Аксиоматическое описание правила передачи голосов[1]

Алескеров Ф.Т., Карпов А.В.

Предложено общее описание методов пропорционального представительства, реализующих правило передачи голосов (в частности, метода Грегори, включающего метода Грегори и взвешенного включающего метода Грегори), в виде итеративной процедуры. Проанализирована аксиоматика Вудалла для ординальных систем пропорционального представительства. Разработана аксиоматика для методов, реализующих правила передачи голосов. Предложена модификация определения квоты (т.е. минимального числа голосов, которое необходимо для получения места в парламенте), улучшающая теоретические свойства процедуры, но при этом отличающаяся от классического определения не более чем на единицу. Предложен новый метод, основанный на правиле передачи голосов и на введенном определении квоты. Доказана теорема о единственности метода, удовлетворяющего всем введенным аксиомам. Построенный метод назван взвешенным включающим методом Грегори с модифицированным определением квоты и случайным равновероятным выбором выигрывающей коалиции на каждом шаге итерации. Результаты расширены для методов, позволяющих передавать дробное число голосов.

Ключевые слова: правило передачи голосов; ординальные системы пропорционального представительства.

Введение

Правило передачи голосов (*single transferable vote*) – класс ординальных избирательных процедур, позволяющий голосующим отражать не только свои первые пред-

[1] Исследование осуществлено в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2011 г. Работа частично поддержана Научным фондом НИУ ВШЭ (грант № 10-04-0030) и Лабораторией анализа и выбора решений НИУ ВШЭ. Авторы выражают благодарность Э.Б. Ершову и Д.А. Шварцу за ценные замечания.

Алескеров Ф.Т. – ординарный профессор НИУ ВШЭ, заведующий кафедрой высшей математики на факультете экономики НИУ ВШЭ, научный руководитель отделения прикладной математики и информатики НИУ ВШЭ, заведующий Лабораторией анализа и выбора решений НИУ ВШЭ, главный научный сотрудник Лаборатории экспериментальной и поведенческой экономики НИУ ВШЭ, ИПУ РАН, заведующий лабораторией. E-mail: alesk@hse.ru

Карпов А.В. – преподаватель кафедры микроэкономического анализа и кафедры высшей математики на факультете экономики НИУ ВШЭ, младший научный сотрудник Лаборатории анализа и выбора решений НИУ ВШЭ, аспирант НИУ ВШЭ. E-mail: akarpov@hse.ru

Статья поступила в Редакцию в апреле 2011 г.

почтения, но и последующие. Избиратели голосуют за кандидатов, как и при мажоритарной системе, но от избирательного округа избирается не один кандидат, а несколько. Таким образом, меньшинство представлено в парламенте, что и дает право отнести эту процедуру к системам пропорционального представительства. Кроме того, правило передачи голосов сохраняет важное преимущество мажоритарных систем в сравнении с голосованием за партийные списки: депутаты, каждый из которых нашел поддержку у избирателей, представляют конкретный округ и теснее связаны с электоратом.

В странах, унаследовавших английское влияние, под пропорциональным представительством часто понимается правило передачи голосов [10]. Эта процедура используется для выборов в парламенты Австралии, Ирландии, Мальты, а также на многих выборах более низкого уровня. Интерес к правилу передачи голосов в последнее время усилился, что отражается в проведении референдумов по изменению избирательных систем. В канадской провинции Британская Колумбия в 2005 и 2009 гг. [15, 16] проходили референдумы по переходу на правило передачи голосов, которые завершились сохранением старой системы. В Соединенном Королевстве в мае 2011 г. ставится на голосование вопрос о переходе к аналогу правила передачи голосов, при котором избирается один представитель от округа [14]. В Новой Зеландии в конце 2011 г. планируется проведение референдума, на котором будет рассмотрен вопрос о переходе на новую избирательную систему, причем одним из предлагаемых вариантов является правило передачи голосов [13].

Существует большое количество методов, реализующих правило передачи голосов, но всех их объединяет общая процедура подсчета голосов и отбора кандидатов, представленная ниже. Приведем эту процедуру.

1. Во время голосования избиратель ставит в соответствие кандидатам ранг, указывая какой из кандидатов для них самый лучший, какой второй по предпочтениям и т.д., при этом не все кандидаты должны быть проранжированы.

2. По известному числу мест, которые необходимо заполнить, и числу голосов определяется квота (минимальное количество голосов, которое гарантирует победу кандидату, набравшему квоту) по формуле

$$q = \left\lfloor \frac{\text{число голосов}}{\text{число мест} + 1} \right\rfloor + 1, \qquad (1)$$

где знак $\lfloor\ \rfloor$ обозначает операцию округления снизу.

3. Бюллетени раскладываются по кандидатам согласно первым предпочтениям, указанным на бюллетенях.

4. Кандидат, имеющий количество голосов, превышающее квоту, считается избранным.

5. Превышение количества голосов над квотой (излишек бюллетеней) передается остальным кандидатам согласно последующим предпочтениям, указанным на бюллетенях.

6. Если ни один из кандидатов не набирает квоту, то

6a. Если количество оставшихся кандидатов равно количеству незаполненных мест, то все оставшиеся кандидаты объявляются избранными, иначе

6b. Кандидат с наименьшим числом голосов исключается, и его голоса переходят последующим по предпочтениям кандидатам.

Процедура продолжается, пока не будет отобрано нужное число победителей.

Основные различия между методами, реализующими правило передачи голосов, состоят в способе определения голосов, которые будут передаваться при образовании излишка (пункт 5). Стоит отметить, что если никто из избирателей не указал вторых и последующих предпочтений, то процедура дает результат, совпадающий с решением, полученным с помощью полиномиальной мажоритарной системы (*single non-transferable vote*). Эта система использовалась, например, в Японии [1].

Различие в реализации правила передачи голосов рассмотрим на примере трех традиционных методов: метода Грегори, включающего метода Грегори и взвешенного включающего метода Грегори (подробнее см. [3]).

Метод Грегори (оригинальная версия). Изначально правило передачи голосов использовалось с применением случайного отбора при определении передаваемых голосов. Процесс выборов при ручном подсчете бюллетеней с использованием правила передачи голосов как в оригинальной версии, так и с возможными модификациями описан в работе [5]. Бюллетени раскладывались согласно первым предпочтениям по корзинам, объединяя голоса за каждого кандидата. Из корзины кандидата, набравшего квоту, равновероятно доставалось количество бюллетеней, равное излишку, и перекладывалось в корзины других кандидатов. Как только при распределении излишка еще один кандидат набирал квоту, то далее ему бюллетени не докладывались, а предыдущий излишек шел последующим кандидатам. По сути, выбор излишка победителя, который образовался в ходе распределения предыдущего излишка, производился не среди всех бюллетеней, а только среди последнего переданного кандидату излишка. Приведем пример выборов с четырьмя кандидатами, из которых необходимо выявить трех победителей, и со следующими предпочтениями избирателей:

12 голосов $a \succ b \succ c \succ d$,
12 голосов a ,
10 голосов $b \succ d$,
10 голосов c ,
10 голосов d .
Всего 54 голоса.

Квота в данном случае равна

$$q = \left\lfloor \frac{54}{3+1} \right\rfloor + 1 = 14 .$$

Кандидат **a** объявляется победителем. У него 24 голоса, что превышает квоту (14 голосов). Образуется излишек 10 голосов. Каждый голос с вероятностью 10/24 = 41,67% передается. Для примера возьмем наиболее вероятный исход: 5 голосов переходят кандидату **b**, 5 голосов переходят в категорию непередаваемых голосов, так как эти избиратели не указали последующих предпочтений. Ситуация после распределения излишка a выглядит следующим образом:

7 голосов $a \succ b \succ c \succ d$,
7 голосов a ,
5 голосов $b \succ c \succ d$ (переходит от **a**),
10 избирателей $b \succ d$,
10 голосов c ,
10 голосов d ,
5 голосов – непередаваемые голоса.

Имея на первом этапе 10 голосов, для победы на втором этапе кандидату **b** достаточно получить 4 дополнительных голоса. Он получает от кандидата **a** 5 голосов, поэтому образуется излишек. Согласно методу Грегори, этот излишек должен состоять только из голосов предыдущего излишка, т.е. в корзину кандидата **b** докладывают бюллетени до тех пор, пока он не набирает квоту, остальные голоса идут последующим кандидатам. В данном случае один голос переходит кандидату **c**. Кандидат **c** имеет на последнем этапе больше голосов, чем кандидат **d** и объявляется победителем. В итоге победителями являются кандидаты **a**, **b**, **c**.

Метод Грегори (современная версия). Бюллетени отбираются не случайным образом, а пропорционально количеству бюллетеней с соответствующим кандидатом на втором месте. Принцип выбора голосов для перераспределения только среди последней передачи голосов сохраняется. В данном примере на первом этапе передается $10/24 = 41{,}67\%$ каждой группы голосов, т.е. от группы избирателей в 12 голосов с одинаковыми последующими предпочтениями $10/24 \times 12 = 5$ голосов передаются далее. На втором этапе излишек однороден (состоит из голосов $b \succ c \succ d$), что приводит к передаче голоса к кандидату **c**. Итог выборов: победителями являются кандидаты **a**, **b**, **c**.

Включающий метод Грегори. Он отличается от метода Грегори способом перераспределения последующих излишков (пункт 5 общей схемы процедуры). В нашем примере первый этап проходит без изменений (пропорциональная постановка). На втором этапе необходимо перераспределить один голос от кандидата **b**. Включающий метод Грегори учитывает не только последний излишек, а все голоса, отданные за **b**, т.е. 22 голоса:

12 голосов $a \succ b \succ c \succ d$,
10 голосов $b \succ d$.

Несмотря на то, что из 12 голосов часть голосов уже потрачена на избрание кандидата **a**, метод рассматривает распределение голосов по первоначальным предпочтениям. Так как надо передать один голос из 22, то из первой группы голосов необходимо передать $12/22 = 0{,}55$ голоса, из второй группы $10/22=0{,}45$ голоса. Так как передаются только целые количества голосов, то один голос передается кандидату **c**, который объявляется победителем. Итог выборов: победителями являются кандидаты **a**, **b**, **c**.

Взвешенный включающий метод Грегори. В этом методе при распределении возникающих излишков учитываются только те голоса, которые реально перешли к кандидату до этого этапа. Первый этап происходит так же, как и по методу Грегори. При необходимости на втором этапе перераспределить один голос от кандидата **b** взвешенный включающий метод Грегори учитывает голоса всех групп избирателей с учетом той доли голосов, которая перешла к данному кандидату на текущем этапе:

5 (= $10/24 \times 12$) голосов $a \succ b \succ c \succ d$,
10 голосов $b \succ d$.

При передаче одного голоса из 15 группа с предпочтениями $b \succ d$ оказывается более многочисленной. Побеждает кандидат **d**. Итог выборов: победителями являются кандидаты **a**, **b**, **d**.

В данной постановке могут передаваться только целые голоса, и квота обязательно является целым числом. Это ограничение исторически возникло из практики ручного подсчета голосов. В современном мире введение компьютеризированных способов подсчета голосов не сразу ведет к изменению процедуры, зафиксированной в избирательных законах. Сохранение традиционных методов подсчета, хотя и реализуемых на компьютерах, повышает прозрачность процедуры и доверие к результатам выборов. Этим объясняется повышенное внимание именно к случаю целого числа голосов при подсчете результатов. Кроме того, на выборах с сотнями тысяч избирателей искажения, связанные с необходимостью округления до целого, не носят значительного характера.

Существуют методы, работающие с дробными голосами, как пример можно представить взвешенный включающий метод Грегори без соответствующего округления. Метод Мика [6, 7], принципиально отличающийся от методов Грегори, использует квоту, не являющуюся целым числом, кроме того сама квота на каждом шаге процедуры пересчитывается. Постановка модели с возможностью деления голосов представлена в конце статьи.

Существенные различия всех методов становятся видны только при распределении последующих излишков, когда процедура усложняется. По историческим примерам найти наилучший метод не представляется возможным. В реальных выборах число этапов подсчета доходит до нескольких сотен, что естественно затрудняет возможность увидеть и проинтерпретировать различие методов. Методы часто менялись под воздействием некоторых политических сил, которые по итогам выборов находили применение того или иного метода несправедливым. Аксиоматический подход к изучению правил передачи голосов, представленный в работе, позволяет четко структурировать проблему и сравнить методы на основе объективных критериев.

В литературе описаны несколько примеров, показывающих нарушение правилом передачи голосов различных свойств рационального выбора. В [2] рассмотренно отсутствие монотонности правила передачи голосов. В [9] продемонстрировано несколько нарушений: парадокс неявки (участие в выборах избирателей, голосующих за кандидата X, приводит к его проигрышу), нарушение критерия Кондорсе и несоответствие свойству согласованности (если выбор по двум группам бюллетеней совпадает, то и выбор по объединенному профилю должен быть таким же). Н. Миллером в работе [8] построен пример, названный «эффектом бабочки» − проявление некоторой хаотичности правила передачи голосов (см. также обсуждение этого примера в [4]). Кроме того, пример Миллера демонстрирует принципиальную возможность манипулирования при выборе по правилу передачи голосов, так как небольшое изменение профиля предпочтений приводит к значительному изменению результата.

Проанализируем этот пример подробнее. В табл. 1 представлен исходный профиль предпочтений, числа обозначают количество избирателей в группе с данными предпочтениями. Первая строка отражает сумму голосов за кандидата по первым предпочтениям.

Таблица 1.

Профиль предпочтений 1
(на основе [8])

144	125		160	145	153	126	148
144	27	98	160	145	153	126	148
A	B	B	C	D	E	F	G
B	C	F	G	G	C	A	F
C	G	A	F	F		B	D
G	F	D		A		C	A
F		E		E			E

В данном профиле 1001 избиратель, 7 кандидатов конкурируют за 3 места в избирательном органе. Квота в этом случае равна $q = \left\lfloor \frac{1001}{3+1} \right\rfloor + 1 = 251$. Процесс передачи голосов представлен в табл. 2 (квадратными скобками обозначены исключенные на текущем этапе кандидаты, полужирным шрифтом выделены избранные кандидаты).

Таблица 2.

Передача голосов при профиле предпочтений 1

	A	B	C	D	E	F	G
(1)	144	[125]	160	145	153	126	148
(2)	[144]	125 − 125 = 0	160 + 27 = 187	145	153	126 + 98 = 224	148
(3)	144 − 144 = 0	–	187 + 144 = **331**	145	153	224	148
(4)	–	–	331 − 80 = **251**	[145]	153	224	148 + 80 = 228
(5)	–	–	**251**	145 − 145 = 0	153	224	228 + 145 = **373**
(6)	–	–	**251**	–	153	251 + 122 = **346**	373 − 122 = **251**

Исключение сначала кандидата B, затем кандидата A происходит потому, что ни один из кандидатов не набирает квоту. Их голоса полностью переходят другим кандидатам в соответствии с предпочтениями избирателей. Кандидат C первым превышает квоту, набрав 331 голос. Во всех этих бюллетенях (собственных и перешедших от A и B) после исключения уже выбывших кандидатов следующим по предпочтениям стоит кандидат G. Так как кандидат G не набирает квоту, то на следующем этапе исключается кандидат с наименьшим числом голосов (кандидат D). Его голоса передаются кандидату G, у которого образуется излишек (122 голоса), переходящий кандидату F. Победители − кандидаты {C, F, G}. При подсчете голосов не был точно указан метод, реализующий правило передачи голосов, так как данный результат получится при использовании любого варианта процедуры передачи голосов, описанной в начале статьи.

Представим, что два избирателя из первой группы изменили свои предпочтения на паре альтернатив с $A \succ B$ на $B \succ A$, при этом остальные 999 избирателей сохранили свои предпочтения неизменными (см. табл. 3). Два бюллетеня необходимы, чтобы не создавать ситуации несравнимости.

Таблица 3.

Профиль предпочтений 2
(на основе [8])

142	127			160	145	153	126	148
142	2	27	98	160	145	153	126	148
A	B	B	B	C	D	E	F	G
B	A	C	F	G	G	C	A	F
C	C	G	A	F	F		B	D
G	G	F	D		A		C	A
F	F		E		E			E

Так как число избирателей осталось прежним, то квота не изменилась. Первым проходит исключение кандидата F, приводящее к избранию кандидата A. Весь образовавшийся излишек (17 голосов) переходит кандидату B. Так как на следующем этапе никто из кандидатов не набирает квоту, происходит исключение кандидата с наименьшим количеством голосов (кандидат B). Его голоса согласно последующим предпочтениям переходят кандидатам B и C. Исключение кандидата G добавляет голоса кандидату D. Во всех голосах, собранных у кандидата D, следующим по предпочтениям (при изъятии из профиля предпочтений избранных и исключенных кандидатов) стоит кандидат E. В итоге побеждают кандидаты {A, D, E}. Еще раз укажем, что в данном примере не важно, какой из методов реализации правила передачи голосов используется.

Таблица 4.

Передача голосов при профиле предпочтений 2

	A	B	C	D	E	F	G
(1)	142	127	160	145	153	[126]	148
(2)	142 + 126 = **268**	127	160	145	153	126 − 126 = 0	148
(3)	268 − 17 = **251**	127 + 17 = [144]	160	145	153	–	148
(4)	**251**	144 − 144 = 0	160 + 27 + 17 + 2 = 206	145 + 98 = 243	153	–	[148]
(5)	**251**	–	206	243 + 148 = **391**	153	–	148 − 148 = 0
(6)	**251**	–	206	391 − 140 = **251**	153 + 140 = **293**	–	–

Таким образом, минимальное изменение (у двух избирателей) профиля приводит к полному изменению множества победителей (с {C, F, G} на {A, D, E}), более того, кандидат А, потерявший часть своих голосов, становится победителем. Данный пример, показывающий немонотонность и в некотором смысле хаотичность правила передачи голосов, делает малопродуктивным использование в качестве критерия классической аксиоматики рационального выбора.

Анализ аксиоматики

В литературе существует по крайней мере одна система аксиом для ординальных систем голосования [12], автор которой указывает на ее значимость именно для правил передачи голосов. В этой работе на основе примера доказывается теорема о невозможности создания метода, который бы удовлетворял следующим принципам (далее, как и в оригинальной статье, аксиомы приводятся неформализованными).

1. Увеличение поддержки кандидата, который и без этого был избран, должно также привести к его избранию.

2a. Последующие предпочтения не должны оказывать отрицательное влияние, т.е. мнение избирателей учитывается только как голосование «за».

2b. Последующие предпочтения не могут быть учтены, пока не учтены предшествующие. (В частности, если единственным отличием бюллетеней с кандидатом **x** в качестве первой альтернативы в двух профилях является наличие вторых предпочтений в этих бюллетенях, то **x** должен быть избран при первом профиле, тогда и только тогда, когда **x** избран при втором профиле.)

3. Если никто не указал вторых предпочтений, то кандидат с наибольшим количеством голосов по первым предпочтениям должен быть избран.

4. Если сумма бюллетеней с кандидатом **x** на первом месте и кандидатом **y** на втором месте и бюллетеней, где **y** – первый, а **x** – второй, составляет больше половины голосов, то хотя бы один из этих кандидатов должен быть избран.

Вудалл доказывает несовместимость этих аксиом на примере, в котором избирается один кандидат. Доказательство строится не для класса правил передачи голосов, а для процедур выбора вообще. Стоит отметить, что эта система аксиом не позволяет выделить какие-либо правила передачи голосов.

Покажем, что этим аксиомам либо удовлетворяют все правила передачи голосов, либо ни одно из них. Как показывает пример Миллера (описан в предыдущем разделе), аксиоме 1 не удовлетворяет ни одно известное правило передачи голосов. Аксиома 2a выполнена, так как избиратель не может уменьшить шансы избрания какого-либо кандидата, проголосовав за него, все голоса считаются только «за». Иначе говоря, аксиома 2a выполнена, так как процедура последовательно углубляется «вглубь» предпочтений и не может учесть вторые предпочтения до первых и т.д. Аксиома 3 выполнена, так как кандидаты с наименьшим количеством голосов будут исключаться, что гарантирует избрание кандидата с наибольшим количеством голосов. Аксиома 4 выполнена, так как при числе победителей более двух либо кандидат **x**, либо кандидат **y** набирают квоту. При выборе двух победителей 33% + 1 голосов гарантируют прохождение с помощью правил передачи голосов. Для нарушения четвертого свойства необходимо, чтобы победили два кандидата, в сумме набравшие менее половины голосов. Это может быть, если победителем будет объявлен кандидат с менее чем 25% голосов, что невозможно, так как либо кандидат **x**, либо кандидат **y** будут иметь большее число голосов. При выборе одного победителя, если ни **x**, ни **y** не набирают квоту 50% + 1 голос, то процедура исключит кандидата с наименьшим количеством голосов. Если это один из кандидатов **x** и **y**, то оставшейся побеждает. Третий кандидат не может победить, так как максимум, что может набрать этот кандидат, это 50% – 1 голос.

Формализация правила передачи голосов

Для анализа методов, реализующих правило передачи голосов, запишем процедуру формально и сформулируем свойства, которые разумно требовать именно в этом классе систем пропорционального представительства.

Обозначим:

$V_0 = \{v_1,...,v_n\}$ – множество избирателей, индекс k;

$C_0 = \{c_1,...,c_m\}$ – множество кандидатов, индекс j;

s – число мест, которые должны быть заполнены (будем считать, что $s < m < n$);

i – индекс этапа;

$V_i \subseteq V_0$ – множество избирателей на i-ом этапе подсчета голосов;

$C_i \subseteq C_0$ – множество кандидатов на i-ом этапе подсчета голосов;

E_i – множество избранных кандидатов на i-ом этапе подсчета голосов;

$E(V_0, C_0, s)$ – множество победителей после последнего этапа подсчета;

$\overline{P}$ – профиль предпочтений избирателей;

$\overline{P}_i$ – профиль предпочтений, соответствующий множеству кандидатов и множеству избирателей на i-ом этапе избирателей;

$\sigma(c_j, V_i, C_i) \subseteq V_i$ – коалиция (множество) избирателей, ставящих кандидата c_j на первое место по предпочтениям;

$\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)$ – максимальная коалиция, т.е. все остальные избиратели голосуют за других кандидатов;

$q(n,s)$ – квота, т.е. необходимое минимальное число голосов для избрания.

Для целого числа голосов квота определяется по формуле

$$q(n,s) = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1. \tag{2}$$

Если $\left|\sigma(c_j, V_i, C_i)\right| = q(n,s)$, то такая коалиция будет выигрывающей, т.е. обеспечивающей победу кандидату c_j.

Опишем формально правило передачи голосов, являющееся процедурой, которая итеративно выполняется до полного определения состава победителей. Знаком «:=» здесь будет обозначаться присвоение значения.

В начале процедуры определяется квота

$$q(n,s) = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1,$$

$$i := 0, \ E_0 := \varnothing.$$

Этап $i \geq 0$.

а) Если существует выигрывающая коалиция $\sigma(c_j, V_i, C_i)$ для некоторого кандидата c_j, то кандидат c_j, поддержанный этой коалицией, объявляется избранным. Тогда

$$E_{i+1} := E_i \cup \{c_j\}.$$

Если $|E_{i+1}| < s$, то

$$V_{i+1} := V_i \setminus \sigma(c_j, V_i, C_i),$$
$$C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},$$
$$i := i+1,$$

переход к началу нового этапа, иначе процедура передачи голосов заканчивается.

б) Если выигрывающей коалиции не существует, то алгоритм продолжается следующим образом. Если $|s - E_i| = |C_i|$, то все кандидаты объявляются избранными $E_{i+1} := E_i \cup C_i$ и процедура завершается. В противном случае, т.е. если $|s - E_i| < |C_i|$, построим разбиение множества избирателей на коалиции $\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)$ для всех $c_j \in C_i$. Кандидат $c_j \in C_i$ с наименьший мощностью максимальной коалиции $|\sigma^{\max}(c_j, V_i, C_i)|$ объявляется проигравшим и

$$E_{i+1} := E_i,$$
$$V_{i+1} := V_i,$$
$$C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},$$
$$i := i+1,$$

переход к началу следующего этапа.

Заметим, что на некотором этапе у избирателя может не быть предпочтений на множестве оставшихся кандидатов. Это означает, что данный бюллетень переходит в категорию непередаваемых голосов. Они не вошли в выигрывающие коалиции тех кандидатов, за которых эти избиратели проголосовали и не имеют возможности както повлиять на исход голосования после исключения их кандидатов. Формально до конца процедуры эти избиратели остаются во множестве избирателей текущего этапа.

Разберем пример с тремя кандидатами и пятью избирателями, иллюстрирующий сокращение множества кандидатов и избирателей при избрании кандидата. Начальный профиль предпочтений представлен в табл. 5.

При $s = 2$ для победы необходимо набрать два голоса, $q = 2$. Кандидат **a** имеет выигрывающую коалицию из избирателей {1, 2} (в табл. 5 выделена подчеркиванием) и поэтому объявляется победителем. Бюллетени этих избирателей и кандидат **a** исключаются из профиля избирателей. В табл. 6 представлен измененный профиль предпочтений избирателей, с которым работает процедура на следующем этапе.

Таблица 5.

Профиль предпочтений

	Избиратели				
	1	2	3	4	5
Первые предпочтения	**a**	**a**	**a**	**b**	**c**
Вторые предпочтения	**c**	**b**	**c**	**c**	**b**
Третьи предпочтения	**b**	**c**	**b**	**a**	**a**

Таблица 6.

Измененный профиль предпочтений

	Избиратели		
	3	4	5
Первые предпочтения	**c**	**b**	**c**
Вторые предпочтения	**b**	**c**	**b**

Остались избиратели {3, 4, 5} и кандидаты {**b**, **c**}. За счет исключения кандидата **a** бюллетень 3 перешел от кандидата **a** к кандидату **c**. В профиле имеется выигрывающая коалиция за кандидата **c** (избиратели {3, 5}), гарантирующая его победу. Процедура заканчивается, кандидаты {**a**, **c**} являются победителями голосования.

Методы, реализующие правило передачи голосов, различаются по способу выбора выигрывающей коалиции, который определяет, какие голоса сохранятся у кандидата, а какие будут переданы и окажут влияние на выбор победителя и выигрывающей коалиции на следующем этапе. Определение выигрывающей коалиции влияет на всю последующую траекторию передачи голосов, поэтому способ выбора выигрывающей коалиции на каждом этапе надо продумать заранее. Некоторые естественные требования позволяют ограничить класс методов.

Аксиомы и теорема о представлении

1. *Независимость от предыстории.* Для любого этапа i, если вместо продолжения подсчета начать процедуру как бы с самого начала, но сохраняя текущее распределение голосов, выбор коалиции не должен измениться.

2. *Независимость от последующих предпочтений.* Изменение тех предпочтений избирателей, которые еще не были учтены в процедуре, т.е. всех последующих, кроме первых предпочтений на данном этапе, не должно влиять на выбор выигрывающей коалиции.

3. *Анонимность.* Независимость от имен избирателей.

4. *Нейтральность.* Независимость от имен альтернатив.

Необходимым условием выполнения аксиомы 1 является пересчет квоты на каждом этапе по формуле

$$q_i = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor + 1. \quad (3)$$

Если квоту не пересчитывать, то на некотором этапе первоначальная квота и квота, посчитанная по количеству голосов и мест на текущем этапе, не будут равны, что естественно нарушит аксиому 1. Множество избирателей, как и количество оставшихся мест к распределению меняются только в момент избрания очередного кандидата. На тех этапах процедуры, в которых не произошло избрания кандидата, квота не меняется. Непередаваемые голоса учитываются при подсчете квоты. Оказывается, что пересчет квоты не вносит существенных изменений в процедуру, так как квота может уменьшиться только один раз за всю процедуру на единицу.

Лемма 1. Квота, посчитанная по формуле (3), не может увеличиться ни на каком этапе процедуры.

Доказательство. По определению квоты количество кандидатов, равное числу мест, могут набрать квоту, но большее количество кандидатов не могут, т.е.

$$s - |E_i| \le \frac{|V_i|}{q_i} < s - |E_i| + 1. \quad (4)$$

Допустим, что после избрания на этапе i очередного кандидата квота увеличилась. Это означает, что старая квота приводила к избранию большего количества кандидатов, чем $s - |E_i| - 1$,

$$\frac{|V_i| - q_i}{q_i} \ge s - |E_i|,$$

$$\frac{|V_i|}{q_i} \ge s - |E_i| + 1.$$

что противоречит (4).

Таким образом, на каждом этапе квота может только уменьшаться или не измениться:

$$q_i - q_0 \le 0. \qquad \blacksquare$$

Теорема 1. Для квоты, посчитанной по формуле (3) на последнем этапе процедуры $q_l = \left\lfloor \frac{|V_l|}{s - |E_l| + 1} \right\rfloor + 1$, выполняется $-1 \le q_l - q_0 \le 0$.

Доказательство. По лемме 1 на каждом этапе квота может только уменьшаться или не измениться

$$q_i - q_0 \le 0.$$

Покажем, что она не может уменьшиться более чем на единицу за всю процедуру. Общее изменение квоты с начала процедуры равно

$$q_i - q_0 = \left\lfloor \frac{|V_i|}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|V_0|}{s+1} \right\rfloor.$$

На каждом этапе, когда произошло избрание кандидата, множество избирателей сокращается, тогда

$$q_i - q_0 = \left\lfloor \frac{|V_0| - \sum_{j \in J_i} q_j}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|V_0|}{s+1} \right\rfloor,$$

где J_i – множество этапов до этапа i, которые закончились избранием кандидата,

$$|J_i| = |E_i|.$$

Без знака округления вниз до ближайшего целого выражение увеличится менее чем на единицу. Таким образом, целая часть разности не превышает разности целых частей

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{|V_0| - \sum_{j \in J_i} q_j}{s - |E_i| + 1} - \frac{|V_0|}{s+1} \right\rfloor,$$

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{|E_i||V_0| - (s+1)|E_i| q_0 - (s+1)\sum_{j \in J_i}(q_j - q_0)}{(s - |E_i| + 1)(s+1)} \right\rfloor.$$

Используя определение q_0, получим

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{\frac{|E_i||V_0|}{s+1} - |E_i|\left(\frac{|V_0|}{s+1} + 1 - \left\{\frac{|V_0|}{s+1}\right\}\right) - \sum_{j \in J_i}(q_j - q_0)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor,$$

где фигурные скобки обозначают операцию $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Так как $|J_i| = |E_i|$, получим

$$q_i - q_0 \geq \left\lfloor \frac{\sum_{j \in J_i}\left(q_0 - q_j - 1 + \left\{\frac{|V_0|}{s+1}\right\}\right)}{s - |E_i| + 1} \right\rfloor.$$

Обозначим последний этап, когда выполнено $q_i = q_0$, как этап d, тогда, начиная с этапа $d + 1$, выражение $\left\lfloor \dfrac{\sum_{j\in J_i}\left(q_0 - q_j - 1 + \left\{\frac{|V_0|}{s+1}\right\}\right)}{s-|E_i|+1} \right\rfloor$ не убывает.

Рассмотрим процедуру, в которой этап d будет этапом 0, т.е. начинающуюся в условиях этапа d. В такой постановке будут распределяться $s-|E_d|$ мест при $q'_0 = q_d = q_0$. Так как это продолжение прежней процедуры, квоты не изменились и значение $q'_{i-d} = q_i$ осталось прежним, $|V_d| = |V'_0|$. Для этой процедуры будет верно

$$\left\lfloor \frac{\sum_{j\in J'_{i-d}}\left(q'_0-q'_j-1+\left\{\frac{|V_0|}{s-|E_d|+1}\right\}\right)}{s-|E_d|-|E'_{i-d}|+1}\right\rfloor \le q'_{i-d}-q'_0 .$$

В сумме, стоящей в числителе, только первое слагаемое отрицательно. Оно равно

$$q'_0-q'_j-1+\left\{\frac{|V_0|}{s-|E_d|+1}\right\} \ge -1 .$$

Таким образом,

$$-1 \le \left\lfloor \frac{\sum_{j\in J'_{i-d}}\left(q'_0-q'_j-1+\left\{\frac{|V_0|}{s-|E_d|+1}\right\}\right)}{s-|E_d|-|E'_{i-d}|+1}\right\rfloor \le q'_{i-d}-q'_0 .$$

Получаем $-1 \le q_i - q_0 \le 0$, что верно и для последнего этапа $-1 \le q_l - q_0 \le 0$. ■

Теорема 2. Единственным методом, удовлетворяющим аксиомам 1–4, будет метод со случайным равновероятным на каждом этапе способом выбора выигрывающей коалиции с пересчетом квоты на каждом шаге по формуле (3).

Доказательство. Так как выбор не зависит от последующих альтернатив (аксиома 2) и на каждом этапе выбор эквивалентен выбору на нулевом этапе (аксиома 1), не имеющем предыстории, то избиратели отличаются только именами и первой в предпочтениях альтернативой на i-ом шаге. Из анонимности (аксиома 3) следует, что каждый избиратель, а следовательно, и каждая коалиция априори (до начала процедуры) имеет равные шансы быть выигрывающей, из аксиомы 1 первый и последующие этапы не должны различаться, следовательно, равные независимые шансы сохранятся на каждом этапе. Единственный метод, создающий равные шансы, это равновероятный на каждом этапе способ выбора коалиции. Чтобы величина выигрывающей коалиции не зависела от этапа, квоту необходимо и достаточно пересчитывать по формуле (3). Таким образом, единственный метод, удовлетворяющий аксиомам 1–3, это случайный равновероятный на каждом этапе способ выбора выигрывающей коалиции с пересчетом квоты на каждом шаге по формуле (3). По построению этот метод является нейтральным (аксиома 4). ■

По сути, описанный метод – это взвешенный включающий метод Грегори в вероятностной версии с пересчетом квоты на каждом этапе.

Покажем, что аксиомы 1, 2, 3 независимы, так как можно построить примеры, нарушающие только одну аксиому из трех. Приведем примеры методов, нарушающих в отдельности аксиомы 1, 2, 3.

Метод 1. Случайным образом раздаются номера избирателям один раз на нулевом этапе. Лексикографическим способом пронумеровываются коалиции. Выбираем коалицию с наименьшим номером. Выполняются аксиомы 2, 3, 4, но нарушается 1.

Метод 2. На каждом этапе пересчитывается квота и случайно упорядочиваются альтернативы. Коалиция образуется из тех избирателей, у которых следующая по предпочтениям альтернатива наиболее близка к избранной. При неразличимости коалиций по данному критерию выбираем среди этих коалиций равновероятно. Выполняются аксиомы 1, 3, 4, но нарушается 2.

Метод 3. По существующим именам избирателей лексикографически упорядочим коалиции. На каждом этапе пересчитываем квоту и выбираем коалицию с наименьшим номером. Выполняются аксиомы 1, 2, 4, но нарушается 3.

Метода, удовлетворяющего аксиомам 1, 2, 3, но не удовлетворяющего аксиоме 4, не существует. Это следует из теоремы 2.

Покажем, что метод Грегори, как в постановке со случайным отбором, так и с пропорциональным отбором, не удовлетворяет аксиоме 1.

Вернемся к примеру, разобранному в начале статьи. После распределения излишка кандидата **a** образовалась следующая ситуация:

5 голосов $b \succ c \succ d$ (перешло от **a**),
10 избирателей $b \succ d$,
10 избирателей c ,
10 избирателей d .

Квота равна 14. Избирается кандидат **b**, по методу Грегори один голос переходит кандидату **c**.

Если бы такая ситуация сложилась на первом этапе, то голоса выбирались равновероятно среди всех бюллетеней, а именно с вероятностью 5/15 перераспределялись голоса первой группы и с вероятностью 10/15 – второй. Выбор голосов для передачи следующему кандидату изменился. Таким образом, метод Грегори не удовлетворяет свойству независимости от предыстории (аксиома 1). При пропорциональном определении бюллетеней для перераспределения метод Грегори также в этом примере будет нарушать аксиому 1. Включающий метод Грегори тоже нарушает аксиому 1, но взвешенный включающий метод Грегори, дополненный пересчетом квоты на каждом шаге, будет удовлетворять аксиоме 1.

Метод Грегори со случайным отбором бюллетеней для передачи удовлетворяет свойству независимости от последующих предпочтений (аксиома 2), так как изменение профиля предпочтений никак не повлияет на вероятности выбора выигрывающей коалиции. Аналогично вероятностные варианты усложненных методов Грегори будут удовлетворять аксиоме 2.

Метод Грегори с пропорциональным отбором бюллетеней для передачи не удовлетворяет свойству независимости от последующих предпочтений (аксиома 2). Рассмотрим следующий пример. Пусть количество избирателей и мест таково, что квота равна шести. В табл. 7 приведена ситуация на первом этапе голосования относительно предпочтений избирателей, голосующих за кандидата **a**. Остальные голоса таковы, что кандидат **a** набирает максимум голосов.

Таблица 7.

Выбор выигрывающей коалиции

	Голоса за кандидата **a**								Остальные голоса
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Первые предпочтения	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	**a**	**a**	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	...
Вторые предпочтения	$\underline{\mathbf{c}}$	$\underline{\mathbf{c}}$	$\underline{\mathbf{c}}$	**c**	**d**	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{d}}$	...

Вторые предпочтения (относительно кандидатов **c** и **d**) еще не учтены процедурой. Процедура выбирает выигрывающую коалицию из шести некоторых бюллетеней, составляющих квоту (голоса {1, 2, 3, 6, 7, 8}, выделены подчеркиванием), пропорционально вторым предпочтениям. Так как бюллетеней, в которых на вторых местах стоят кандидаты **c** и **d**, соответственно равное количество, то и в коалиции они должны быть представлены поровну. Пример такой коалиции представлен в табл. 3. Голоса 4 и 5 передаются соответственно кандидатам **c** и **d**. Но если в этих бюллетенях поменять вторые предпочтения, то в предыдущей коалиции распределение вторых мест не пропорционально, что можно увидеть из табл. 8.

Таблица 8.

Изменение вторых предпочтений

	Голоса за кандидата **a**								Остальные голоса
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Первые предпочтения	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	**a**	**a**	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	...
Вторые предпочтения	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{c}}$	$\underline{\mathbf{c}}$	**c**	**c**	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{d}}$	...

После изменения вторых предпочтений выигрывающая коалиция должна измениться, что отражено в табл. 9. Это демонстрирует нарушение аксиомы 2.

Таблица 9.

Выбор выигрывающей коалиции

	Голоса за кандидата **a**								Остальные голоса
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Первые предпочтения	**a**	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	**a**	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	$\underline{\mathbf{a}}$	...
Вторые предпочтения	**d**	$\underline{\mathbf{c}}$	$\underline{\mathbf{c}}$	$\underline{\mathbf{c}}$	**c**	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{d}}$	$\underline{\mathbf{d}}$	...

Аналогичные рассуждения верны и для усложненных методов Грегори, так как на первом этапе они не различаются.

Случай дробных голосов

При голосовании каждый избиратель имеет по одному голосу. Далее при передаче голосов необходимо выбрать некоторое количество бюллетеней, но в принципе можно передавать не целые голоса, а разделять каждый голос, или некоторые из них между кандидатами. Если позволить передавать дробное число голосов, то можно расширить множество методов, реализующих правило передачи голосов.

Оставшиеся голоса на *i*-ом этапе будут обозначаться вектором $v_i = (v_{i1}, \ldots, v_{in})$, где $v_{ik} \in [0,1]$. Единица обозначает полный голос, $v_0 = (1, \ldots, 1)$.

Характеристический вектор коалиции – это вектор $w_{ij} = (w_{ij1}, \ldots, w_{ijn})$, где $w_{ijk} \in [0,1]$. Единица обозначает принадлежность к коалиции *k*-го избирателя на этапе *i* за *j*-го кандидата, кроме того, если $v_{ik} = 0$, то и $w_{ijk} = 0$.

$w_{ij}^{\max}$ – максимальная коалиция, т.е. все остальные избиратели голосуют за других кандидатов.

Коалиция будет выигрывающей, если число голосов (скалярное произведение указанных векторов) будет равно квоте

$$v_i \cdot w_{ij} = q(n,s). \tag{5}$$

Описание процедуры правила передачи голосов.

В начале процедуры определяется квота. Квота может определяться как и в случае с целыми голосами $q_0 = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + 1$, но может определяться как $q_0 = \left\lfloor \frac{n}{s+1} \right\rfloor + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. Кроме того, на нулевом этапе $i := 0$, $E_0 := \varnothing$.

Этап $i \geq 0$.

а) Если существует выигрывающая коалиция w_{ij} для некоторого кандидата c_j, то кандидат c_j, поддержанный этой коалицией, объявляется избранным. Тогда

$$E_{i+1} := E_i \cup \{c_j\} .$$

Если $|E_{i+1}| < s$, то

$$v_{i+1,k} := v_{ik} \cdot (1 - w_{ijk}),$$
$$C_{i+1} := C_i \setminus \{c_j\},$$
$$i := i + 1,$$

переход к началу нового этапа, иначе процедура передачи голосов заканчивается.

б) Если выигрывающей коалиции не существует, то алгоритм продолжается следующим образом. Если $|s-E_i|=|C_i|$, то все кандидаты объявляются избранными $E_{i+1}:=E_i\cup\{C_i\}$ и процедура завершается. В противном случае, т.е. если $|s-E_i|<|C_i|$, кандидат $c_j\in C_i$ с наименьшим $v_i\cdot w_{ij}^{\max}$ объявляется проигравшим и

$$E_{i+1}:=E_i\,,$$
$$v_{i+1}:=v_i\,,$$
$$C_{i+1}:=C_i\setminus\{c_j\},$$
$$i:=i+1\,,$$

переход к началу нового этапа.

Кроме равновероятного метода аксиомам 1, 2, 3 удовлетворяет взвешенный включающий метод Грегори с пересчетом квоты (если квота определяется так же, как в случае с целыми голосами $q_i=\left\lfloor\frac{|V_i|}{s-|E_i|+1}\right\rfloor+1$, то она изменится не более чем на единицу, если как $q_i=\left\lfloor\frac{|V_i|}{s-|E_i|+1}\right\rfloor+\varepsilon$, то не более чем на ε), распределяющий излишек равномерно, т.е. распределяющий равную долю каждого голоса. Взвешенный включающий метод Грегори распределяет равные доли каждого голоса, а именно, из каждого голоса, полного или неполного, оставляет в выигрывающей коалиции ту часть k-го голоса, которую составляет доля квоты во всей выигрывающей коалиции:

$$w_{ijk}=\frac{q_i}{w_{ij}^{\max}\cdot v_i}\,. \tag{6}$$

Такая постановка определяет включенность в коалицию вне зависимости от последующих предпочтений (аксиома 2) и не зависит от этапа (аксиома 1). Учет всех избирателей в равной доле создает анонимную процедуру (аксиома 3).

Теорема 3. В постановке с дробными голосами существует метод, удовлетворяющий аксиомам 1–3, но не удовлетворяющий аксиоме 4.

Доказательство. Построим этот метод. Выберем некоторого кандидата **x**. Все выигрывающие коалиции описываются формулой (5) при условии, что $w_{ijk}\le w_{ijk}^{\max}$. Если побеждает кандидат **x**, то будем выбирать выигрывающую коалицию равновероятно из множества всех возможных выигрывающих коалиций. Если побеждает любой другой кандидат, то будем определять выигрывающую коалицию по формуле (6), т.е. передавать равные доли каждого голоса. Решение по этому методу явно зависит от имени кандидатов, что нарушает аксиому 4. При пересчете квоты на каждой итерации по формуле (3) этот метод будет удовлетворять аксиоме 1. При любом победившем кандидате выбор не зависит от имен избирателей и последующих предпочтений, т.е. удовлетворяет аксиомам 2 и 3. Таким образом, построен метод, удовлетворяющий аксиомам 1, 2, 3, но нарушающий аксиому 4. ■

Требование выполнения всех аксиом 1–4 образует класс методов, комбинирующих равновероятное распределение и передачу равных долей независимо ни от чего или в зависимости от распределения голосов в первых предпочтениях.

Метод Мика [6, 7], а также и другие методы, построенные на его основе, не подпадают под описанную в данной статье формализацию правила передачи голосов, так как основными принципами работы этих методов являются передача голосов уже победившим кандидатам, уменьшение квоты из-за непередаваемых голосов с соответствующим пересчетом голосов уже победивших кандидатов, т.е. постоянное изменение выигрывающих коалиций уже победивших кандидатов. Метод Мика в силу своей сложности не получает распространения и в настоящее время используется только на выборах в Новой Зеландии [11].

Выводы

В работе построено обобщение различных методов, реализующих правило передачи голосов на практике, в виде формальной процедуры. Существующие методы можно рассматривать как частные случаи этой процедуры. Аксиоматика этих методов по своей сути не устанавливает ни одной из компонент определения победителей – ни имен кандидатов, ни имен избирателей, ни имен коалиций, ни номера итерации. Это с необходимостью приводит к случайному отбору коалиций на каждом шаге, что и отражено в теореме 2.

Предложен новый метод, основанный на правиле передачи голосов, и построено его аксиоматическое описание. Этот метод назван взвешенным включающим методом Грегори, дополненным пересчетом квоты на каждом этапе, с передачей голосов с равной вероятностью либо с передачей равных долей голосов, если процедура позволяет передавать дробное число голосов.

Пересчет квоты не вносит существенных изменений в процедуру, так как по теореме 1 квота за всю процедуру подсчета может измениться не более чем на единицу в сторону уменьшения. Оказывается, что если квота не пересчитывается, то реализация процедуры на шаге i отличается от реализации на нулевом шаге. Иначе говоря, процедура в зависимости от номера итерации «работает» по-разному. Именно желание избежать этой «зависимости от пути» привело к формулировке аксиомы «независимости от предыстории».

Отметим, что пересчет квоты в реальных выборах с большим количеством избирателей, скорее всего, не сыграет существенной роли, но, очевидно, увеличит прозрачность процедуры, так как сотрет различия между первым и последующими этапами подсчета голосов.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Современные избирательные системы. Вып. 3: Испания, США, Финляндия, Япония / А.Г. Орлов, В.И. Лафитский, И.А. Ракитская и др.; науч. ред. А.В. Иванченко. М.: РЦОИТ, 2009.

2. *Doron G., Kronick R.* Single Transferable Vote: An Example of a Perverse Social Choice Function // American Journal of Political Science. 1977. Vol. 21. № 2. P. 303–311.

3. *Farrel D.M., McAllister* I. The 1983 Change in Surplus Vote Transfer Procedures for the Australian Senate and its Consequences for the Single Transferable Vote // Australian Journal of Political Science. 2003. Vol. 38. № 3. P. 479–491.

4. *Hill D.I.* Miller's Example of the Butterfly Effect under STV // Electoral Studies. 2008. № 27. P. 684–686.

5. H*oag C.G., Hallett G.H.* Proportional Representation. N.Y.: The Macmillan Company, 1926.

6. *Meek B.L.* Equality of the Treatment of Votes and a Feedback Mechanism for Vote Counting // Voting Matters. 1994. Iss. 1. P. 1–7.

7. *Meek B.L.* The Problem of Nontransferable Votes // Voting Matters. 1994. Iss. 1. P. 7–11.

8. *Miller N.R.* The Butterfly Effect under STV // Electoral Studies. 2007. № 26. P. 503–506.

9. *Nurmi H.* It's Not Just the Lack of Monotonicity // Representation. 1996. Vol. 34: № 1. P. 48–52.

10. *Tideman N.* The Single Transferable Vote // The Journal of Economic Perspectives. 1995. Vol. 9. № 1. P. 27–38.

11. *Todd S.W.* STV in New Zealand // Voting Matters. 2003. Iss. 16. P. 8–10.

12. *Woodall D.R.* Impossibility Theorem for Electoral Systems // Discrete Mathematics. 1987. № 66. P. 209–211.

13. Referendum on the Voting System / Electoral Commission. (http://www.elections.org.nz/elections/2011-general-election-and-referendum/2011-referendum-on-the-voting-system.html).

14. Referendum on the Voting System for the UK Parliament / The Electoral Commission. (http://www.electoralcommission.org.uk/elections/upcoming-elections-and-referendums/uk/referendum).

15. Statement of Votes: Referendum on Electoral Reform, May 17, 2005 / Elections BC. (http://www.elections.bc.ca/docs/rpt/SOV-2005-ReferendumOnElectoralReform.pdf).

16. Statement of Votes: Referendum on Electoral Reform, May 12, 2009 / Elections BC. (http://www.elections.bc.ca/docs/rpt/2009Ref/2009-Ref-SOV.pdf).