

Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22. № 3. С. 448–459.
HSE Economic Journal, 2018, vol. 22, no 3, pp. 448–459.

Модели динамического стохастического общего экономического равновесия (ДСОЭР). Ошибки численных методов¹

Иващенко С.М.

Большинство расчетов по ДСОЭР-моделям основано на линейной аппроксимации методом возмущений (а редкие работы, использующие аппроксимации более высоких порядков, находят линейную аппроксимацию как первый шаг расчетов). Однако стандартные алгоритмы нахождения численной аппроксимации первого порядка могут быть не точны. Это связано с особенностями реализации алгоритма QZ-разложения, применяющегося при нахождении линейного приближения. Наличие такой проблемы было недавно продемонстрировано рядом авторов на примере ДСОЭР-модели малого масштаба. В данной работе исследуются масштабы таких ошибок для различных ДСОЭР-моделей. Предложена простая мера для оценки соответствующей неточности. Предложенная мера имеет несколько версий: одна основана на функции правдоподобия и альтернативные – на основе моментов переменных модели. Были проанализированы восемь разнообразных ДСОЭР-моделей: как малого масштаба, так и средне-крупного масштаба; как с общепринятыми особенностями структуры модели, так и с нестандартными формулировками задач агентов; как фокусирующиеся на нелинейных особенностях поведения ДСОЭР-модели, так и сосредоточенные на поведении линейной аппроксимацией. Оказалось, что данная проблема существенна для меньшей части рассмотренных моделей. Однако для нескольких моделей (малого масштаба) данные ошибки оказались велики. Известные универсальные методы борьбы с ней, основанные на специальной балансировке матриц, уменьшают последствия, но не настолько, чтобы считать проблему решенной. Это свидетельствует о необходимости диагностики моделей ДСОЭР на размер ошибки нахождения линейной аппроксимации, что можно сделать при помощи предложенной в данной работе меры.

¹ Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект «Структурные изменения в экономике России: роль человеческого капитала и инвестиций» № 18-010-01185.

Иващенко Сергей Михайлович – к.э.н., с.н.с. Института проблем региональной экономики РАН; Центра перспективного финансового планирования, макроэкономического анализа и статистики финансов, Научно-исследовательского финансового института Минфина РФ; факультет экономики СПбГУ. E-mail: sergey.ivashchenko.ru@gmail.com

Статья поступила: 24.07.2018/Статья принята: 20.09.2018.

Ключевые слова: ДСОЭР; DSGE; точность аппроксимации; QZ-разложение.

DOI: 10.17323/1813-8691-2018-22-3-448-459

Введение

Динамические стохастические модели общего экономического равновесия (ДСОЭР) являются одним из основных инструментов макроэкономического анализа, широко применяющимся центральными банками многих стран [Tovar, 2009]. Данный класс моделей продемонстрировал неплохое качество прогнозов, сопоставимое (часто превосходящее) с авторегрессионными моделями [Adolfson, Linde, Villani, 2007; Rubaszek, Skrzypczynski, 2008; del Negro, Schorfheide, 2012; Иващенко, 2013]. Однако основное достоинство ДСОЭР-моделей в том, что они объясняют динамику переменных в терминах теоретической модели (основанной на предпочтениях и технологиях) и позволяют обойти проблему критики Лукаса [Lucas, 1976]. Соответственно их можно применять для анализа денежной или фискальной политики [Андреев, Полбин, 2018; Tovar, 2009].

Точное решение ДСОЭР-моделей практически всегда невозможно найти, и поэтому расчеты проводятся на основе аппроксимаций. Причем, большинство работ ограничиваются линейной аппроксимацией [Tovar, 2009]. Специальные программные продукты позволяют проводить все необходимые расчеты достаточно просто, в соответствии с устойчивыми подходами. Одним из наиболее известных таких пакетов является *dynare* [Adjemian et al., 2011]. Также можно упомянуть RISE, позволяющий работать с более широким классом ДСОЭР-моделей с марковскими переключениями [Maih, 2015]. Есть и отдельные программы, выполняющие определенные операции, например, код Симса для нахождения аппроксимации линейной задачи с рациональными ожиданиями [Sims, 2002].

Однако стандартные реализации численных методов могут быть не точны. То есть аппроксимация, которую выдает программный пакет, может отличаться от теоретической аппроксимации (методом возмущений), являющейся производной неявной функции. Это расхождение даже для малой ДСОЭР-модели может быть заметным и связано оно с программной реализацией QZ-разложения [Heiberger et al., 2017]. Подобная проблема, в случае достаточно больших ошибок, может поставить под сомнение ключевые преимущества ДСОЭР-моделей.

Соответственно, целью данной работы является анализ масштабов численных проблем для применяющихся ДСОЭР-моделей. Для этого необходим механизм оценки масштаба проблемы для произвольной задачи. Использование аналитической линейной аппроксимации, которое применялось в работе [Heiberger et al., 2017], для этой цели не подойдет из-за вычислительной сложности. Следующим шагом является анализ ошибок нахождения аппроксимации для широкого ряда ДСОЭР-моделей. Проверять следует как стандартные модели, типа [Smets, Wouters, 2007], так и различные варианты нестандартных моделей, в частности моделей, ориентированных на нелинейные эффекты [Caldara et al., 2012], моделей, ориентированных на финансовые показатели [Chari et al., 2007], модели с единичными корнями [Jermann, Quadrini, 2012; Gali, Monacelli, 2005] и т.п.

Текст организован следующим образом: вначале подробно разбирается стандартный метод нахождения линейной аппроксимации. Затем рассказывается об ошибках ап-

проксимации, подходе борьбы с ними, предложенном в работе [Heiberger et al., 2017] и методе оценки точности нахождения аппроксимации. После этого демонстрируются результаты анализа для ряда рассматриваемых моделей. В заключении сделаны выводы. Приложение с необходимыми элементами программного кода приведено на сайте: https://ej.hse.ru/data/2018/10/01/1157549544/Ivashchenko_appendix.pdf.

Линейная аппроксимация решения ДСОЭР-моделей

ДСОЭР-модель описывается системой уравнений с рациональными ожиданиями (1), состоящей из условий оптимальности поведения агентов и ограничений, вектором переменных X_t и вектором случайных iid шоков ε_t .

$$(1) \quad E_t(f(X_{t-1}; X_t; X_{t+1}; \varepsilon_t)) = 0.$$

Для нахождения линейной аппроксимации решения модели (1), которое совпадает с решением линеаризованной системы (1), задача (1) преобразуется к виду (2).

$$(2) \quad AE_t \begin{bmatrix} w_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix},$$

где y_t – непредопределенные переменные (переменные, соответствующие ненулевым коэффициентам первой производной функции f по соответствующим будущим значениям), а w_t – остальные переменные модели. Рассмотрим более подробно переход от системы (1) к системе (2). Он совершается при помощи замены переменных: если первая производная функции f по j -ой компоненте вектора лагов $\{X_{t-1}\}_j$ равна нулю, а производная по вектору будущих значений $\{X_{t+1}\}_j$ нулю не равна, то такая компонента включается в вектор y_t . Если обе производные не равны нулю, то такая компонента включается как в вектор y_t , так и в вектор w_t . Таким образом, производные f по вектору будущих значений $\{X_{t+1}\}_j$ заполняют элементы матрицы A , соответствующие элементам вектора y_{t+1} , а остальные производные становятся элементами матриц A и B , относящимися к компонентам вектора w_{t+1} или w_t . Также приходится добавить уравнение, связывающее две переменные, которые были введены вместо одной встречающейся как с индексом $t-1$, так и индексом $t+1$. Количество компонент вектора w_t стремятся сделать минимальным, например, исключая статические переменные (производная функции f по прошлым и будущим значениям такой переменной нулевая). Подобная схема реализована, в частности, в пакете Dynare [Adjemian et al., 2011].

Для численного решения задачи (2) применяют QZ-декомпозицию, дающую унитарные матрицы Q и Z такие, что выполняется (3). Данная схема решения считается наиболее численно стабильной.

$$(3) \quad \begin{aligned} QAZ &= S, \\ QBZ &= T, \end{aligned}$$

где S и T верхне-треугольные матрицы, причем последние n_y (число элементов в векторе y_t) обобщенных собственных чисел (т.е. отношений диагональных элементов T_{ii}/S_{ii}) больше единицы по модулю. Требование, чтобы число собственных чисел, больших единицы, совпадало с числом ожиданий (непредопределенных переменных) – это условие Бланшара – Кана (точнее его модификация для случая необратимости матрицы A) о существовании единственного стабильного решения системы уравнений с рациональными ожиданиями [Blanchard, Kahn, 1980].

Соответственно, вводятся новые переменные γ_t и ω_t (4), а система (2) преобразуется к виду (5).

$$(4) \quad \begin{bmatrix} Z_{1,1} & Z_{1,2} \\ Z_{2,1} & Z_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_t \\ \gamma_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix},$$

$$(5) \quad \begin{bmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ 0 & S_{2,2} \end{bmatrix} E_t \begin{bmatrix} \omega_{t+1} \\ \gamma_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ 0 & T_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_t \\ \gamma_t \end{bmatrix}.$$

Нижняя половина уравнения (5) порождает взрывную траекторию, соответственно вектор γ_t должен быть нулевым. Таким образом, система (5) преобразуется в (6).

$$(6) \quad \begin{aligned} S_{1,1}\omega_{t+1} &= T_{1,1}\omega_t, \\ \gamma_t &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя в (4) решение (6), получаем (7). Аналогично получается (8). Таким образом, найдена линейная аппроксимация решения задачи (2), и проведя обратное преобразование переменных, находят аппроксимацию решения задачи (1).

$$(7) \quad w_t = Z_{1,1}\omega_t = Z_{1,1}S_{1,1}^{-1}T_{1,1}Z_{1,1}^{-1}w_{t-1},$$

$$(8) \quad y_t = Z_{2,1}\omega_t = Z_{2,1}Z_{1,1}^{-1}w_t = Z_{2,1}S_{1,1}^{-1}T_{1,1}Z_{1,1}^{-1}w_{t-1}.$$

О точности вычисления линейной аппроксимации решения ДСОЭР-моделей

Численный алгоритм QZ-декомпозиции работает с погрешностью, что приводит к погрешности в нахождении линейной аппроксимации решения ДСОЭР-моделей [Heibeger et al., 2017]. Хейбергер и другие подробно разбирают особенности реализации QZ-декомпозиции и сравнивают аналитически найденную и численную линейную аппрокси-

мацию на примере одной малой ДСОЭР-модели [Heiberger et al., 2017]. Следует отметить, что получающиеся результаты зависят от порядка, в котором подаются матрицы в алгоритм QZ-декомпозиции (A и B или B и A). Это открывает простой путь к оценке точности нахождения линейной аппроксимации на основе сравнения результатов расчетов при различном порядке матриц в алгоритме QZ-декомпозиции.

Другая важная деталь – это рекомендация Хейбергера и соавторов по балансировке матриц A и B [Heiberger et al., 2017]. Они предложили использовать специальные диагональные масштабирующие матрицы L и R , получаемые на основе алгоритма [Lemonnier, van Doogen, 2006]. Соответственно задача (2) преобразуется в (9), и в QZ-алгоритм подаются матрицы LAR и LBR , а решение приобретает вид (10)–(11).

$$(9) \quad LARR^{-1}E_t \begin{bmatrix} w_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = LBR^{-1} \begin{bmatrix} w_t \\ y_t \end{bmatrix},$$

$$(10) \quad R_{1,1}^{-1}w_t = Z_{1,1}\omega_t = Z_{1,1}S_{1,1}^{-1}T_{1,1}Z_{1,1}^{-1}R_{1,1}^{-1}w_{t-1},$$

$$(11) \quad R_{2,2}^{-1}y_t = Z_{2,1}\omega_t = Z_{2,1}Z_{1,1}^{-1}R_{1,1}^{-1}w_t = Z_{2,1}S_{1,1}^{-1}T_{1,1}Z_{1,1}^{-1}R_{1,1}^{-1}w_{t-1}.$$

В работе Хейбергера и соавторов рассматривалась малая ДСОЭР-модель, и соответственно различия в аппроксимации решения задачи или вторых моментов отдельных переменных оказываются наглядными показателями точности нахождения аппроксимации [Heiberger et al., 2017]. В этой работе будут рассматриваться крупномасштабные и среднемасштабные ДСОЭР-модели, содержащие десятки переменных, что требует использования агрегированных мер. Соответственно первая мера будет основана на моментах переменных модели, получающихся при двух порядках подачи матриц в QZ-алгоритм. Причем, можно отметить, что первые моменты совпадают (детерминированное равновесие не меняется), поэтому рассматривать имеет смысл только вторые моменты (12)–(13).

$$(12) \quad RMSEM_L = \left(\frac{1}{NNL} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{l=0}^L (E_{AB}x_{t,i}x_{t-l,j} - E_{BA}x_{t,i}x_{t-l,j})^2 \right)^{1/2},$$

$$(13) \quad MAEM_L = \underset{\substack{j=1:N \\ i=1:N \\ l=1:L}}{\text{median}} (abs(E_{AB}x_{t,i}x_{t-l,j} - E_{BA}x_{t,i}x_{t-l,j})).$$

Некоторые ДСОЭР-модели содержат переменные с нулевой или крайне низкой дисперсией. Это не позволяет использовать относительные ошибки во вторых моментах в формулах (12)–(13) и ведет к повышенному вниманию к наиболее волатильным переменным. Нужно отметить, что некоторые ДСОЭР-модели содержат переменные с единичным корнем, что приводит к бесконечной безусловной дисперсии и не дает рассчитать формулы (12)–(13). В таких ситуациях будет производиться переход к условным дисперсиям, т.е. рассчитывается дисперсия $X_t | X_0$ при достаточно большом t ($t = 100$).

Еще одна мера точности расчета линейной аппроксимации, учитывающая общее воздействие на поведение переменных, это разница в значении функции правдоподобия

в зависимости от порядка подачи матриц в QZ-алгоритм. Поскольку не все рассматриваемые модели оценивались авторами, то возникает вопрос, на каких данных рассчитывать функцию правдоподобия. В данном случае генерируется выборка из линейной аппроксимации модели для всех переменных модели длиной 120 наблюдений. Используется стандартная аппроксимация *dynare*. Данные генерируются для всех эндогенных переменных, включая статические, поскольку соответствующие переменные представляют интерес для создателей модели, а ошибки аппроксимации, при определенных условиях, могут иметь достаточный мультипликатор для таких переменных. Вероятно, порядок, в котором подаются матрицы при симуляции, будет влиять на то, какая из аппроксимаций будет лучше описывать данные. Однако использование модуля разности снимает вопрос о том, какая из аппроксимаций лучше. Поскольку в большинстве моделей число экзогенных шоков меньше числа переменных, то при расчете функции правдоподобия вводятся ошибки измерений с малой дисперсией (10^{-4}). Таким образом, получается мера *LLRE*.

$$(14) \quad LLRE = abs(\log(lik_{AB}(X | \theta)) - \log(lik_{BA}(X | \theta))).$$

Результаты тестирования

Расчеты проводились в пакете *dynare* [Adjemian et al., 2011]. Однако алгоритм, применяющийся в *dynare* по умолчанию для нахождения линейной аппроксимации, не позволяет поменять порядок подачи матриц в QZ-алгоритм. К счастью, *dynare* является пакетом с открытым кодом, что позволяет легко скорректировать соответствующий *m*-файл и использовать стиль, применявшийся Симсом [Sims, 2002], который дает возможность легко менять порядок подачи матриц в QZ-алгоритм (подробно о модификации кода *dynare* см.: https://ej.hse.ru/data/2018/10/01/1157549544/Ivashchenko_appendix.pdf).

Для анализа использовались модели, чей *dynare*-код представлен в базе Johannes Pfeifer². Причем расчет проводился для моделей как без, так и с балансировкой матриц по методу, предложенному в работе [Heiberger et al., 2017]. Результаты представлены в табл. 1. Для анализа было выбрано восемь различных моделей.

1. Модель среднего масштаба (некоторые относят ее к крупномасштабным моделям), считающаяся одной из наиболее стандартных [Smets, Wouters, 2007].
2. Модель схожего размера с моделью (1), но ориентированная на анализ взаимосвязи финансовых и макроэкономических показателей [Jermann, Quadrini, 2012].
3. Модель, содержащая несколько переменных с единичным корнем [Gali, Monacelli, 2005].
4. Модель малого размера, содержащая наиболее принятые элементы ДСОЭР-моделей [Ireland, 2004].
5. Модель аналогичного размера с необычной структурой экономики [Chari et al., 2007].
6. Модель, в которой отказываются от удобного упрощения нулевой инфляции в условии детерминированного равновесия и рассчитывают значение функции полезности домохозяйств как одну из переменных модели [Ascari, Sbordone, 2014].

² Pfeifer J. DSGE models base (https://github.com/JohannesPfeifer/DSGE_mod).

7. Модель, нацеленная на анализ сложных нелинейных эффектов, включая стохастическую волатильность, в условиях рекурсивной функции полезности [Caldara et al., 2012].

8. Еще одна нелинейная модель, также с рекурсивной функцией полезности [Basu, Bundick, 2017].

Таблица 1.

Оценки численных ошибок нахождения линейной аппроксимации

Модель	Число переменных	Число шоков	Число переменных состояния (state)	RMSEM ₀	RMSEM ₁	RMSEM ₄	MAEM ₄	LLRE
Caldara et al., 2012	12	2	3	3,00E-03	3,00E-03	2,98E-03	9,27E-18	1,42E-01
Caldara et al., 2012 balance	12	2	3	4,98E-04	4,60E-04	3,88E-04	7,31E-18	2,35E-03
Smets, Wouters, 2007	40	7	20	1,92E-11	1,74E-11	1,63E-11	1,09E-13	6,79E-05
Smets, Wouters, 2007 balance	40	7	20	3,24E-11	2,99E-11	2,79E-11	1,70E-13	2,04E-04
Chari et al., 2007	13	4	5	2,41E-13	2,41E-13	2,41E-13	1,18E-13	1,61E-01
Chari et al., 2007 balance	13	4	5	1,91E-13	1,91E-13	1,92E-13	9,76E-14	1,02E-01
Ascari, Sbordone, 2014	19	3	6	1,49E-12	1,36E-12	1,03E-12	4,44E-15	4,35E-05
Ascari, Sbordone, 2014 balance	19	3	6	9,66E-13	8,45E-13	5,85E-13	1,78E-15	3,06E-05
Basu, Bundick, 2017	47	4	7	4,30E-14	4,23E-14	4,15E-14	1,48E-18	1,50E-08
Basu, Bundick, 2017 balance	47	4	7	1,61E-14	1,63E-14	1,60E-14	3,51E-19	4,10E-09
Gali, Monacelli, 2005	19	2	6	4,67E-19	4,74E-19	4,82E-19	3,39E-21	5,85E-08
Gali, Monacelli, 2005 balance	19	2	6	2,73E-19	2,74E-19	2,69E-19	5,08E-21	2,26E-08
Ireland, 2004	13	4	6	4,32E-17	4,24E-17	4,10E-17	3,06E-18	2,40E-07
Ireland, 2004 balance	13	4	6	3,03E-17	2,88E-17	2,77E-17	2,09E-18	4,81E-08
Jermann, Quadrini, 2012	45	8	18	9,79E-15	9,77E-15	9,73E-15	1,18E-17	2,28E-04
Jermann, Quadrini, 2012 balance	45	8	18	3,08E-15	3,08E-15	3,08E-15	1,04E-17	9,26E-05

Можно видеть, что для большинства моделей ошибки численных методов оказываются крайне низкими. Лишь для одной модели меры на основе вторых моментов свидетельствуют о заметных неточностях. Причем это произошло у модели, нацеленной на анализ сложных нелинейных эффектов [Caldara et al., 2012]. По всей видимости, рекурсивная функция предпочтения, аналогичная введенной [Epstein, Zin, 1989; Epstein, Zin 1991], является ключевым источником проблем, которые проявляются еще до перехода к более точным аппроксимациям, анализу которых посвящена работа [Caldara et al., 2012]. Однако немного другой стиль записи рекурсивных предпочтений позволяет избежать больших ошибок в линейной аппроксимации [Basu, Bundick, 2017]. Также нужно отметить, что с точки зрения критерия MAEM₄ показатели модели [Caldara et al., 2012] почти не выделяются. Это связано с тем, что повышенные ошибки сосредоточены во вторых моментах одной переменной, и их влияние на медианный показатель достаточно мало.

Мера на основе функции правдоподобия оказалась более чувствительной, и еще одна модель демонстрирует заметные ошибки [Chari et al., 2007]. Эта модель со специфической функцией полезности содержит налоги на труд и инвестиции, но не содержит долговых инструментов и процентных ставок или негибкости ценообразования.

Заметные ошибки численных методов произошли в моделях малого масштаба, а пара моделей среднего масштаба демонстрируют достаточно хорошую точность расчетов, хотя и несколько хуже, чем у оставшихся моделей. Причем, если модель [Smets, Wouters, 2007] считается стандартной, то модель [Jermann, Quadrini, 2012] уделяет большое внимание финансовым переменным, а используемая задача фирм заметно отличается от общепринятых. Таким образом, точность расчета аппроксимаций в большей мере связана со сложностью или неудачностью используемых элементов, а не с размером задачи.

С точки зрения эффективности применения балансировки, предложенной в работе [Heiberger et al., 2017], можно видеть, что она не способна полностью решить проблемы неточности аппроксимации. В некоторых случаях она даже ведет к увеличению размера ошибок. Однако негативное влияние балансировки пришлось на случаи малых численных ошибок, в то время как при больших ошибках ее воздействие позитивное. Таким образом, можно рекомендовать применять данную балансировку, однако это не устраняет необходимость следить за качеством аппроксимации.

Стоит отметить, что модели, содержащие единичный корень (собственные числа, равные единице), продемонстрировали достаточно хорошие результаты [Jermann, Quadrini, 2012; Gali, Monacelli, 2005]. Конечно, применялась несколько отличная мера, основанная на условных вторых моментах с горизонтом в 100 периодов (25 лет при квартальных данных). Особенности процессов единичного корня позволяют при многократном увеличении срока довести ошибки до любых значений, но подобные горизонты будут не очень важны для большинства практических вопросов. И, например, выбор неверной версии фильтра Калмана оказывает намного большее воздействие, чем просто численные ошибки нахождения аппроксимации.

Заключение

ДСОЭР-модели являются одним из основных инструментов макроэкономического анализа. Для нахождения аппроксимации их поведения применяются численные методы. Однако, как показали последние работы, их стандартная реализация может приводить к

большим ошибкам. В данной работе предложены простые оценки ошибок при нахождении аппроксимации и проведен анализ восьми различных известных моделей.

В большинстве случаев ошибки нахождения аппроксимаций невелики, даже для моделей среднего масштаба. Однако отдельные особенности моделей могут приводить к росту ошибок. Специальная балансировка матриц позволила уменьшить ошибки аппроксимации в случаях, когда они были относительно велики, но не довела их до малых значений. Таким образом, хотя можно рекомендовать ее применение, это не устраняет необходимость диагностики точности нахождения аппроксимации.

* *

*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Андреев М.Ю., Полбин А.В. Влияние фискальной политики на макроэкономические показатели в DSGE-моделях // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2018. № 3. С. 21–33.

Иващенко С.М. Динамическая стохастическая модель общего экономического равновесия с банковским сектором и эндогенными дефолтами фирм // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. № 3 (19). С. 27–50.

Adjemian S., Bastani H., Juillard M., Karame F., Mihoubi F., Perendia G., Pfeifer J., Ratto M., Villemot S. Dynare: Reference Manual, Version 4 // Dynare Working Papers, 2011. 1, CEPREMAP.

Adolfson M., Laseen S., Linde J., Svensson L. Optimal Monetary Policy in an Operational Medium-Sized DSGE Model // Journal of Money, Credit and Banking. 2011. Vol. 43. Iss. 7. P. 1287–1331.

Ascari G., Sbordone A.M. The Macroeconomics of Trend Inflation // Journal of Economic Literature. 2014. Vol. 52(3). P. 679–739.

Basu S., Bundick B. Uncertainty Shocks in a Model of Effective Demand // Econometrica. 2017. Vol. 85. P. 937–958.

Blanchard O., Kahn C.M. The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations // Econometrica. 1980. Vol. 48. № 5. P. 1305–1311.

Caldara D., Fernandez-Villaverde J., Rubio-Ramirez J.F., Yao W. Computing DSGE Models with Recursive Preferences and Stochastic Volatility // Review of Economic Dynamics. 2012. Vol. 15. Iss. 2. P. 188–206.

Chari V.V., Kehoe P., McGrattan E. Business Cycle Accounting // Econometrica. 2007. Vol. 75(3). P. 781–836.

Epstein L., Zin S.E. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework // Econometrica. 1989. Vol. 57. P. 937–969.

Epstein L., Zin S.E. Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis // Journal of Political Economy. 1991. Vol. 99. P. 263–286.

Gali J., Monacelli T. Monetary Policy and Exchange Rate Volatility in a Small Open Economy // Review of Economic Studies. 2005. Vol. 72. P. 707–734.

Heiberger C., Klarl T., Maussner A. On the Numerical Accuracy of First-order Approximate Solutions to DSGE-Models // Macroeconomic Dynamics. 2017. Vol. 21. Iss. 07. P. 1811–1826.

Ireland P. Technology Shocks in the New Keynesian Model // Review of Economics and Statistics. 2004. Vol. 86(4). P. 923–936.

Jermann U., Quadrini V. Macroeconomic Effects of Financial Shocks // American Economic Review. 2012. Vol. 102. Iss. 1. P. 238–271.

Lemonnier D., Van Dooren P. Balancing Regular Matrix Pencils // *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. Vol. 28(1). P. 253–263.

Lucas R.E. Econometric Policy Evaluation: A Critique // *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*. 1976. Vol. 1. Iss. 1. P. 19–46.

Maih J. Efficient Perturbation Methods for Solving Regime-switching DSGE-Models // Working Paper from Norges Bank. № 2015/01, 2015.

Negro M. del, Schorfheide F. DSGE Model-Based Forecasting // *Staff Reports from Federal Reserve Bank of New York*. 2012. № 554. P. 1–95.

Rubaszek M., Skrzypczynski P. On the Forecasting Performance of a Small-Scale DSGE-Model // *International Journal of Forecasting*. 2008. Vol. 24. № 3. P. 498–512.

Sims C. Solving Linear Rational Expectations Models // *Computational Economics*. 2002. Vol. 20. Iss. 1–2. P. 1–20.

Smets F., Wouters R. Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach // *American Economic Review*. 2007. Vol. 97(3). P. 586–606.

Tovar C.E. DSGE-Models and Central Banks // *Economics – The Open-Access, Open – Assessment E-Journal*. 2009. № 3(16). P. 1–31.

Dynamic Stochastic General Equilibrium (DSGE) Models. Errors of Numerical Methods

Sergey Ivashchenko

The Institute of Regional Economy Problems (Russian Academy of Sciences),
36–38, Serpukhovskaya Street, Saint Petersburg, 190013, Russian Federation.

E-mail: sergey.ivashchenko.ru@gmail.com

The most computations with DSGE models are use linear approximation with perturbation method. It is rare when higher order approximations are used, but linear approximation is necessary step for computation of higher order approximations. However, conventional approximation techniques can be inaccurate. It is related to properties of QZ-decomposition code, which is used for finding linear approximation. This problem was discovered recently with small-scale DSGE model example. This paper investigate how large numerical errors for different DSGE-models. Simple measure is suggested for estimation of corresponding inaccuracy. One version of measure is likelihood based. Alternative versions are moments based. Various 8 DSGE-models are analyzed. They are small scale and medium-large scale models; conventional DSGE-models and models with unconventional structure; models that are focused on nonlinear properties and models that do not pay attention to nonlinear properties. This problem is important only for minority of the models. However, the errors are large for few models (small-scale). Known approach against numerical inaccuracy (that is based on special matrix balancing) decreases errors, but such decreases are not large enough for problem solving. Thus, it is important to recognize whether numerical errors of DSGE models linear approximation are large or no what can be done with suggested measure.

Key words: DSGE; approximation accuracy; QZ-decomposition.

JEL Classification: C32; C63; E30; E37.

* *

*

References

Andreev M.Ju., Polbin A.V. (2018) Vlijanie fiskal'noj politiki na makroekonomicheskie pokazateli v DSGE-modeljah [Influence of Fiscal Policy on Macroeconomic Performance within DSGE-Models]. *Financial Journal*, 3, pp. 21–33.

Ivashchenko S. (2013) Dinamicheskaja stohasticheskaja model' obshhego jekonomicheskogo ravnovesija s bankovskim sektorom i jendogennymi defoltami firm [Dynamic Stochastic General Equilibrium Model with Banks and Endogenous Defaults of Firms]. *Journal of the New Economic Association*, 3, 19, pp. 27–50.

Adjemian S., Bastani H., Juillard M., Karamé F., Mihoubi F., Perendia G., Pfeifer J., Ratto M., Villemot S. (2011) *Dynare: Reference Manual*, Version 4. Dynare Working Papers, 1, CEPREMAP.

Adolfson M., Laseen S., Linde J., Svensson L. (2011) Optimal Monetary Policy in an Operational Medium-Sized DSGE Model. *Journal of Money, Credit and Banking*, 43, iss. 7, pp. 1287–1331.

Ascari G., Sbordone A.M. (2014) The Macroeconomics of Trend Inflation. *Journal of Economic Literature*, 52, 3, pp. 679–739.

Basu S., Bundick B. (2017) Uncertainty Shocks in a Model of Effective Demand. *Econometrica*, 85, pp. 937–958.

Blanchard O., Kahn C.M. (1980) The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations. *Econometrica*, 48, 5, pp. 1305–1311.

Caldara D., Fernandez-Villaverde J., Rubio-Ramirez J.F., Yao W. (2012) Computing DSGE Models with Recursive Preferences and Stochastic Volatility. *Review of Economic Dynamics*, 15, iss. 2, pp. 188–206.

Chari V.V., Kehoe P., McGrattan E. (2007) Business Cycle Accounting. *Econometrica*, 75, 3, pp. 781–836.

Epstein L., Zin S.E. (1989) Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework. *Econometrica*, 57, pp. 937–969.

Epstein L., Zin S.E. (1991) Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis. *Journal of Political Economy*, 99, pp. 263–286.

Gali J., Monacelli T. (2005) Monetary Policy and Exchange Rate Volatility in a Small Open Economy. *Review of Economic Studies*, 72, pp. 707–734.

Heiberger C., Klarl T., Maussner A. (2017) On the Numerical Accuracy of First-order Approximate Solutions to DSGE-Models. *Macroeconomic Dynamics*, 21, iss. 07, pp. 1811–1826.

Ireland P. (2004) Technology Shocks in the New Keynesian Model. *Review of Economics and Statistics*, 86, 4, pp. 923–936.

Jermann U., Quadrini V. (2012) Macroeconomic Effects of Financial Shocks. *American Economic Review*, 102, iss. 1, pp. 238–271.

Lemonnier D., Van Dooren P. (2006) Balancing Regular Matrix Pencils. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 28, 1, pp. 253–263.

Lucas R.E. (1976) Econometric Policy Evaluation: A Critique. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 1, iss. 1, pp. 19–46.

Maih J. (2015) *Efficient Perturbation Methods for Solving Regime-switching DSGE-Models*. Working Paper from Norges Bank, no 2015/01.

Negro M. del (2012) Schorfheide F. DSGE Model-Based Forecasting. *Staff Reports from Federal Reserve Bank of New York*, no 554, pp. 1–95.

Rubaszek M., Skrzypczynski P. (2008) On the Forecasting Performance of a Small-Scale DSGE-Model. *International Journal of Forecasting*, 24, 3, pp. 498–512.

Sims C. (2002) Solving Linear Rational Expectations Models. *Computational Economics*, 20, iss. 1–2, pp. 1–20.

Smets F., Wouters R. (2007) Shocks and Frictions in US Business Cycles: A Bayesian DSGE Approach. *American Economic Review*, 97, 3, pp. 586–606.

Tovar C.E. (2009) DSGE-Models and Central Banks. *Economics – The Open-Access, Open – Assessment E-Journal*, 3, 16, pp. 1–31.