) = n(b)\lambda(b) - n(a)\lambda(a) - \int_a^b n(t) d\lambda(t).$$

Утверждение 2. Пусть n, λ – измеримые относительно меры \mathbb{N} процессы (неважно, неупреждающие или нет) с кусочно-непрерывными (неважно, справа или слева) экспоненциально ограниченными реализациями, причем реализации λ могут иметь разрывы только в моменты τ_k скачков процесса η , а в промежутках λ имеет производную $\frac{d\lambda}{dt}$. Тогда

$$\mathbf{E} \left\{ \int_a^\infty n(t) d\lambda(t) \right\} = \int_a^\infty \mathbf{E} \left\{ n(t) \frac{d\lambda}{dt}(t) + \Lambda \mathbf{E} \{ n(t) \Delta \lambda(t) | t = \tau_k \} \right\} dt,$$

где $\mathbf{E} \{ \cdot | t = \tau_k \}$ – ожидание при условии, что в момент t происходит событие пуассоновского потока η . Оно определено корректно, поскольку τ_k – марковский момент.

Эти утверждения позволяют сформулировать утверждения относительно седловой точки функционала Лагранжа (7).

Утверждение 3. Пусть для некоторых непрерывных справа (необязательно неупреждающих) процессов $\tilde{\psi}_1(t), \tilde{\psi}_2(t), \tilde{\phi}_2(t) \geq 0, \tilde{\phi}_4(t) \geq 0$ таких, что интеграл в (7) с учетом определения (9) сходится при всех $\langle A(\cdot), L(\cdot), K(\cdot), C(\cdot) \rangle \in \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C}^2$, найдется тройка неупреждающих процессов $\langle \hat{A}_\eta(\cdot), \hat{L}_\eta(\cdot), \hat{K}_\eta(\cdot), \hat{C}_\eta(\cdot) \rangle \in \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C}$, удовлетворяющих заданным начальным условиям на $A(0), L(0)$, которые

а) доставляют максимум функционалу Лагранжа (7)

$$(10) \quad \langle \hat{A}_\eta(\cdot), \hat{L}_\eta(\cdot), \hat{K}_\eta(\cdot), \hat{C}_\eta(\cdot) \rangle \in \underset{\langle A(\cdot), L(\cdot), K(\cdot), C(\cdot) \rangle}{\text{Argmax}} \mathcal{L}_{[\tilde{\psi}_1(\cdot), \tilde{\psi}_2(\cdot), \tilde{\phi}_2(\cdot), \tilde{\phi}_4(\cdot)]} [A(\cdot), L(\cdot), K(\cdot), C(\cdot)],$$

по множеству неупреждающих процессов $\langle A(\cdot), L(\cdot), K(\cdot), C(\cdot) \rangle$ с реализациями из $\mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C} \times \mathbb{L}\mathbb{C}$ с заданными начальными условиями $A(0), L(0)$;

б) почти наверное при всех t удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости

$$(11) \quad d\hat{L}_\eta(t) = \hat{K}_\eta(t) d\eta(t),$$

² Под $\mathbb{L}\mathbb{C}$ понимается пространство непрерывных слева ограниченных функций.

$$(12) \quad d\hat{A}_\eta(t) = Z_\pi(t)dt - r_l(t)\hat{L}_\eta(t)dt - p_y(t)\hat{C}_\eta(t)d\eta(t) + \hat{K}_\eta(t)d\eta(t),$$

$$(13) \quad \hat{A}_\eta(t) \geq 0, \hat{L}_\eta(t) \geq 0, \tilde{\Phi}_2(t) \geq 0, \tilde{\Phi}_4(t) \geq 0, \tilde{\Phi}_2(t)\hat{A}_\eta(t) = 0, \tilde{\Phi}_4(t)\hat{L}_\eta(t) \geq 0.$$

Тогда $\langle \hat{A}_\eta(\cdot), \hat{L}_\eta(\cdot), \hat{K}_\eta(\cdot), \hat{C}_\eta(\cdot) \rangle$ – решение задачи, поставленной в подразделе 1.2.

При поиске максимума функционала Лагранжа возникает необходимость интегрировать по частям, чтобы исключить дифференциалы фазовых переменных ($dA(t), dL(t)$). Выполнив эту операцию, остается варьировать функционал Лагранжа по фазовым переменным $A(\cdot), L(\cdot)$ и управлениям $K(\cdot), C(\cdot)$, чтобы получить достаточные условия оптимальности.

Утверждение 4. Если с вероятностью 1 процессы $\tilde{\Psi}_1(t), \tilde{\Psi}_2(t), \tilde{\Phi}_2(t) \geq 0, \tilde{\Phi}_4(t) \geq 0$ гладкие между скачками процесса η , то для (10) достаточно выполнения с вероятностью 1 следующих соотношений:

$$(14) \quad \mathbf{E}_{\eta[t,T]} \left\{ \Lambda \mathbf{E} \left\{ \tilde{\Psi}_3(t) - \tilde{\Psi}_3(t-0) \mid t = \tau_k \right\} + \frac{d}{dt} \tilde{\Psi}_3(t) + \tilde{\Phi}_4(t) \right\} = 0,$$

$$(15) \quad \mathbf{E}_{\eta[t,T]} \left\{ \Lambda \mathbf{E} \left\{ \tilde{\Psi}_1(t) + \tilde{\Psi}_3(t) \mid t = \tau_k \right\} \right\} = 0,$$

$$(16) \quad \mathbf{E}_{\eta[t,T]} \left\{ \Psi_1(t) - \Psi_1(t-0) + \Phi_2(t)dt - r_l(t)\Psi_3(t)dt \right\} = 0,$$

$$(17) \quad \mathbf{E}_{\eta[t,T]} \left\{ \Lambda \mathbf{E} \left\{ D(U) \left(\frac{\hat{C}_\eta(t)}{C0} \right) e^{-\Delta t} C0^{-1} - p_y(t)\tilde{\Psi}_3(t) \mid t = \tau_k \right\} \right\} = 0.$$

$$(18) \quad \mathbf{E}_{\eta[T-dt,T]} \left\{ -\tilde{\Psi}_1(T) + W'(\hat{A}_\eta(T) - \hat{L}_\eta(T)) \right\} = 0,$$

$$(19) \quad \mathbf{E}_{\eta[T-dt,T]} \left\{ -\tilde{\Psi}_3(T) - W'(\hat{A}_\eta(T) - \hat{L}_\eta(T)) \right\} = 0.$$

Ниже в выражениях участвуют только оптимальные процессы $\langle \hat{A}_\eta(\cdot), \hat{L}_\eta(\cdot), \hat{K}_\eta(\cdot), \hat{C}_\eta(\cdot) \rangle$ поэтому индекс η и «шляпку» в их обозначении опускаем.

В соотношениях (14)–(17) остается учесть выражения (8)

$$(20) \quad \mathbf{E} \left\{ \tilde{\Psi}_{1,3}(t) \mid t = \tau_k \right\} = \Psi_{1,3}(t, A(t) - p_y(t)C(t) + K(t), L(t) + K(t)),$$

$$(21) \quad \mathbf{E} \left\{ (\tilde{\Psi}_{1,3}(t) - \tilde{\Psi}_{1,3}(t-0)) \mid t = \tau_k \right\} = \\ = \Psi_{1,3}(t, A(t) - p_y(t)C(t) + K(t), L(t) + K(t)) - \Psi_{1,3}(t, A(t), L(t)).$$

Между скачками, согласно (11), (12),

$$\begin{aligned} dL(t) &= 0, \\ dA(t) &= Z_{\pi}(t)dt - r_l(t)L(t)dt, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\Psi_{1,3}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\Psi_{1,3}(t, A(t), L(t)) + (Z_{\pi}(t) - r_l(t)L(t))\frac{\partial}{\partial A}\Psi_{1,3}(t, A(t), L(t)).$$

Как отмечалось выше, исходя из (13), естественно искать $\tilde{\Phi}_2(t)$ и $\tilde{\Phi}_4(t)$ как непреждающие непрерывные слева процессы. Поскольку реализации процесса $\langle A(t), L(t) \rangle$ блуждают по верхней полуплоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, выполнения достаточных условий оптимальности естественно требовать не вдоль отдельной траектории, а тождественно по всему пространству состояний. Тогда, считая C и K функциями состояния, $C(t) = C(t, A(t), L(t))$, $K(t) = K(t, A(t), L(t))$, получаем уравнения для определения двойственных переменных.

Достаточные условия максимума функционала (7) приводят к системе уравнений в частных производных и трем условиям дополняющей нежесткости. Если искать двойственные переменные и управления как функции от состояния (t, L, A) , то решение системы достаточных условий сводится к системе уравнений, изложенной в следующем разделе.

На значения $A(T), L(T)$ в конце периода планирования накладываются терминальные условия:

$$(22) \quad \begin{aligned} -\Psi_1(T, A, L) + W'(A - L) &= 0, \\ -\Psi_3(T, A, L) - W'(A - L) &= 0. \end{aligned}$$

Далее вместо $W'(x)$ будет использоваться функция

$$w(x) = W'(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2}, & x \leq 0, \\ 0, & x \geq 0. \end{cases}$$

Чем больше параметр a , тем сильнее штрафуются отрицательные значения собственных средств в конечный момент времени.

Итак, рассматривается система уравнений

$$(23) \quad \Phi_2(t, A, L)L = 0,$$

$$(24) \quad \Phi_4(t, A, L)A = 0,$$

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_3(t, A, L) &= -\phi_4(t, A, L) - U' \left(\frac{C(t, A, L)}{C_0} \right) \frac{e^{-\Delta t} \Lambda}{p_y(t) C_0} + \\ &+ \Psi_3(t, A, L) \Lambda + \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_3(t, A, L) \right) r_l(t) L - \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_3(t, A, L) \right) Z_\pi(t), \end{aligned}$$

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(t, A, L) &= -\phi_2(t, A, L) + r_l(t) \Psi_3(t, A, L) + \Psi_1(t, A, L) \Lambda + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_1(t, A, L) \right) r_l(t) L - \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_1(t, A, L) \right) Z_\pi(t) + \\ &+ U' \left(\frac{C(t, A, L)}{C_0} \right) \frac{e^{-\Delta t} \Lambda}{p_y(t) C_0}, \end{aligned}$$

$$(27) \quad \begin{aligned} \Psi_3(t, -p_y(t)C(t, A, L) + K(t, A, L) + A, K(t, A, L) + L) &= \\ &= U' \left(\frac{C(t, A, L)}{C_0} \right) \frac{e^{-\Delta t}}{p_y(t) C_0}, \end{aligned}$$

$$(28) \quad \begin{aligned} \Psi_1(t, -p_y(t)C(t, A, L) + K(t, A, L) + A, K(t, A, L) + L) &= \\ &= -U' \left(\frac{C(t, A, L)}{C_0} \right) \frac{e^{-\Delta t}}{p_y(t) C_0}. \end{aligned}$$

2.1. Анализ достаточных условий оптимальности

В системе достаточных условий оптимальности присутствуют условия дополняющей нежесткости (23) и (24). Их наличие делает решение задачи негладким и сильно усложняет анализ остальных уравнений. Для того чтобы упростить анализ, было введено «смягчение» условий дополняющей нежесткости путем замены нулей в правых частях равенств на малые величины $\varepsilon r_l(t)$. Множитель $r_l(t)$ введен для нормировки.

$$(29) \quad \phi_2(t, A, L) L = \varepsilon r_l(t),$$

$$(30) \quad \phi_4(t, A, L) A = \varepsilon r_l(t).$$

Функция полезности агента предполагается логарифмической:

$$(31) \quad U(C) = \ln(C).$$

С учетом этих предположений система уравнений, определяющая оптимальные потребление $C(t, A, L)$ и кредитование $K(t, A, L)$, имеет вид

$$(32) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi_3(t, A, L) = -\frac{\varepsilon e^{-\Delta t} r_l(t)}{A} - \frac{e^{-\Delta t} \Lambda}{p_y(t) C(t, A, L)} + \Psi_3(t, A, L) \Lambda + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_3(t, A, L) \right) r_l(t) L - \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_3(t, A, L) \right) Z_\pi(t),$$

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi_1(t, A, L) = -\frac{\varepsilon e^{-\Delta t} r_l(t)}{L} + r_l(t) \Psi_3(t, A, L) + \Psi_1(t, A, L) \Lambda + \\ + \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_1(t, A, L) \right) r_l(t) L - \left(\frac{\partial}{\partial A} \Psi_1(t, A, L) \right) Z_\pi(t) + \frac{e^{-\Delta t} \Lambda}{p_y(t) C(t, A, L)},$$

$$(34) \quad \Psi_3(t, -p_y(t) C(t, A, L) + K(t, A, L) + A, K(t, A, L) + L) = \frac{e^{-\Delta t}}{p_y(t) C(t, A, L)},$$

$$(35) \quad \Psi_1(t, -p_y(t) C(t, A, L) + K(t, A, L) + A, K(t, A, L) + L) = \\ = -\frac{e^{-\Delta t}}{p_y(t) C(t, A, L)}.$$

Схема решения этой системы уравнений следующая: сначала решается уравнение (32) относительно $\Psi_3(t, A, L)$ приближенно при $\varepsilon \rightarrow 0$. Затем это решение подставляется во второе уравнение, и оно тоже решается приближенно при $\varepsilon \rightarrow 0$ относительно $\Psi_1(t, A, L)$. Эти выражения затем подставляются в функциональные уравнения (34) и (35), чтобы получить условия на искомые функции $C(t, A, L)$, $K(t, A, L)$.

Выражение для $\Psi_3(t, A, L)$, с учетом обозначения

$$-r_l(u)L + Z_\pi(u) = H(u, L),$$

имеет следующий вид:

$$(36) \quad \Psi_3(t, A, L) = e^{\Lambda t} \Lambda \int_t^T \frac{e^{-\Lambda \tau - \Delta \tau}}{p_y(\tau) C\left(\tau, \int_t^\tau H(u, L) du + A, L\right)} d\tau + \\ + e^{\Lambda t} \varepsilon \int_t^T \frac{r_l(\tau) e^{-\Lambda \tau - \Delta \tau}}{\int_t^\tau H(u, L) du + A} d\tau - w \left(\int_t^T H(u, L) du + A - L \right) e^{\Lambda t - \Lambda T}.$$

Запишем выражение для $\Psi_1(t, A, L)$:

$$\begin{aligned}
 \psi_1(t, A, L) = & \frac{e^{\Lambda t} \varepsilon \int_t^T r_l(\tau) e^{-\Lambda \tau - \Delta \tau} d\tau}{L} - e^{\Lambda t} \varepsilon \int_t^{\xi} \frac{r_l(\xi) \int_t^{\xi} r_l(\tau) d\tau e^{-\Lambda \xi - \Delta \xi}}{\int_t^{\xi} H(u, L) du + A} d\xi - \\
 (37) \quad & - e^{\Lambda t} \Lambda \int_t^{\xi} \frac{\int_t^{\xi} r_l(\tau) d\tau e^{-\Lambda \xi - \Delta \xi}}{C\left(\xi, \int_t^{\xi} H(u, L) du + A, L\right)} p_y(\xi) d\xi + \\
 & + e^{-\Lambda(T-t)} w \left(\int_t^T H(u, L) du + A - L \right) \int_t^T r_l(\tau) d\tau - \\
 & - e^{\Lambda t} \Lambda \int_t^T \frac{e^{-\Lambda \tau - \Delta \tau}}{p_y(\tau) C\left(\tau, \int_t^{\tau} H(u, L) du + A, L\right)} d\tau + e^{-\Lambda(T-t)} w \left(\int_t^T H(u, L) du + A - L \right).
 \end{aligned}$$

Эти выражения в интегральной форме содержат функцию управления $C(t, A, L)$ со сложным выражением в качестве второго аргумента функции:

$$\int_t^{\tau} H(u, L) du + A = -L \int_t^{\tau} r_l(u) du + Z_{\pi}(\tau) + A.$$

Эта величина имеет смысл размера собственных средств A за вычетом накопленного процента $\int_t^{\tau} r_l(u) du$ по долгу L в сумме с текущим доходом $Z_{\pi}(t)$.

2.2. Оптимальное поведение агента-потребителя вдали от горизонта планирования

Подстановка приведенных выше выражений в функциональные уравнения (34), (35) приводит к довольно объемным формулам. В данной статье они не приводятся. Работа с ними производилась с помощью компьютерной алгебры Maple, и выкладки могут быть высланы авторами статьи при необходимости.

Терминальные условия (22), с учетом полученных выражений, дают квадратное уравнение

$$\frac{A - L - p_y(T)C(T, A, L)}{a^2} = -\frac{e^{-\Delta T}}{p_y(T)C(T, A, L)},$$

единственным неотрицательным для всех $A-L$ корнем которого является функция

$$(38) \quad C(T, A, L) = \frac{A-L + \sqrt{A^2 - 2AL + L^2 + 4e^{-\Delta T} a^2}}{2p_y(T)}.$$

Это выражение будет использовано при приближенном решении функциональных уравнений (34), (35). Заметим, что выражения для $\Psi_1(t, A, L)$, $\Psi_3(t, A, L)$ содержат интегралы с множителями $e^{-\Lambda\tau - \Delta\tau}$. Если предположить параметр частоты сделок Λ большим, а $T \gg t$, это позволяет записать приближенные выражения для этих интегралов, пользуясь интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} e^{\Lambda t} \int_t^T f(u) e^{-\Lambda u} du &= \frac{1}{\Lambda} [f(t) - f(T) e^{-\Lambda(T-t)}] - \frac{1}{\Lambda} e^{\Lambda t} \int_t^T f'(u) e^{-\Lambda u} du \approx \\ &\approx \frac{1}{\Lambda} [f(t) - f(T) e^{-\Lambda(T-t)}] + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right). \end{aligned}$$

С учетом этого, уравнения (34), (35) в приближенном виде, при большом Λ и $\varepsilon \rightarrow 0$, принимают вид

$$(39) \quad 0 = \frac{e^{-\Delta t} \int_t^T r_l(u) du}{p_y(t) C(t, A, L)} - \frac{e^{\Lambda t} \Lambda \int_t^T r_l(u) du e^{-t(\Delta+\Lambda)}}{C(t, K(t, A, L) + A - p_y(t) C(t, A, L), K(t, A, L) + L) p_y(t) (\Delta + \Lambda)},$$

$$(40) \quad w \left(\int_t^T Z_\pi(u) du - K(t, A, L) \int_t^T r_l(u) du - L \int_t^T r_l(u) du - p_y(t) C(t, A, L) + A - L \right) =$$

$$= - \frac{e^{\Lambda T - \Lambda t - \Delta t}}{p_y(t) C(t, A, L)} +$$

$$+ e^{\Lambda T} \left(\frac{e^{-t(\Delta+\Lambda)}}{C(t, -p_y(t) C(t, A, L) + K(t, A, L) + A, K(t, A, L) + L) p_y(t) (\Delta + \Lambda)} - \frac{e^{-T(\Delta+\Lambda)}}{C(T, -p_y(T) C(t, A, L) + K(t, A, L) + A, K(t, A, L) + L) p_y(T) (\Delta + \Lambda)} \right) \Lambda.$$

Форма этих уравнений подсказывает искать решение для функции потребления как функции от количества собственных средств $A-L$. Рассмотрение различных вариантов показало, что наиболее подходящим является следующее выражение:

$$C(t, A, L) = c_1(t) \left(\frac{A-L}{2p_y(t)} + \frac{\sqrt{(A-L)^2 + 4e^{-\Delta T} a^2}}{2p_y(t)} \right).$$

Подстановка этого выражения в уравнения (39) и (40) позволяет определить функции $K(t, A, L)$ и $c_1(t)$. Для удобства записи сделана замена $A-L=Y$. В результате получаются следующие выражения:

$$(41) \quad C(t, A, L) = c(t, Y) = \frac{(\Delta^2 + 2\Delta\Lambda)}{(\Delta\Lambda + \Lambda^2)} \left(\frac{Y}{2p_y(t)} + \frac{\sqrt{Y^2 + 4e^{-\Delta T} a^2}}{2p_y(t)} \right),$$

$$(42) \quad K(t, Y + L, L) = -L + \frac{p_y(t)c(t, Y) - Y - \int_t^T Z_\pi(u) du}{\int_t^T r_l(u) du} + \frac{\int_t^T r_l(u) du \left(Y - p_y(t)c(t, Y) + \sqrt{(Y - p_y(t)c(t, Y))^2 + 4e^{-\Delta T} a^2} \right) (\Delta + \Lambda)}{2a^2 \Lambda e^{-\Delta T}}.$$

Потребление $C(t, A, L)$ зависит от текущих значений запаса денег A , долга L и цен потребительского товара $p_y(t)$. Размер кредита $K(t, A, L)$ зависит от накопленных процента $\int_t^T r_l(u) du$ (убывающим образом) и дохода $\int_t^T Z_\pi(u) du$ (тоже убывает).

Эти выражения дают ошибки порядка не менее $\frac{1}{\Lambda}$ при подстановке в уравнения. Вернее, одно выполняется точно, определяя $K(t, A, L)$, а второе с некоторой поправкой. Эта поправка небольшая, как показано ниже. Поскольку сами уравнения, с помощью которых находятся функции, получились в приближении порядка $\frac{1}{\Lambda}$, такую ошибку считаем приемлемой.

$$0 = 2 \frac{(Y^2 + 2e^{-\Delta T} a^2) \Delta}{Y p_y(t) \Lambda}, \quad Y > 0 \quad \text{и} \quad 0 = 2 \frac{\Delta^2 e^{-\Delta T} a^2}{Y p_y(t) \Lambda^2}, \quad Y < 0.$$

При малых $Y \sim ax$, ошибка в функциональных уравнениях

$$0 = \left(\frac{\Delta^2 ax^2}{\sqrt{x^2 + 4e^{-\Delta T}} p_y(t)} + \frac{\Delta^2 xa}{p_y(t)} \right) \Lambda^{-2}.$$

При малых $Y \sim \frac{x}{\Lambda}$ ошибка в функциональных уравнениях

$$0 = \frac{\Delta^2 x}{p_y(t) \Lambda^3}.$$

Таким образом, определены оптимальная функция потребления $C(t, A, L)$ и размер кредита $K(t, A, L)$ вдали от горизонта планирования, т.е. при $t \ll T$.

2.3. Оптимальное поведение агента-потребителя вблизи от горизонта планирования

Нами были получены уравнения для потребления и размеров кредита в предположении $t \ll T$. Для полноты картины нужно исследовать оптимальное поведение вблизи горизонта планирования. Для этого предположим, что $t = T - \frac{\theta}{\Lambda}$, где θ – некоторая положительная величина, небольшая по сравнению с величиной параметра частоты сделок Λ . Это позволяет исследовать систему уравнений, определяющую оптимальное управление, с помощью асимптотического анализа, немного отличающегося от того, что приведено в предыдущем разделе. Соответственно, оптимальное управление принимает другую форму.

$$C(t, A, L) = c_0 \left(T - \frac{\theta}{\Lambda}, A - L \right) = c(\theta, Y),$$

$$K(t, A, L) = k_0 \left(T - \frac{\theta}{\Lambda}, Y \right) = k(\theta, Y),$$

$$Y = A - L.$$

Применим эту замену к выражениям в рассматриваемой системе уравнений (34), (35). Для этого интегралы в (36), (37) раскладываются в ряд при $\Lambda \rightarrow \infty$. Затем полученные выражения подставляются в функциональные уравнения, берется предел $\varepsilon \rightarrow 0$, и снова выражения раскладываются в ряд по Λ . В результате, в первом приближении, получается, что одно уравнение вырождается в тождество $0 = 0$, а второе принимает вид

$$(43) \quad w(Y - p_y(T)c(\theta, Y)) = -\frac{e^{\theta - \Delta T}}{p_y(T)c(\theta, Y)} + \int_0^\theta \frac{e^{u - \Delta T}}{p_y(T)c(u, -p_y(T)c(\theta, Y) + Y)} du.$$

Упрощающая замена

$$c(\theta, Y) = \frac{\sigma(\theta, Y)}{p_y(T)}$$

приводит уравнение (43) к следующему уравнению, которое мы исследуем далее:

$$(44) \quad w(Y - \sigma(\theta, Y)) = -\frac{e^{\theta - \Delta T}}{\sigma(\theta, Y)} + \int_0^\theta \frac{e^{u - \Delta T}}{\sigma(u, Y - \sigma(\theta, Y))} du.$$

Если сделать замену переменных

$$\sigma(\theta, Y) = f\left(e^\theta, \frac{Ye^{\frac{\Delta T}{2}}}{a}\right) e^{-\frac{\Delta T}{2}}, \quad t = e^\theta, \quad x = \frac{Ye^{\frac{\Delta T}{2}}}{a},$$

то уравнение (44) примет более простую форму:

$$(45) \quad w(x - f(t, x)) = -\frac{t}{f(t, x)} + \int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau, x - f(\tau, x))}.$$

Напомним, что в левой части (44) и (45) стоит производная функции штрафа,

$$(46) \quad w(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 0, \\ \frac{z}{a^2}, & z \leq 0. \end{cases}$$

Анализ уравнения (45) проводился в двух областях.

Область I: рассматривалось значение $f(t, x)$ при $x - f(t, x) \leq 0$.

Область II: рассматривалось значение $f(t, x)$ при $x - f(t, x) \geq 0$.

Если рассматривать эти неравенства в координатах t, A, L , то неравенство $x - f(t, x) \geq 0$ может быть переписано как $A - L - p_y(t)C(t, A, L) \geq 0$, что означает, что собственные средства $A - L$ больше стоимости потребляемого товара $p_y(t)C(t, A, L)$ и

необходимость кредита может возникнуть только из-за возможного будущего недостатка средств. В случае противоположного неравенства $A - L - p_y(t)C(t, A, L) \leq 0$ означает недостаток собственных средств на оплату необходимой покупки и необходимость дополнительного займа.

2.4. Область I, $x - f(t, x) \leq 0$

Рассматривается уравнение

$$(47) \quad x - f(t, x) = -\frac{t}{f(t, x)} + \int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau, x - f(\tau, x))}.$$

Предполагается, что оптимальное управление принимает положительные конечные значения. Поэтому $0 < f(t, x) < +\infty$, $\forall t > 1, -\infty < x < +\infty$. Рассмотрим односторонний предел $t \rightarrow 1+0$. Если $f(t, x)$ отделена от нуля при $t \rightarrow 1+0$, то интеграл в равенстве стремится к нулю. Поэтому, в пределе,

$$x - f(1, x) = -\frac{1}{f(1, x)}.$$

У этого уравнения два решения:

$$f(1, x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}, \quad f(1, x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

Первое решение всегда положительно, а второе – всегда отрицательно. По смыслу задачи оптимальное управление – это размер потребления, не может принимать отрицательные значения. Поэтому решением задачи является положительный корень.

$$(48) \quad f(1, x) = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}.$$

В переменных (θ, Y) это выражение выглядит следующим образом:

$$(49) \quad C(T, A, L) = \sigma(0, A - L) = \sigma(0, Y) = \frac{Y}{2} + \frac{\sqrt{Y^2 + 4e^{-\Delta T} a^2}}{2}.$$

Выражение (48) служит краевым условием при построении приближенного решения и численных расчетах далее.

Рассмотрим асимптотику решения уравнения при $x \rightarrow -\infty$, а именно, асимптотическое разложение решения уравнения (47) при $x \rightarrow -\infty$ в виде ряда

$$(50) \quad f(t, x) = a_0(t) + \frac{a_1(t)}{x} + \frac{a_2(t)}{x^2} + \frac{a_3(t)}{x^3} + \frac{a_4(t)}{x^4} + \frac{a_5(t)}{x^5}.$$

При $a_0(t) \neq 0$ подстановка выражения (50) в уравнение (47) и разложение уравнения в ряд при $x \rightarrow -\infty$ приводит к равенству

$$x - a_0(t) - \frac{a_1(t)}{x} + O\left(t; \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{t}{a_0(t)} + \int_1^t \frac{1}{a_0(\tau)} d\tau - \left(\int_1^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)^2} d\tau - \frac{a_1(t)t}{a_0(t)^2} \right) \frac{1}{x} + O\left(t; \frac{1}{x^2}\right).$$

В этом равенстве порядки разложения по x в левой и правой частях не совпадают ни при каких $a_0(t)$. Поэтому рассматривается следующая форма приближенного решения:

$$(51) \quad f(t, x) = \frac{a_1(t)}{x} + \frac{a_2(t)}{x^2} + \frac{a_3(t)}{x^3} + \frac{a_4(t)}{x^4} + \frac{a_5(t)}{x^5}.$$

Это выражение при подстановке в уравнение (47) и разложении по x даст следующие коэффициенты при степенях x :

$$\begin{aligned} x^1: & \quad -\frac{t}{a_1(t)} - 1 + \int_1^t \frac{d\tau}{a_1(\tau)}, \\ x^0: & \quad \frac{a_2(t)t}{a_1(t)^2} - \int_1^t \frac{a_2(\tau)}{a_1(\tau)^2} d\tau, \\ x^{-1}: & \quad \frac{ta_3(t)a_1(t) - a_2(t)^2 t + a_1(t)^4}{a_1(t)^3} - \int_1^t \frac{a_3(\tau)}{a_1(\tau)^2} d\tau - a_1(t) \int_1^t \frac{1}{a_1(\tau)} d\tau + \int_1^t \frac{a_2(\tau)^2}{a_1(\tau)^3} d\tau, \\ x^{-2}: & \quad \frac{a_2(t)a_1(t)^4 - 2ta_2(t)a_3(t)a_1(t) + ta_4(t)a_1(t)^2 + a_2(t)^3 t}{a_1(t)^4} + 2 \int_1^t \frac{a_2(\tau)a_3(\tau)}{a_1(\tau)^3} d\tau - \\ & \quad - a_2(t) \int_1^t \frac{1}{a_1(\tau)} d\tau - \int_1^t \frac{a_4(\tau)}{a_1(\tau)^2} d\tau - \int_1^t \frac{a_2(\tau)^3}{a_1(\tau)^4} d\tau. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при различных степенях x к нулю и решая получившиеся уравнения, получаем коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

Решением являются функции:

$$a_1(t) = -1, \quad a_2(t) = 0, \quad a_3(t) = \ln(t) + 1, \quad a_4(t) = 0, \quad a_5(t) = -2 - 5\ln(t) - 2\ln(t)^2.$$

Это дает вид асимптотического приближения решения

$$(52) \quad f(t, x) = -\frac{1}{x} + \frac{\ln(t)+1}{x^3} - \frac{2+5\ln(t)+2\ln(t)^2}{x^5} + O\left(t; \frac{1}{x^7}\right).$$

Видно, что коэффициент при x^{-n} является суммой $\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} a^k (\ln(t))^k$. Есть возмож-

ность вывести соотношения, связывающие коэффициенты при x^{-n} с коэффициентами $x^{-(n-1)}$, но выражения довольно громоздки.

Подстановка этого выражения в уравнение (47) дает возможность посчитать ошибку. Перенесем все выражения в уравнении (47) в правую часть и найдем для каждого t приближенное выражение правой части для при $x \rightarrow -\infty$. В результате получается приближенное выражение для ошибки приближения:

$$0 = -\frac{14t \ln(t) + 9t - 4 + 15t \ln(t)^2}{x^5} + O\left(t; \frac{1}{x^7}\right).$$

Вернемся к начальным обозначениям:

$$(53) \quad C\left(T - \frac{\theta}{\Lambda}, A, L\right) = \sigma(\theta, Y) = -\frac{e^{-\Delta T} a^2}{Y} + \frac{a^4 (\theta + 1) e^{-2\Delta T}}{Y^3} - \frac{a^6 (\theta + 2) (2\theta + 1) e^{-3\Delta T}}{Y^5} + O\left(\theta; \frac{1}{Y^7}\right).$$

Это выражение дает приближенную форму решения в переменных (θ, Y) .

Полученная оценка решения может служить основой для численных расчетов решения уравнения (47) при произвольных значениях (t, x) .

2.5. Численные расчеты решения

Для того чтобы иметь представление о решении уравнения (47) при всех возможных значениях аргумента, предпринята попытка решить его численными методами. Применен метод, предложенный в работе [Безродных, Власов, 2015]. Метод заключается в построении итерационной процедуры, сходной с функциональным методом Ньютона.

Задача сформулирована следующим образом. Поиск решения уравнения (47) проводится при значениях аргумента $x \in [-50, 32]$, $t \in [1, 12]$, краевых условиях (48) и асимптотически приближенном значении решения (52) при $x = -50$.

Уравнение (47) имеет вид

$$(54) \quad F(f) = 0.$$

Итерационный метод состоит в пересчете

$$(55) \quad f_n = f_{n-1} - (D_0)^{-1} [F(f_{n-1})],$$

где $(L')^{-1}[\cdot]$ – обратный оператор к оператору производной Фреше оператора F в равенстве (54). Производная Фреше оператора F задается выражением

$$D[F(f)]h(t,x) = \underbrace{J(t,x)h(t,x)}_{D_0[F(f)]} + \int_1^t h(\tau, x - f(\tau, x))G(\tau, t, x) d\tau.$$

Функции $J(t, x)$ и G не приводятся в силу сложности выражений. Первое слагаемое $D_0[F(f)]h(t, x)$ допускает относительно несложное получение обратного оператора – делением на соответствующую функцию. Таким образом, обратный оператор к $D_0[F(f)]$ получается из равенства

$$(D_0)^{-1}[F(f)] = \frac{F(f)(t, x)}{J(t, x)}.$$

Это выражение и используется в итерационной процедуре (55).

В силу вычислительной сложности расчеты проводились для двух областей $x \in [-50, 0], t \in [1, 11]$ и $x \in [0, 32], t \in [1, 11]$ отдельно. Результаты расчетов в области $x \in [-50, 0], t \in [1, 11]$ использовались как краевые условия для расчетов в области $x \in [0, 32], t \in [1, 11]$. На рис. 2 изображен график полученной функции $f(t, x)$.

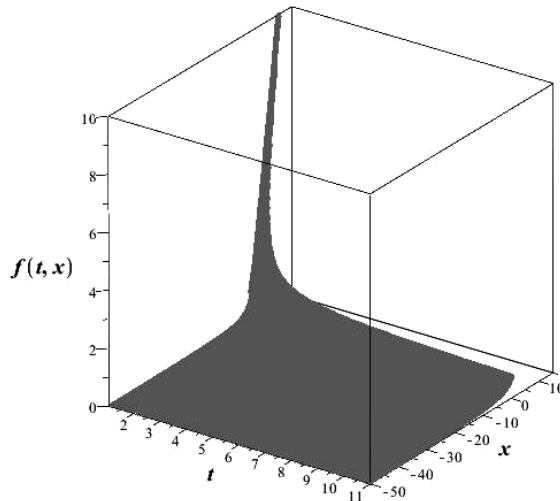


Рис. 2. Численные расчеты функции $f(t, x)$

Из рис. 2 видно, что при положительных x график имеет нелинейную границу. Дело в том, что на этой кривой происходит смена знака выражения $x - f(t, x)$ с отрицательного на положительный и соответственно смена уравнения, определяющего функцию $f(t, x)$ (см. уравнение (45)). Можно записать явное выражение для линии $\tilde{x}(t)$ смены знака:

$$0 = \tilde{x}(t) - f(t, \tilde{x}(t)) = -\frac{t}{f(t, \tilde{x}(t))} + \int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau, \tilde{x}(t) - f(t, \tilde{x}(t)))}.$$

Следовательно,

$$(56) \quad 0 = -\frac{t}{\tilde{x}(t)} + \int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau, 0)} \Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{t}{\int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau, 0)}}.$$

Имея численные расчеты значений функции $f(t, 0)$, можно получить численные значения функции $\tilde{x}(t)$.

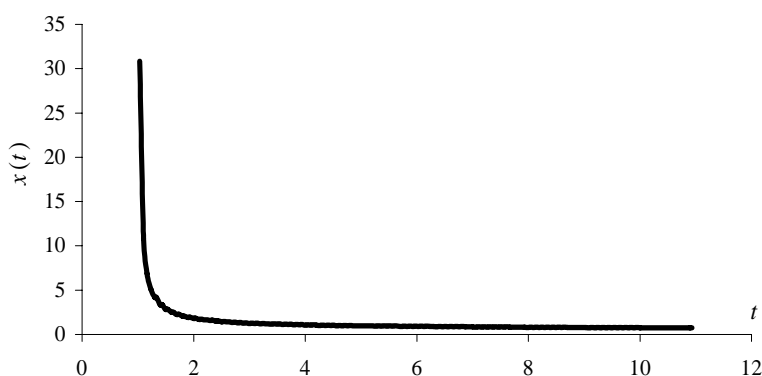


Рис. 3. Решение $\tilde{x}(t)$ уравнения $\tilde{x}(t) - f(t, \tilde{x}(t)) = 0$

Выражение для этой кривой, полученное методом наименьших квадратов, имеет вид

$$\tilde{x}(t) = 1,4(\ln(t))^{-\frac{3}{4}}.$$

Решение ниже этой границы $\tilde{x}(t)$ остается дополнить анализом решения выше этой границы, где $x - f(t, x) > 0$. Численные расчеты в этой области пока остаются сложной задачей, так как есть основания считать, что у уравнения (45) может быть несколько решений³, а также, как было сказано выше, из-за сложного краевого условия.

³ Также интересным вопросом является единственность решения рассматриваемого уравнения.

2.6. Область II, $x - f(t, x) \geq 0$

В рассматриваемой области, при $x - f(t, x) \geq 0$ уравнение (45) имеет вид

$$(57) \quad 0 = -\frac{t}{f(t, x)} + \int_1^t \frac{d\tau}{f(\tau, x - f(t, x))}.$$

Численные расчеты решения в данной области пока не получены, поскольку в данной области нет аналога условия (48) при $t = 1$, а лишь краевое условие (56) весьма сложной формы. Выходом из ситуации является асимптотически приближенное решение при малых x и немалых t (область одновременно малых t , и x находится вне рассматриваемой области – ниже $\tilde{x}(t)$, см. рис. 3), а также при больших x и произвольных t .

Рассмотрим следующее разложение решения $f(t, x)$ по x при больших значениях переменной x

$$f(t, x) = a_{-1}(t)x + a_0(t) + \frac{a_1(t)}{x} + \frac{a_2(t)}{x^2} + O\left(t; \frac{1}{x^3}\right).$$

Подставив эту функцию в уравнение (57) и разложив его в ряд по x при $x \rightarrow \infty$, и приравняв соответствующие коэффициенты к нулю, получается следующее выражение:

$$(58) \quad f(t, x) = \frac{x}{\ln(t)+1} + \frac{c_0}{\ln(t)+1} + c_1 e^{-\frac{1}{\ln(t)}} x^{-1} + \left(-c_1 c_0 e^{-\frac{1}{\ln(t)}} + c_2 (\ln(t)+1) e^{-\frac{1+6\ln(t)}{2\ln(t)^2}} \right) x^{-2}.$$

В переменных (θ, Y) эта функция имеет форму

$$(59) \quad C\left(T - \frac{\theta}{\Lambda}, A, L\right) = \sigma(\theta, Y) = c_0 \frac{e^{-\frac{\Delta T}{2} a}}{\theta+1} + \frac{Y}{\theta+1} + c_1 a^2 e^{-\Delta T \frac{1}{\theta}} Y^{-1} + \left((\theta+1) a^3 c_2 e^{-\frac{3\Delta T}{2} \frac{1}{2\theta^2} \frac{3}{\theta}} - a^3 c_1 c_0 e^{-\frac{3\Delta T}{2} \frac{1}{\theta}} \right) Y^{-2}.$$

В эти выражения входят произвольные константы c_0, c_1, c_2 , а если рассмотреть более старшие порядки разложения, то могут появиться константы в дополнительных

коэффициентах. Эти константы могли бы быть определены из условия соответствия решений ниже и выше границы $\tilde{x}(t)$, разделяющей области $x - f(t, x) \geq 0$ и $x - f(t, x) \leq 0$. Если наложить такое условие соответствия, то можно найти константы подстановкой (58) в уравнение (47) и разложением правой и левой части в ряд по x при $x \rightarrow \infty$ с приравнованием соответствующих коэффициентов. При этом стоит учитывать то, что граница между двумя областями приближается к вертикальной линии $t = 1$ (см. рис. 3 и формулу (56)) при $x \rightarrow \infty$. Условия на коэффициенты:

$$(60) \quad x : (\ln(t) + 1)^{-1} - 1 = 0,$$

$$(61) \quad x^0 : \frac{c_0}{\ln(t) + 1} = 0,$$

$$(62) \quad x^{-1} : c_1 e^{-\frac{1}{\ln(t)}} = 0,$$

$$(63) \quad x^{-2} : c_2 (\ln(t) + 1) e^{-\frac{3}{\ln(t)} - \frac{1}{2\ln(t)^2}} - c_0 c_1 e^{-\frac{1}{\ln(t)}} = 0.$$

Первое уравнение (60) не определяет констант и выполняется в пределе при $t \rightarrow 1$.

Третье (62) и четвертое уравнения (63) содержат экспоненты $e^{-\frac{1}{\ln(t)}}$ и $e^{-\frac{3}{\ln(t)} - \frac{1}{2\ln(t)^2}}$, которые стремятся к нулю при $t \rightarrow 1$ быстрее остальных сомножителей, что делает их асимптотически тождественными равенствами при любых c_0, c_1, c_2 . Единственное условие, из которого можно определить неизвестную константу, – это равенство (61), из которого следует, что $c_0 = 0$. Следовательно, выражение (58) можно уточнить:

$$(64) \quad f(t, x) = \frac{x}{\ln(t) + 1} + c_1 e^{-\frac{1}{\ln(t)}} x^{-1} + c_2 (\ln(t) + 1) e^{-\frac{1+6\ln(t)}{2\ln(t)^2}} x^{-2}.$$

В терминах переменных (θ, Y) данное выражение определяет функцию потребления

$$(65) \quad C\left(T - \frac{\theta}{\Lambda}, A, L\right) = \sigma(\theta, A - L) = \sigma(\theta, Y) = \frac{Y}{\theta + 1} + a^2 c_1 e^{-\Delta T - \frac{1}{\theta}} Y^{-1} + (\theta + 1) a^3 c_2 e^{-\frac{3\Delta T - 1 + 3\theta}{2} - \frac{1 + 3\theta}{2\theta^2}} Y^{-2}.$$

По мере приближения горизонта планирования $\theta \rightarrow 0$ все большая доля собственных средств $A - L$ тратится на потребление.

В области ниже $\tilde{x}(t)$ удастся найти приближенное выражение для решения, при больших значениях x и при малых значениях t , а также при малых значениях x и при больших значениях t .

Рассматривается приближение

$$f(t, x) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2.$$

Подстановка этого выражения в уравнение (47) и разложение по x при $x \rightarrow 0$ приводит к довольно громоздкому выражению, которые мы здесь не приводим. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получаем интегральные уравнения на неизвестные функции $a_0(t)$, $a_1(t)$, $a_2(t)$. Общие решения этих уравнений представляют собой сложную задачу, которую удалось упростить, предположив, что коэффициент при x такой же, что и в функции (64) – решении над границей $\tilde{x}(t)$. Тем самым, две функции будут соответствовать друг другу. Занимательно то, что при этом предположении возможно получить остальные коэффициенты $a_0(t)$, $a_2(t)$. Уравнение для функции $a_2(t)$ имеет три корня, только один из которых действительный при больших значениях t :

$$a_2(t) = 0.$$

Из этого следует, что решение уравнения, определяющего $a_0(t)$, есть

$$a_0(t) = \frac{c_0}{\ln(t) + 1},$$

где c_0 – произвольная константа. Ее можно определить так, чтобы приближенно выполнялось уравнение (47).

$$(66) \quad f(t, x) = \frac{c_0}{\ln(t) + 1} + \frac{1}{\ln(t) + 1}x + O(t; x^3).$$

В терминах переменных (θ, Y) оптимальное потребление описывается функцией

$$(67) \quad C\left(T - \frac{\theta}{\Lambda}, A, L\right) = \sigma(\theta, A - L) = \sigma(\theta, Y) = \\ = \frac{e^{-\frac{\Delta T}{2}} c_0 a}{\Lambda(T - t) + 1} + \frac{A - L}{\Lambda(T - t) + 1}.$$

В данном случае, при малом запасе собственных средств, $A - L$, потребление не уменьшается до нуля, а стремится к величине $\frac{e^{-\frac{\Delta T}{2}} c_0 a}{\theta + 1}$.

При подстановке решения (66) уравнение (47) принимает вид

$$(68) \quad 0 = -\frac{x - c_0 \ln(t)^{-1}}{\ln(t)^{-1} + 1}.$$

Невязка в уравнении (68) нулевого и первого порядка по x стремится к нулю в силу $x \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$. Границу $\tilde{x}(t)$ двух областей найдем из условия

$$f(t, \tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t) \Rightarrow \frac{c_0}{\ln(t) + 1} + \frac{\tilde{x}(t)}{\ln(t) + 1} = \tilde{x}(t) \Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{c_0}{\ln(t)}.$$

То же самое получается и из интегрального выражения (56) для $\tilde{x}(t)$:

$$(69) \quad \tilde{x}(t) = t \left(\int_1^t \frac{\ln(\tau) + 1}{c_0} d\tau \right)^{-1} = \frac{c_0}{\ln(\tau)}.$$

Сопоставляя численные расчеты (см. рис. 3) и асимптотически приближенное выражение для границы, методом наименьших квадратов можно найти значение константы $c_0 \approx 1,72$.

3. Обсуждение результатов анализа оптимального поведения потребителя вблизи и вдали от горизонта планирования

Подводя итог анализу условий оптимальности, вдали от горизонта планирования, $t \ll T$, в пределе при большой частоте моментов возможностей получения кредитов, $\Lambda \rightarrow \infty$, оптимальное потребление и размер кредита имеют вид

$$C(t, A, L) = c(t, A - L) = \frac{(\Delta^2 + 2\Delta\Lambda)}{(\Delta\Lambda + \Lambda^2)} \left(\frac{A - L}{2p_y(t)} + \frac{\sqrt{(A - L)^2 + 4e^{-\Delta T} a^2}}{2p_y(t)} \right),$$

$$(70) \quad K(t, A, L) = -L + \frac{p_y(t)c(t, A-L) - (A-L) - \int_t^T Z_\pi(u) du}{\int_t^T r_l(u) du} + \frac{2a^2 \Lambda e^{-\Delta T}}{\int_t^T r_l(u) du \left(A-L - p_y(t)c(t, A-L) + \sqrt{(A-L - p_y(t)c(t, A-L))^2 + 4e^{-\Delta T} a^2} \right) (\Delta + \Lambda)}.$$

По мере приближения горизонта планирования, в пределе при $\Lambda \rightarrow \infty$, условие на функцию кредита вырождается, и удается определить приближенное выражение для функции потребления с помощью выражений (53), (65), (67), а также расчетов (55).

Размер кредита (70) может быть как положительным, так и отрицательным, что означает, что агент выплачивает долг при большом доходе или собственных средствах.

В конце периода планирования потребление зависит от параметров A , L и цены потребляемого товара $p_y(T)$:

$$C(T, A, L) = \frac{A-L}{2p_y(T)} + \frac{\sqrt{(A-L)^2 + 4e^{-\Delta T} a^2}}{2p_y(T)}.$$

Приведенные выражения показывают, что потребление вдали от конечного момента времени является малой величиной (порядка Λ^{-1}), которая увеличивается по мере приближения конечного момента времени. Также выражения и численные расчеты показывают (см. рис. 2), что область $A-L - p_y(t)C(t, A, L) \leq 0$ занимает всю приграничную область $\theta \sim 0$, т.е. $t \sim T$. Это означает, что затраты на потребление превышают собственные средства в конце $p_y(T)C(T, A, L) > A-L$. Из этого следует вывод о том, что размер кредита нарастает по мере приближения конца периода планирования.

Заключение

В данной работе представлена модель оптимального поведения агента-потребителя при заданном внешнем доходе, возможности брать кредит под заданный, меняющийся во времени процент, а также при случайной последовательности моментов возможности кредитования и покупки потребительского товара. Эта последовательность моментов описана с помощью пуассоновского процесса. Модель сформулирована в виде задачи оптимального стохастического управления, выведены достаточные условия оптимальности управления процессом потребительских расходов и кредитования. Введены условия дополняющей нежесткости к ограничениям кредитоспособности агента, и эти условия упрощены введением «смягчающего» малого параметра ε .

Из условий оптимальности выведены выражения для функции потребления и размера кредита как функций времени и состояния запаса денег A и текущего долга L в

предположении большой частоты моментов сделок. Эта функция характеризует спрос агента на рынке потребительского товара при его взаимодействии с торговцем и спрос на кредиты при взаимодействии потребителя с банком. Данная модель может быть применена как блок поведения потребителей в динамической стохастической модели общего равновесия.

Разделение пространства состояний агента на область активного ограничения кредитоспособности и неактивного нелинейной границей показывает, что существенная нелинейность уменьшает точность расчетов с применением методов линеаризации при исследовании моделей типа DSGE. Продемонстрирован один из способов анализа нелинейных стохастических оптимизационных задач.

* *

*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Безродных С.И., Власов В.И. Аналитико-численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 7. С. 15–24.

Васильев С.Б., Пильник Н.П., Радионов С.А. Смягчение условий дополняющей нежесткости в динамических моделях общего равновесия // Математическое моделирование. 2018. (В печати.)

Дедова М.С., Малахов Д.И., Пильник Н.П. Измерение риска ликвидности системы кредитных организаций на примере банковской системы России // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 5. Экономика. 2017. Т. 33. № 1. С. 78–103.

Жукова А.А., Поспелов И.Г. Стохастическая модель торговли неликвидным товаром // Труды Московского физико-технического института. 2012. Т. 4. № 2. С. 131–147.

Жукова А.А., Поспелов И.Г. Исследование стохастической модели сбережений с инерционностью потребления // Труды Московского физико-технического института. 2014. Т. 6. № 4. С. 41–48.

Поспелов И.Г. Модель случайных продаж // Математические заметки. 2018. Т. 103. № 3. С. 445–459.

Поспелов И.Г., Пильник Н.П. О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия // Экономический журнал ВШЭ. 2007. Т. 11. № 1. С. 1–33.

Arefev N. Generalized Calvo Approach // National Research University Higher School of Economics. Working Paper BRP 06/EC/2011. 2011.

Bernanke B.S., Gertler M., Gilchrist S. Chapter 21. The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework // Handbook of Macroeconomics. 1999. Vol. 1. P. 1341–1393.

Bilbiie F.O., Monacelli T., Perotti R. Public Debt and Redistribution with Borrowing Constraints // The Economic Journal. 2013. Vol. 123. № 566. P. F64–F98.

Calvo G.A. Staggered Prices in a Utility-Maximizing Framework // Journal of Monetary Economics. 1983. Vol. 12. № 3. P. 383–398.

Christiano L.J., Motto R., Rostagno M. Risk Shocks // American Economic Review. 2014. Vol. 104. № 1. P. 27–65.

Eggertsson G.B., Krugman P. Debt, Deleveraging, and the Liquidity Trap: A Fisher-Minsky-Koo Approach // The Quarterly Journal of Economics. 2012. Vol. 127. № 3. P. 1469–1513.

Fernández-Villaverde J. Fiscal Policy in a Model with Financial Frictions // American Economic Review. 2010. Vol. 100. № 2. P. 35–40.

Gertler M., Gilchrist S. The Role of Credit Market Imperfections in the Monetary Transmission Mechanism: Arguments and Evidence // Scandinavian Journal of Economics. 1993. Vol. 95. № 1. P. 43.