Экономический журнал ВШЭ. 2019. Т. 23. № 3. С. 444–464.
HSE Economic Journal, 2019, vol. 23, no 3, pp. 444–464.

О вейвлет-преобразованиях при моделировании цен акций нечеткими системами

Бричикова А.П., Могилевич Е.О., Шведов А.С.

Модели для временных рядов имеют большое значение для рынка акций. Нечеткие модели Такаги – Сугено (функциональные нечеткие системы) – это перспективный и уже достаточно распространенный подход, при котором для различных областей изменения тех или иных параметров используются различные регрессионные зависимости и производится мягкое переключение за счет применения правил нечеткой логики. В этом состоит преимущество данного подхода перед обычными стохастическими моделями. Каждая модель Такаги – Сугено основывается на своей базе нечетких правил. Эти модели можно рассматривать как обобщение классических эконометрических моделей, если считать, что одному нечеткому правилу соответствует одна такая модель. В настоящей работе исследуется возможность совместного применения вейвлет-преобразования и нечеткой модели Такаги – Сугено для анализа цен акций на примере следующих российских компаний: Газпром, Сбербанк, Магнит, Яндекс и Аэрофлот; такой подход применялся ранее для изучения некоторых зарубежных рынков акций. Вейвлет-анализ достаточно часто выступает в качестве инструмента для обработки сигналов, в том числе и временных рядов, так как дает возможность провести многоуровневую аппроксимацию. В настоящей работе строится модель Такаги – Сугено на непреобразованных данных и данных, подвергшихся преобразованиям с использованием вейвлетов Хаара. Для построения функций принадлежности применяется нечеткая кластеризация. Расчеты показывают, что применение вейвлетов достаточно часто позволяет улучшить прогнозные характеристики модели.

Ключевые слова: нечеткие системы; вейвлет-преобразование; рынок акций; регрессия, мягкое переключение.

DOI: 10.17323/1813-8691-2019-23-3-444-464

Бричикова Анна Павловна – аспирант 2 года обучения факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: marmot3119@gmail.com
Могилевич Елена Олеговна – аспирант 2 года обучения факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: gurjanovaelena@yandex.ru
Шведов Алексей Сергеевич – доктор физ.-мат. наук, профессор департамента прикладной экономики факультета экономических наук Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: ashvedov@hse.ru

Статья поступила: 01.07.2019/Статья принята: 11.09.2019.

1. Введение

Хотя стохастические модели остаются наиболее употребительными при анализе временных рядов, нет сомнений, что возможности этих моделей ограничены. В последние два десятилетия при изучении временных рядов все больше внимания уделяется нечетким моделям. Разумеется, всегда остается следующий вопрос. Привлечение новых разделов математики – это увеличение сложности, оправдывается ли это отдачей от модели? В отличие от некоторых других прикладных областей в анализе временных рядов нечеткая математика пока не стала полноценным конкурентом теории вероятностей. Однако свое место нечеткие и нечетко-случайные модели заняли и здесь.

Одно из направлений нечеткого моделирования – это системы, основанные на нечеткой логике. Такие системы делятся на функциональные (системы Такаги – Сугено) и реляционные (системы Мамдани). В настоящей работе рассматриваются только функциональные нечеткие системы. Нечеткие модели Такаги – Сугено, или TS-модели, были предложены в работе [Takagi, Sugeno, 1985] и с тех пор приобрели большую популярность. Наиболее распространенный метод оценки этих параметров предложен в работе [Sugeno, Kang, 1988], иногда и сами эти модели называются не TS-моделями, а TSK-моделями. Важное преимущество нечетких систем состоит в том, что они являются универсальными аппроксиматорами (см., например, обзор [Шведов, 2018]). Это означает, что для широкого класса нелинейных зависимостей можно построить нечеткую систему, которая эту зависимость с заданной точностью передает. С другой стороны, в силу своего локально-линейного характера нечеткая система Такаги – Сугено может рассматриваться как обобщение линейной эконометрической модели. Подробнее о нечетких системах и об их применениях можно прочитать, например, в книгах [Пегат, 2013; Рутковская и др., 2013].

Теория вейвлетов является сложившейся областью математики и не зависящей от теории нечетких множеств. При этом обработка данных различных типов с использованием вейвлетов приобрела большое практическое значение. По теории вейвлетов и по применениям этой теории имеется обширная литература, см., например, книги [Добеши, 2001; Блаттер, 2004; Малла, 2005; Percival, Walden, 2000]. Разномасштабность, структурные сдвиги, сезонность в данных – это те случаи, когда вейвлеты могут оказаться полезными (см. например, [Graps, 1995]).

Используются и такие математические модели, где задействованы и нечеткие множества, и вейвлеты. Разумеется, опять может быть задан вопрос, оправданно ли такое увеличение сложности. Однако, если вейвлет-преобразование используется в качестве препроцессинга, об увеличении сложности модели можно не говорить. Вопрос, который изучается в настоящей работе и на который дается положительный ответ, это вопрос о полезности такого препроцессинга. Известно, что при подобных исследованиях расчеты на реальных данных и расчеты на данных, симулированных при помощи той или иной стохастической модели, могут давать существенно разные результаты. В настоящей работе расчеты проводились на реальных данных. Но оптимальное значение для уровня разложения при вейвлет-преобразовании – это еще и характеристика разномасштабности самих данных.

Нечеткие системы Такаги – Сугено применяются в ряде работ для моделирования и прогнозирования фондовых индексов и цен акций. Здесь можно назвать работу [Chang et al., 2004], где предложен подход, основанный на технических индексах: скользящем среднем, отклонении от скользящего среднего, индексе относительной силы и других. В работе [Chang, Liu, 2008] TS-модель с использованием аналогичного подхода была применена к прогнозированию индекса Тайваньской фондовой биржи и курса акций компании MediaTek Inc. По итогам расчетов TS-модель показала снижение средней ошибки прогноза примерно в 3 раза по сравнению с аналогичной моделью без применения нечеткой логики. В работе [Могилевич, Шведов, 2017] TS-модель строилась для индексов Московской биржи: ММВБ, РТС и отраслевого индекса нефти и газа, в качестве независимых переменных брались технические индексы. Исследование показало, что модель способна уменьшить ошибку прогноза приблизительно в 4 раза по сравнению с аналогичной моделью без системы нечетких правил. В экономике нечеткие системы применяются также для прогнозирования динамики ВВП [Olej, 2005; Olej, Kfupka, 2005], цен на электроэнергию [Rodriguez, Anders, 2004; Pingan, Xiaohong, 2000].

Вейвлет-анализ используется при изучении финансовых инструментов (см., например: [Ramsey, 1999; Yamada, 2005; Rafiei et al., 2017]). Одной из причин применения предварительной вейвлет-обработки данных является отсутствие стационарности экономических и финансовых рядов [Ramsey, 1999]. Вейвлет-преобразование применяется в работе [Yamada, 2005] для оценивания бета-коэффициентов акций японской биржи. Полученные с использованием вейвлетов бета-коэффициенты дают больше информации о чувствительности доходности акций по отношению к доходности рыночного индекса. В работе [Struzik, 2001] вейвлет-преобразование используется для обработки временного ряда S&P. Для борьбы со смещением из-за выбросов оценок параметров модели, с неверными выводами и плохими прогнозами волатильности в работе [Grané, Veiga, 2010] используется метод обнаружения и коррекции на основе вейвлетов, который может быть применен к большому классу моделей; процедура применяется для трех индексов: Dow Jones, FTSE-100 и S&P 500. В работе [Bekiros, Marcellino, 2013] рассматривается вейвлет-анализ для исследования предсказуемости и структуры зависимости валютных рынков для разных временных масштабов. Многомерная модель ARMA-GARCH и вейвлет-анализ применяются для исследования волатильности и побочного эффекта шоков при совместном анализе цен на нефть и цен акций БРИКС в работе [Boubaker, Raza, 2017].

В работе [Chang, Fan, 2008] применено вейвлет-преобразование входных переменных при построении TS-модели, однако оно показало небольшое улучшение по сравнению с исходной TS-моделью. В этой работе применялось вейвлет-преобразование Хаара, модель Такаги – Сугено строилась с помощью кластеризации, где центры кластеров использовались для определения параметров гауссовской функции принадлежности. Для некоторых задач полезно использовать комбинацию нейронных сетей, вейвлетов и нечетких систем. Например, в работе [Lin, Chin, 2004] рассматривается модель, сочетающая в себе обычную нечеткую модель Такаги – Сугено и вейвлет-нейронную сеть. Компьютерное моделирование показало, что предложенная модель показывает меньшие среднеквадратичные ошибки, чем альтернативные методы. Две нечеткие вейвлет-сети, являющиеся комбинацией нечеткой TS-модели и вейвлет-преобразования, представлены в работе [Karatepe, Alci, 2005]. Эффективность предложенных моделей иллюстрируется экспериментами и сопоставляется с ранее опубликованными примерами. Методология, позволяющая определить необходимость вейвлет-обработки данных для дальнейшего использования TS-модели, предлагается в работе [Popoola, Ahmad, 2006]. Отметим также комбинированный подход, предложенный в работе [Cheng, Bai, 2015].

Структура настоящей работы следующая. В разделе 2 излагаются основные идеи, лежащие в основе вейвлет-преобразования данных и TS-моделей. В разделе 3 приведены результаты расчетов для разных промежутков времени для обыкновенных акций компаний, торгуемых на Московской бирже: Газпром, Сбербанк, Магнит, Яндекс и Аэрофлот, как с использованием вейвлет-преобразования в качестве препроцессинга, так и без такого препроцессинга.

2. Методология

2.1. Вейвлет-преобразования временных рядов

Теория многоуровневой аппроксимации сигналов, построенная в работе [Mallat, 1989], получила большое распространение. Сигналом называется функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, квадрат которой интегрируем (точнее, $f\in L^2(\mathbb{R})$). Построенная с соблюдением определенных требований последовательность подпространств $\ldots\subseteq V_{-2}\subseteq V_{-1}\subseteq V_0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq V_3\subseteq\ldots$ пространства $L^2(\mathbb{R})$ определяет две функции – масштабирующую функцию $\varphi(t)$ и вейвлет-функцию $\psi(t)$. Эти функции также принадлежат $L^2(\mathbb{R})$ и, в частности, удовлетворяют условиям $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt=1$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)dt=0$. Для любого сигнала f строится последовательность улучшающихся аппроксимаций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ такая, что $f_n\in V_n$ при каждом $n\in\mathbb{Z}$. При $N>n$ имеет место разложение аппроксимирующего сигнала f_N на аппроксимирующий сигнал f_n и детализирующие сигналы $D_n,\ldots,D_{N-1}$:

(1) $$f_N = f_n + D_n + \ldots + D_{N-1}.$$

Приведем основные формулы. Для функций $f,g\in L^2(\mathbb{R})$ скалярное произведение определяется следующим образом:

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt.$$

Пусть при $j\in\mathbb{Z}$

$$\varphi_{n,j}(t)=2^{\frac{n}{2}}\varphi\left(2^n t-j\right),\quad \psi_{n,j}(t)=2^{\frac{n}{2}}\psi\left(2^n t-j\right).$$

Тогда для аппроксимирующего сигнала имеет место представление

$$f_n(t)=\sum_j a_{n,j}\varphi_{n,j}(t),$$

где $a_{n,j} = \left\langle f, \varphi_{n,j} \right\rangle$. Для детализирующего сигнала имеет место представление

$$D_n(t) = \sum_j c_{n,j} \psi_{n,j}(t),$$

где $c_{n,j} = \left\langle f, \psi_{n,j} \right\rangle$. Из (1) можно вывести, что

$$f = f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} D_n.$$

В приложениях часто используются вейвлеты Хаара. Эти вейвлеты будут использованы и в настоящей работе. Для вейвлетов Хаара подпространство V_n состоит из функций постоянных на каждом полуинтервале $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда масштабирующая функция имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1) \\ 0, & t \notin [0,1), \end{cases}$$

и вейвлет-функция имеет вид

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \\ 0, & t \notin [0,1). \end{cases}$$

Очевидно, что при любом $t \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения

(2) $$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1), \;\; \psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1).$$

Рассмотрим временной ряд $y_0, \ldots, y_{T-1}$, пусть $T = 2^n$. С временным рядом свяжем сигнал

(3) $$f_n(t) = \sum_{j=0}^{2^n-1} y_j \varphi_{n,j}(t).$$

Отметим, что функция $\varphi_{n,j}$ принимает значение единица на полуинтервале $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$ и принимает значение ноль вне этого полуинтервала. Таким образом, носителем функции f_n является полуинтервал $[0,1)$. Задача состоит в том, чтобы найти вейвлет-преобразование сигнала

$$f_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} s_k \varphi_{n-1,k}(t)$$

и детализирующий сигнал

$$D_{n-1}(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} d_k \psi_{n-1,k}(t)$$

таким образом, чтобы при любом $t \in \mathbb{R}$ имело место соотношение

$$f_n(t) = f_{n-1}(t) + D_{n-1}(t). \tag{4}$$

Из (3) следует, что

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(y_{2k} \varphi_{n,2k}(t) + y_{2k+1} \varphi_{n,2k+1}(t) \right) =$$
$$= 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(y_{2k} \varphi\left(2^n t - 2k\right) + y_{2k+1} \varphi\left(2^n t - 2k - 1\right) \right).$$

Применяя (2), получаем

$$f_n(t) = 2^{\frac{n}{2}-1} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(y_{2k} \left(\varphi\left(2^{n-1}t - k\right) + \psi\left(2^{n-1}t - k\right) \right) + y_{2k+1} \left(\varphi\left(2^{n-1}t - k\right) - \psi\left(2^{n-1}t - k\right) \right) \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(y_{2k} \left(\varphi_{n-1,k}(t) + \psi_{n-1,k}(t) \right) + y_{2k+1} \left(\varphi_{n-1,k}(t) - \psi_{n-1,k}(t) \right) \right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{y_{2k} + y_{2k+1}}{\sqrt{2}} \varphi_{n-1,k}(t) + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{y_{2k} - y_{2k+1}}{\sqrt{2}} \psi_{n-1,k}(t).$$

Таким образом,

$$s_k = \frac{y_{2k} + y_{2k+1}}{\sqrt{2}}, \quad d_k = \frac{y_{2k} - y_{2k+1}}{\sqrt{2}}.$$

Обратное вейвлет-преобразование строится по формулам

$$y_{2k} = \frac{s_k + d_k}{\sqrt{2}}, \quad y_{2k+1} = \frac{s_k - d_k}{\sqrt{2}}.$$

Из (4) следует, что при любом натуральном A, не превосходящем n,

$$f_n(t) = f_{n-A}(t) + D_{n-A}(t) + \ldots + D_{n-1}(t).$$

Число A называется уровнем разложения при вейвлет-преобразовании временного ряда.

2.2. Функциональные нечеткие системы

Если говорить о практических применениях теории нечетких множеств, то нечеткие системы – это одно из наиболее важных. Основная часть нечеткой системы – набор нечетких правил. Нечеткое правило может иметь следующий вид:

$$\text{если } (x_1 = A_{i1}) \text{ и … и } (x_m = A_{im}), \text{ то } y = a_{i0} + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m .$$

Здесь $(x_1,\ldots,x_m)$ – набор входных параметров (действительных чисел); i – номер нечеткого правила. В нечетком правиле с номером i используются нечеткие множества $A_{i1},\ldots,A_{im}$ и коэффициенты (действительные числа) $a_{i0}, a_{i1},\ldots,a_{im}$.

Степень активации i-го нечеткого правила $\tau_i(x_1,\ldots,x_m)$ зависит от значений функций принадлежности $\mu_{A_{i1}},\ldots,\mu_{A_{im}}$ нечетких множеств $A_{i1},\ldots,A_{im}$ в соответствующих точках. Наиболее распространенные подходы, это использование либо произведения

$$\tau_i(x_1,\ldots,x_m) = \mu_{A_{i1}}(x_1)\cdot\ldots\cdot\mu_{A_{im}}(x_m),$$

либо минимума

$$\tau_i(x_1,\ldots,x_m) = \min\left(\mu_{A_{i1}}(x_1),\ldots,\mu_{A_{im}}(x_m)\right)$$

(в настоящей работе используется произведение). Тогда выходом нечеткой системы является

$$y = \frac{\sum_i \tau_i(x_1,\ldots,x_m)\left(a_{i0} + a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m\right)}{\sum_i \tau_i(x_1,\ldots,x_m)}. \tag{5}$$

Идентификация нечеткой системы, т.е. определение подходящего числа и вида нечетких правил, функций принадлежности всех нечетких множеств и всех коэффициентов – это сложная задача. По этой проблеме имеется обширная литература. В данной работе при идентификации используется алгоритм нечеткой кластеризации fuzzy c-means.

В качестве примера рассмотрим самую простую ситуацию, когда $m=1$ и желательно использовать одну зависимость

$$y = a_{10} + a_{11}x_1$$

для малых значений x_1 и другую зависимость

$$y = a_{20} + a_{21}x_1$$

для больших значений x_1, обеспечив мягкое переключение. Это означает, что база должна состоять из двух нечетких правил. Тогда нечеткое множество A_{11} – это малые x_1, нечеткое множество A_{21} – это большие x_1. Пусть принято, что значения x_1, меньшие 10, – бесспорно малые, а значения x_1, большие 20, – бесспорно большие. Тогда функции принадлежности нечетких множеств A_{11}, A_{21} могут иметь следующий вид:

$$\mu_{A_{21}}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_1 \le 10, \\ (x_1 - 10)/10 & \text{при} \quad 10 < x_1 < 20, \\ 1 & \text{при} \quad x_1 \ge 20, \end{cases}$$

$$\mu_{A_{11}}(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_1 \le 10, \\ (20 - x_1)/10 & \text{при} \quad 10 < x_1 < 20, \\ 0 & \text{при} \quad x_1 \ge 20. \end{cases}$$

Предположим, что идентификация нечеткой системы проведена, т.е. коэффициенты $a_{10}, a_{11}, a_{20}, a_{21}$ определены и нужно найти значение выходной переменной y при $x_1 = 19$. Для первого нечеткого правила степень активации $\tau_1(x_1) = 0{,}1$, для второго нечеткого правила степень активации $\tau_2(x_1) = 0{,}9$. Поэтому выходное значение

$$y = 0{,}1(a_{10} + a_{11} \cdot 19) + 0{,}9(a_{20} + a_{21} \cdot 19).$$

В рассмотренном примере функции принадлежности нечетких множеств A_{11}, A_{21} выбраны «на глазок». Однако при построении функций принадлежности могут быть применены и оптимизационные процедуры.

Один из распространенных подходов к построению функций принадлежности – использование методов нечеткой кластеризации. Предположим, что заранее выбрано число нечетких кластеров C, совпадающее с числом нечетких правил. Для идентификации нечеткой системы используются N наблюдений вида $(y, x_1, \ldots, x_m)$. Пусть при помощи какого-то алгоритма определены числа u_{ki}, $k=1,\dots,N$, $i=1,\dots,C$; каждое из чисел u_{ki} принадлежит отрезку [0,1] и при любом k выполняется соотношение

$$\sum_{i=1}^{C} u_{ki} = 1.$$

Последнее условие означает, что если понимать u_{ki} как степень принадлежности наблюдения k к нечеткому кластеру i, то для любого наблюдения сумма степеней принадлежности ко всем нечетким кластерам должна равняться единице. Если бы рассматривалась задача не нечеткой кластеризации, а обычной кластеризации, то каждое наблюдение могло бы относиться только к одному кластеру. То есть для каждого наблюдения k следовало бы определить кластер i, к которому это наблюдение относится; это означало бы, что $u_{ki} = 1$ при данном i и $u_{ki} = 0$ при остальных i.

Если считать, что u_{ki} – это степень активации нечеткого правила i при наблюдении k, то для нахождения коэффициентов нечеткой системы можно использовать процедуру, предложенную в работе [Sugeno, Kang, 1988]. Обозначим k-е наблюдение $(y_k, x_{k1}, \dots, x_{km}) = (y_k, x_k)$, где x_k – m-мерный вектор. Пусть при фиксированных коэффициентах $\{a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im}\}_{i=1}^{C}$ определено значение

$$\hat{y}_k = \sum_{i=1}^{C} u_{ki}\left(a_{i0} + a_{i1}x_{k1} + \dots + a_{im}x_{km}\right). \quad (6)$$

Далее, используя обычный метод наименьших квадратов, следует найти те коэффициенты $\{a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{im}\}_{i=1}^{C}$, при которых сумма $\sum_{k=1}^{N}\left(y_k - \hat{y}_k\right)^2$ минимальна.

В данной работе для определения степеней принадлежности u_{ki} используется алгоритм fuzzy c-means. Подробно данный алгоритм нечеткой кластеризации описан, например, в работе [Miyamoto et al., 2008]. Далее приводятся основные шаги алгоритма.

1. Фиксируются числа $m > 1$, $\varepsilon > 0$. На нулевом этапе цикла случайным образом задается матрица степеней принадлежности $U = \{u_{ki}\}$, где числа u_{ki} удовлетворяют приведенным выше условиям.

2. Далее в цикле последовательно вычисляются центры кластеров

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^{N}(u_{ki})^m x_k}{\sum_{k=1}^{N}(u_{ki})^m},$$

расстояния от каждой точки x_k до центров кластеров $D(x_k, v_i) = \| x_k - v_i \|^2$, $i = 1, \ldots, C$, и скорректированная степень принадлежности каждого наблюдения к каждому кластеру

$$u_{ki} = \left(\sum_{j=1}^{C} \left(\frac{D(x_k, v_i)}{D(x_k, v_j)} \right)^{\frac{1}{m-1}} \right)^{-1}. \qquad (7)$$

3. Цикл длится, пока не будет выполнено условие: $\left\| U^{l+1} - U^l \right\| < \varepsilon$.

Пусть идентификация нечеткой системы произведена. После этого получен некоторый набор входных параметров x_l, и требуется найти значение y_l, отвечающее данному m-мерному вектору x_l. Для этого по формуле (7), где вместо k стоит l, рассчитываются u_{li}. Затем по формуле (6), где вновь вместо k стоит l, определяется $\hat{y}_l$. В данной работе для каждого из рассматриваемых временных рядов идентификация нечеткой системы проводится по обучающей выборке. Затем с помощью построенной модели рассчитываются требуемые значения для тестовой выборки.

Подчеркнем, что новых научных результатов, относящихся к методологии, настоящая работа не содержит. Однако говорить об определенной новизне представления существующих результатов можно.

2.3. Базы нечетких правил, используемые в данной работе

В настоящей работе нечеткие модели Такаги – Сугено строятся для временных рядов. Даже если ограничиваться обычными стохастическими линейными моделями для временных рядов, вопрос о том, что выбирать в качестве объясняющих переменных, в частности, вопрос о количестве лагов, непростой. В данной работе не предпринимается попытка повторить подобное исследование еще и с использованием нечетких систем или предложить некоторый эталон для сравнения. Нами реализован только один возможный подход, основанный на применении технических индексов. Для каждого из рассматриваемых временных рядов в качестве зависимой переменной для акции выступает цена закрытия, представленная временным рядом y_t, $t = 1, \ldots, T$. Входными переменными являются скользящее среднее за последние 6 дней

$$x_{1,t} = \frac{\sum_{k=t-5}^{t} y_k}{6}$$

и процентное отклонение каждого наблюдения от скользящего среднего

$$x_{2,t} = \frac{y_t - x_{1,t}}{x_{1,t}} \cdot 100\%.$$

Использование в качестве входных переменных скользящего среднего и процентного отклонения от скользящего среднего – это достаточно распространенный выбор. Разумеется, можно было бы рассматривать скользящее среднее не за 6 дней, а за другое число, и большее количество объясняющих переменных, скорее всего, дало бы более точные результаты.

Для каждого рассматриваемого временного ряда путем применения вейвлет-преобразования (берутся уровни разложения 1, 2 и 3) строятся три аппроксимирующих временных ряда. Затем строятся и сравниваются нечеткие модели для этих четырех временных рядов (исходного и трех аппроксимирующих). В каждом из четырех случаев следует подобрать оптимальное число нечетких кластеров. После построения нечетких моделей для аппроксимирующих временных рядов делаются обратные вейвлет-преобразования. Как обычно, каждый из четырех исследуемых временных рядов делится на две части, первая часть временного ряда называется обучающей выборкой, вторая часть – тестовой выборкой. Кроме того, для исходного временного ряда строится модель того же вида, но без нечетких правил, и проводится сравнение с этой моделью. Мы называем ее линейной моделью без нечетких правил, но можно было бы назвать и моделью с одним нечетким правилом (при условии, что все значения всех функций принадлежности положительны).

Принятая в расчетах процедура построения нечетких кластеров является некоторой модификацией той процедуры, которая описана в подразделе 2.2. Отдельно строятся нечеткие кластеры для каждой переменной x_1 и x_2. Пусть C_1 – число нечетких кластеров для переменной x_1, C_2 – число нечетких кластеров для переменной x_2. В расчетах каждое из чисел C_1 и C_2 может принимать значение, не большее 10. Общее число нечетких кластеров $C = C_1 C_2$. Пусть u_{ti_1} – степень принадлежности точки $x_{1,t}$ к нечеткому кластеру i_1, $i_1 = 1,\ldots,C_1$, u_{ti_2} – степень принадлежности точки $x_{2,t}$ к нечеткому кластеру i_2, $i_2 = 1,\ldots,C_2$. Тогда $u_{ti} = u_{ti_1} u_{ti_2}$ – степень принадлежности точки $\left(x_{1,t}, x_{2,t}\right)$ к нечеткому кластеру $i = (i_1 - 1)C_2 + i_2$.

Пусть обучающая выборка состоит из наблюдений y_t, $t = 1,\ldots,n_1$, тестовая выборка состоит из наблюдений y_t, $t = n_1 + 1,\ldots,n_1 + n_2$. Качество каждой модели обычно оценивается по одному из двух показателей $RMSE = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}{n_2}}$, $MAPE = \dfrac{1}{n_2}\sum_{t=n_1+1}^{n_1+n_2}\dfrac{\left|y_t - \hat{y}_t\right|}{y_t}$, где $\hat{y}_t$ – рассчитанные прогнозные значения. Консеквент каждого нечеткого правила имеет вид

$$y_{t+1} = a_{i0} + a_{i1}x_{1,t} + a_{i2}x_{2,t},$$

значение $\hat{y}_{t+1}$ рассчитывается по формуле вида (5). Варьируя число нечетких кластеров, для каждого из четырех временных рядов (исходного и трех аппроксимирующих) выбирается наилучшая модель. Затем эти наилучшие модели сравниваются между собой. Таким образом делается вывод об оправданности вейвлет-преобразования и, если вейвлет-преобразование оправданно, об оптимальном уровне разложения. Кроме того, проводится сравнение с линейной моделью без нечетких правил.

3. Результаты сравнения моделей

3.1. Описание данных

Для изучения вопроса о том, каким образом вейвлет-преобразование сказывается на точности модели, были выбраны временные ряды, состоящие из цен обыкновенных акций следующих компаний: Сбербанк, Магнит, Газпром, Яндекс и Аэрофлот. Цены акций взяты с сайта www.finam.ru. Для каждой из акций брались различные временные промежутки, всего 26 временных рядов. Каждый временной ряд делился на обучающую и тестовую выборки в пропорции приблизительно 7:3. В качестве зависимой переменной бралась стоимость акции на момент закрытия биржи, на ее основе строились технические индексы (подробнее см. подраздел 2.3). Для сравнения моделей были выбраны временные ряды различных типов, с восходящим и с нисходящим трендом, с большой и с малой волатильностью, с большими перепадами в значениях независимой переменной (в том числе затрагивающие кризисы 2008 и 2014 гг.). При этом, разумеется, при выборе временных рядов оставался определенный произвол. На рис. 1–6 показаны некоторые из этих временных рядов.

Рис. 1. Цены обыкновенных акций Магнита, тыс. руб. (восходящий тренд)

Рис. 2. Цены обыкновенных акций Сбербанка, тыс. руб. (высокая волатильность рынка)

Рис. 3. Цены обыкновенных акций Магнита, тыс. руб. (период, включающий кризис 2014 г.)

Рис. 4. Цены обыкновенных акций Сбербанка, тыс. руб. (период, включающий кризис 2014 г.)

Рис. 5. Цены обыкновенных акций Магнита, тыс. руб. (период, включающий кризис 2008 г.)

Рис. 6. Цены обыкновенных акций Газпрома, тыс. руб. (период, включающий кризис 2008 г.)

3.2. Результаты расчетов

Вначале проводится сравнение нечеткой модели Такаги – Сугено без вейвлет-преобразования и линейной модели того же вида, что и в консеквентах нечетких правил. В табл. 1 дается также информация о длинах временных рядов, которые были использованы для расчетов.

Из приведенных результатов видно, что линейная модель без нечетких правил для всех рассмотренных временных рядов проигрывает нечеткой модели Такаги – Сугено. Это подтверждает результаты из работы [Могилевич, Шведов, 2017], хотя в той работе исследование проводилось в рамках несколько более сложной схемы. При той схеме прогнозы для цен акций выражаются через прогнозы для технических индексов.

Результаты расчетов с применением вейвлет-преобразования исходного временного ряда представлены в табл. 2 (используются вейвлеты Хаара). Жирным шрифтом выделены результаты, где применение вейвлетов дает улучшение. Сравнение проводится с последним столбцом табл. 1, также сравниваются между собой столбцы табл. 2 для определения оптимального уровня разложения.

Таблица 1.

Сравнение линейной модели без нечетких правил и нечеткой модели Такаги – Сугено без вейвлет-преобразования

	Интервал обучающей выборки	Интервал тестовой выборки	Линейная модель без нечетких правил		TS-модель без вейвлет-преобразования	
			MAPE	RMSE	MAPE	RMSE
Компания AFLT						
2011–2017	11.03.2011–20.07.2015	21.07.2015–01.06.2017	1,094	2,188	0,807	1,895
2005–2011	12.04.2005–26.05.2009	27.05.2009–02.03.2011	0,701	0,477	0,294	0,214
2011–2015	12.04.2011–20.12.2013	23.12.2013–27.02.2015	0,835	0,689	0,509	0,445
2012–2018	12.01.2012–12.10.2016	13.10.2016–19.10.2018	1,712	3,48	1,246	2,776
2014–2017	16.01.2014–24.10.2016	25.10.2016–29.12.2017	1,748	3,915	1,277	3,016
2016–2018	15.01.2016–20.12.2017	21.12.2017–19.10.2018	0,429	0,672	0,135	0,23
Компания MGNT						
2011–2017	11.03.2011–20.07.2015	21.07.2015–01.06.2017	0,755	107,449	0,626	90,454
2006–2011	28.06.2006–20.10.2009	21.10.2009–02.03.2011	1,833	72,927	1,553	63,998
2011–2015	12.04.2011–20.12.2013	23.12.2013–27.02.2015	1,536	205,273	1,528	204,277
2012–2018	12.01.2012–12.10.2016	13.10.2016–19.10.2018	1,095	93,145	0,968	83,297
2014–2017	16.01.2014–24.10.2016	25.10.2016–29.12.2017	0,301	46,521	0,271	42,722
2016–2018	15.01.2016–20.12.2017	21.12.2017–19.10.2018	2,5	151,627	2,067	130,185
Компания SBER						
2011–2017	11.03.2011–20.07.2015	21.07.2015–01.06.2017	0,665	1,426	0,503	1,243
2011–2015	12.04.2011–20.12.2013	23.12.2013–27.02.2015	0,554	0,673	0,36	0,475
2012–2018	12.01.2012–12.10.2016	13.10.2016–19.10.2018	1,218	3,766	0,904	3,086
2014–2017	16.01.2014–24.10.2016	25.10.2016–29.12.2017	0,949	2,254	0,482	1,301
2016–2018	15.01.2016–20.12.2017	21.12.2017–19.10.2018	0,936	3,174	0,509	2,177

Окончание табл. 1.

	Интервал обучающей выборки	Интервал тестовой выборки	Линейная модель без нечетких правил		TS-модель без вейвлет-преобразования	
			MAPE	RMSE	MAPE	RMSE
Компания GAZP						
2011–2017	11.03.2011–20.07.2015	21.07.2015–01.06.2017	0,218	0,434	0,055	0,138
2006–2011	01.02.2006–20.08.2009	21.08.2009–02.03.2011	0,3	0,686	0,195	0,469
2011–2015	12.04.2011–20.12.2013	23.12.2013–27.02.2015	0,374	0,721	0,087	0,238
2012–2018	12.01.2012–17.10.2016	18.10.2016–26.10.2018	0,131	0,271	0,082	0,17
2014–2017	16.01.2014–24.10.2016	25.10.2016–29.12.2017	0,16	0,281	0,112	0,206
2016–2018	15.01.2016–15.12.2017	18.12.2017–12.10.2018	0,086	0,236	0,038	0,164
Компания YNDX						
2014–2018	17.06.2014–05.07.2017	06.07.2017–19.10.2018	1,112	31,954	1,009	29,242
2014–2017	17.06.2014–07.12.2016	08.12.2016–29.12.2017	0,776	19,293	0,584	15,772
2016–2018	15.01.2016–20.12.2017	21.12.2017–19.10.2018	0,82	24,954	0,743	22,86

Таблица 2.

Сравнение нечетких моделей Такаги – Сугено с различными уровнями разложения исходного временного ряда при вейвлет-преобразовании

	Уровень разложения исходного временного ряда A					
	1		2		3	
	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE
Компания AFLT						
2011–2017	**0,617**	**1,252**	0,724	1,373	0,908	1,738
2005–2011	0,339	0,238	0,440	0,289	0,617	0,410
2011–2015	0,544	0,482	0,604	0,546	0,671	0,586
2012–2018	**0,717**	**1,864**	0,894	2,116	1,171	2,579
2014–2017	**0,777**	**2,192**	0,903	2,338	1,290	3,021
2016–2018	0,216	0,408	0,296	0,510	0,350	0,593

Окончание табл. 2.

Компания	Уровень разложения исходного временного ряда A					
	1		2		3	
	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE	MAPE	RMSE
			Компания MGNT			
2011–2017	**0,352**	**58,570**	0,479	70,397	0,606	84,575
2006–2011	**0,903**	**36,794**	1,105	45,239	1,256	51,296
2011–2015	**0,921**	**151,194**	1,062	157,175	1,259	173,968
2012–2018	**0,566**	**60,721**	0,729	70,568	0,827	71,115
2014–2017	**0,151**	**29,410**	0,181	30,264	0,246	38,171
2016–2018	**1,208**	**85,274**	1,484	98,860	1,988	122,955
			Компания SBER			
2011–2017	**0,365**	**0,802**	0,463	1,009	0,588	1,178
2011–2015	**0,270**	**0,379**	0,351	0,447	0,440	0,488
2012–2018	**0,648**	**2,715**	0,803	2,998	0,946	3,181
2014–2017	**0,472**	**1,286**	0,558	1,452	0,741	1,785
2016–2018	0,575	2,389	0,705	2,591	0,761	2,756
			Компания GAZP			
2011–2017	0,095	0,209	0,134	0,287	0,177	0,367
2006–2011	0,212	0,519	0,259	0,621	0,479	1,045
2011–2015	0,161	0,336	0,215	0,418	0,255	0,492
2012–2018	**0,070**	**0,148**	0,090	0,178	0,108	0,220
2014–2017	**0,075**	**0,150**	0,100	0,181	0,124	0,222
2016–2018	**0,037**	**0,114**	0,054	0,147	0,070	0,204
			Компания YNDX			
2014–2018	**0,581**	**20,432**	0,748	24,070	0,919	26,862
2014–2017	**0,434**	**13,460**	0,523	14,487	0,634	16,010
2016–2018	**0,459**	**16,515**	0,572	20,031	0,711	22,464

Результаты из табл. 2 показывают, что в 19 из 26 случаев вейвлет-преобразование приводит к улучшению модели. Во всех случаях модели с уровнем разложения 1 оказываются лучше, чем модели с уровнями разложения 2 и 3. Это для рассматриваемых временных рядов дает характеристику разномасштабности данных. По показателям MAPE и RMSE различий в результатах сравнения нет. В тех 19 случаях, когда вейвлет-преобразование дает улучшение модели (сравнение первого столбца табл. 2 и последнего столбца табл. 1), это улучшение иногда совсем незначительное, иногда приближается к двукратному.

4. Выводы

В данной работе проведено сравнение обычной нечеткой системы Такаги – Сугено и нечеткой системы Такаги – Сугено с предварительным вейвлет-преобразованием данных при моделировании цен акций некоторых российских компаний. Результаты показали, что использование нечеткой модели Такаги – Сугено с данными, к которым применено вейвлет-преобразование, в большинстве рассмотренных случаев приводит к уменьшению средней ошибки прогноза. Модели, где используются данные, к которым применено вейвлет-преобразование с уровнем разложения 1, на рассмотренных временных рядах всегда оказываются лучше, чем модели, где используются данные, к которым применено вейвлет-преобразование с уровнями разложения 2 и 3. Также приведены результаты расчетов, подтверждающие известный для моделей авторегрессионного типа результат, что при использовании одной и той же функциональной формы добавление нечетких правил улучшает прогнозные характеристики модели.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2004.

Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005.

Могилевич Е.О., Шведов А.С. Анализ динамики фондовых индексов с использованием нечетких моделей Такаги – Сугено // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2017. Т. 21. № 3. С. 434–450.

Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013.

Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. 2-е изд. М.: Горячая линия – Телеком, 2013.

Шведов А.С. Аппроксимация функций с помощью нейронных сетей и нечетких систем // Проблемы управления. 2018. № 1. С. 21–29.

Bekiros S., Marcellino M. The Multiscale Causal Dynamics of Foreign Exchange Markets // Journal of International Money and Finance. 2013. 33. P. 282–305.

Boubaker H., Raza S. A Wavelet Analysis of Mean and Volatility Spillovers between Oil and BRICS Stock Markets // Energy Economics. 2017. 64. P. 105–117.

Chang P., Fan C. A Hybrid System Integrating a Wavelet and TSK Fuzzy Rules for Stock Price Forecasting // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews. 2008. 38. P. 802–815.

Chang P., Liu C. A TSK Type Fuzzy Rule Based System for Stock Price Prediction // Expert Systems with Applications. 2008. 34. № 1. P. 135–144.

Chang P., Wang Y., Yang W. An Investigation of the Hybrid Forecasting Models for Stock Price Variation in Taiwan // Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers. 2004. 21. P. 358–368.

Cheng R., Bai Y. A Novel Approach to Fuzzy Wavelet Neural Network Modeling and Optimization // Electrical Power and Energy Systems. 2015. 64. P. 671–678.

Grané A., Veiga H. Wavelet-based Detection of Outliers in Financial Time Series // Computational Statistics and Data Analysis. 2010. 54. P. 2580–2593.

Graps A. An Introduction to Wavelets // IEEE Computational Science and Engineering. 1995. 2. P. 50–61.

Karatepe E., Alci M. A New Approach to Fuzzy Wavelet System Modeling // International Journal of Approximate Reasoning. 2005. 40. P. 302–322.

Lin C., Chin C. Prediction and Identification Using Wavelet-based Recurrent Fuzzy Neural Networks // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics. 2004. 34. P. 2144–2154.

Mallat S.G. A Theory For Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. 11. P. 674–693.

Miyamoto S., Ichihashi H., Honda K. Algorithms for Fuzzy Clustering. Berlin: Springer, 2008.

Olej V. Design of the Models of Neural Networks and the Takagi–Sugeno Fuzzy Inference System for Prediction of the Gross Domestic Product Development // WSEAS Transactions on Systems. 2005. 4. P. 314–319.

Olej V., Kfupka J. Prediction of Gross Domestic Product Development by Takagi–Sugeno Fuzzy Inference Systems // Intelligent Systems Design and Applications. ISDA'05. Proceedings of the 5th International Conference on IEEE, 2005. P. 186–191.

Percival D.B., Walden A.T. Wavelet Methods for Time Series. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

Pingan Z., Xiaohong G. Fuzzy Modeling for Electrical Market Price Forecasting // Intelligent Control and Automation. Proceedings of the 3rd World Congress on IEEE, 2000. 3. P. 2262–2266.

Popoola A., Ahmad K. Testing the Suitability of Wavelet Preprocessing for TSK Fuzzy Models // IEEE International Conference on Fuzzy Systems. 2006.

Ramsey J. The Contribution of Wavelets to the Analysis of Economic and Financial Data // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1999. 357. P. 2593–2606.

Rafiei M., Niknam T., Khooban M. Probabilistic Electricity Price Forecasting by Improved Clonal Selection Algorithm and Wavelet Preprocessing // Neural Computing and Applications. 2017. 28. P. 3889–3901.

Rodriguez C., Anders G. Energy Price Forecasting in the Ontario Competitive Power System Market // IEEE Transactions on Power Systems. 2004. 19. P. 366–374.

Struzik Z. Wavelet Methods in (Financial) Time-series Processing // Physica A. 2001. 296. P. 307–319.

Sugeno M., Kang G. Structure Identification of Fuzzy Model // Fuzzy Sets and Systems. 1988. 1. P. 15–33.

Takagi T., Sugeno M. Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. 1985. P. 116–132.

Yamada H. Wavelet-based Beta Estimation and Japanese Industrial Stock Prices // Applied Economics Letters. 2005. 12. P. 85–88.

On Wavelet Transform for Stock Price Modeling by Fuzzy Systems

Anna Brychykova[1], **Elena Mogilevich**[2], **Alexei Shvedov**[3]

[1] National Research University Higher School of Economics,
11, Pokrovsky Bulvar, Pokrovka Complex, Moscow, 109028, Russian Federation.
E-mail: marmot3119@gmail.com

[2] National Research University Higher School of Economics,
11, Pokrovsky Bulvar, Pokrovka Complex, Moscow, 109028, Russian Federation.
E-mail: gurjanovaelena@yandex.ru

[3] National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya ul., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: ashvedov@hse.ru

Models for time series are very important for the stock market. Fuzzy Takagi – Sugeno models (functional fuzzy systems) are a promising and already common approach, in which different regression dependencies are used for different areas of variation of certain parameters, and soft switching is performed using the fuzzy logic rules. This is the advantage of this approach over conventional stochastic models. Each Takagi-Sugeno model is based on its set of fuzzy rules. These models can be viewed as a generalization of classical econometric models, if one such model corresponds to one fuzzy rule. This paper studies the possibility of using the wavelet transform and fuzzy Takagi – Sugeno model to analyze the dynamics of stock prices for the following Russian companies: Gazprom, Sberbank, Magnit, Yandex and Aeroflot; this approach was previously used to study some foreign stock markets. Wavelet analysis quite often acts as a tool for signal processing, including time series, as it allows for a multi-level approximation. In this paper, the Takagi – Sugeno model is based on untransformed data as well as data transformed using Haar wavelets. Fuzzy clustering is used to construct membership functions. Calculations show that the use of wavelets often improves the predictive characteristics of the model.

Key words: fuzzy systems; wavelet transform; stock market; regression; soft switching.

JEL Classification: C51.

* *
*

References

Blatter C. (2004) *Vejvlet-analiz. Osnovy teorii* [Wavelet Analysis. Fundamentals of Theory]. Moscow: Technosphere.

Daubechies I. (2001) *Desyat' lekcij po vejvletam* [Ten Lectures on Wavelets]. Igevsk: Regular and Chaotic Dynamics.

Mallat S. (2005) *Vejvlety v obrabotke signalov* [A Wavelet Tour of Signal Processing]. Moscow: Mir.

Mogilevich E.O., Shvedov A.S. (2017) Analiz dinamiki fondovyh indeksov s ispol'zovaniem nechetkih modelej Takagi – Sugeno [Modeling the Stock Market Dynamics by Takagi–Sugeno Fuzzy Inference Systems]. *HSE Economic Journal*, 21, 3, pp. 434–450.

Piegat A. (2013) *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* [Fuzzy Modeling and Control]. Moscow: Binom. Knowledge lab.

Rutkovskaya D., Pilinski M., Rutkovskii L. (2013) *Nejronnye seti, geneticheskie algoritmy i nechetkie sistemy* [Neural Networks, Genetic Algorithms and Fuzzy Systems]. 2-e izd. Moscow: Hot line – Telecom.

Shvedov A.S. (2018) Approksimaciya funkcij s pomoshch'yu nejronnyh setej i nechetkih sistem [Functions Approximating by Neural Networks and Fuzzy Syst]. *Control Sciences*, 1, pp. 21–29.

Bekiros S., Marcellino M. (2013) The Multiscale Causal Dynamics of Foreign Exchange Markets. *Journal of International Money and Finance*, 33, pp. 282–305.

Boubaker H., Raza S. (2017) A Wavelet Analysis of Mean and Volatility Spillovers between Oil and BRICS Stock Markets. *Energy Economics*, 64, pp. 105–117.

Chang P., Fan C. (2008) A Hybrid System Integrating a Wavelet and TSK Fuzzy Rules for Stock Price Forecasting. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*. 38, pp. 802–815.

Chang P., Liu C. (2008) A TSK Type Fuzzy Rule Based System for Stock Price Prediction. *Expert Systems with Applications*, 34, 1, pp. 135–144.

Chang P., Wang Y., Yang W. (2004) An Investigation of the Hybrid Forecasting Models for Stock Price Variation in Taiwan. *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers*, 21, pp. 358–368.

Cheng R., Bai Y. (2015) A Novel Approach to Fuzzy Wavelet Neural Network Modeling and Optimization. *Electrical Power and Energy Systems*, 64, pp. 671–678.

Grané A., Veiga H. (2010) Wavelet-based Detection of Outliers in Financial Time Series. *Computational Statistics and Data Analysis*, 54, pp. 2580–2593.

Graps A. (1995) An Introduction to Wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering*, 2, pp. 50–61.

Karatepe E., Alci M. (2005) A New Approach to Fuzzy Wavelet System Modeling. *International Journal of Approximate Reasoning*, 40, pp. 302–322.

Lin C., Chin C. (2004) Prediction and Identification Using Wavelet-based Recurrent Fuzzy Neural Networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 34, pp. 2144–2154.

Mallat S.G. (1989) A Theory For Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11, pp. 674–693.

Miyamoto S., Ichihashi H., Honda K. (2008) *Algorithms for Fuzzy Clustering*. Berlin: Springer.

Olej V. (2005) Design of the Models of Neural Networks and the Takagi–Sugeno Fuzzy Inference System for Prediction of the Gross Domestic Product Development. *WSEAS Transactions on Systems*, 4, pp. 314–319.

Olej V., Kfupka J. (2005) Prediction of Gross Domestic Product Development by Takagi–Sugeno Fuzzy Inference Systems. *Intelligent Systems Design and Applications. ISDA'05. Proceedings of the 5th International Conference on IEEE*, pp. 186–191.

Percival D.B., Walden A.T. (2000) *Wavelet Methods for Time Series*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pingan Z., Xiaohong G. (2000) Fuzzy Modeling for Electrical Market Price Forecasting. *Intelligent Control and Automation. Proceedings of the 3rd World Congress on IEEE*, 3, pp. 2262–2266.

Popoola A., Ahmad K. (2006) *Testing the Suitability of Wavelet Preprocessing for TSK Fuzzy Models*. Paper presented at IEEE International Conference on Fuzzy Systems.

Ramsey J. (1999) The Contribution of Wavelets to the Analysis of Economic and Financial Data. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 357, pp. 2593–2606.

Rafiei M., Niknam T., Khooban M. (2017) Probabilistic Electricity Price Forecasting by Improved Clonal Selection Algorithm and Wavelet Preprocessing. *Neural Computing and Applications*, 28, pp. 3889–3901.

Rodriguez C., Anders G. (2004) Energy Price Forecasting in the Ontario Competitive Power System Market. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19, pp. 366–374.

Struzik Z. (2001) Wavelet Methods in (Financial) Time-series Processing. *Physica A*, 296, pp. 307–319.

Sugeno M., Kang G. (1988) Structure Identification of Fuzzy Model. *Fuzzy Sets and Systems*, 1, pp. 15–33.

Takagi T., Sugeno M. (1985) Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, pp. 116–132.

Yamada H. (2005) Wavelet-based Beta Estimation and Japanese Industrial Stock Prices. *Applied Economics Letters*, 12, pp. 85–88.