Экономический журнал ВШЭ. 2019. Т. 23. № 3. С. 465–482.
*HSE Economic Journal,* 2019, vol. 23, no 3, pp. 465–482.

# Теоретический подход и численный метод поиска квазиоптимального решения нелинейной дискретной задачи большой размерности

**Горский М.А.**

Класс NP-полных проблем в настоящее время представлен не только «классической» задачей о коммивояжере и многочисленными сводящимися к ней задачами теории графов и сетей, но и задачами нелинейной и стохастической оптимизации, в том числе и в дискретной постановке. Особенностью этих задач является отсутствие конструктивных алгоритмов поиска оптимального решения за полиномиальное от размерности задачи время, что «обрекает» исследователя использовать при решении этих задач неконструктивные методы, например, алгоритм полного перебора. Однако эти алгоритмы в приложении к задачам дискретной оптимизации не позволяют решить поставленную задачу комплексно: например, таким методом нельзя получить важные для последующего анализа оптимального решения двойственные оценки ограничений. В статье автор для широкого класса задач производственного и финансового планирования, в постановочном плане сводящихся к задачам дискретной нелинейной выпуклой оптимизации большой размерности, предлагает оригинальный численный метод поиска квазиоптимального решения с высокой (наперед заданной) точностью приближения к оптимуму. Для обозначенного класса задач предложенный метод является универсальным, т.е. может быть применен без дополнительной адаптации численной процедуры.

***Ключевые слова*:** NP-полная проблема; линейная и нелинейная оптимизация; нелинейная дискретная задача; задачи производственного и финансового планирования; риск потери доходности; двойственная оценка ограничения; конструктивный алгоритм; квазиоптимальное решение.

**DOI:** 10.17323/1813-8691-2019-23-3-465-482

---

**Марк Андреевич Горский** – исполнительный директор ГК Рест-Групп. E-mail: gadjiagaev@mail.ru

Статья поступила: 28.08.2019/Статья принята: 11.09.2019.

## 1. Ведение в проблематику линейной и нелинейной целочисленной оптимизации и анализ литературных источников по тематике исследования

Напомним, что классическая задача линейной непрерывной оптимизации выглядит следующим образом:

$$F\left(\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \to \max; \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \le b_j,\ j=\overline{1,m}; \quad (2)$$

$$x_i \ge 0, i=\overline{1,n}, \quad (3)$$

где $p_i, c_{ij}, b_j\left(i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m}\right)$ – константы (в задачах производственного и финансового планирования, как правило, неотрицательные).

Достаточно большое число задач выбора оптимального решения в экономике, финансах и бизнесе для условий фиксированного критерия и априорно заданной системы ограничений (2) относится именно к этому весьма распространенному классу задач линейного программирования [Колемаев, 2012; Моисеев и др., 1978; Юдин и др., 1982; Minniti, Turino, 2013].

Важными особенностями задачи (1)–(3) являются наглядная интерпретация базисных и свободных переменных и возможность согласовать критерий (1) и правые части ограничений (2) с использованием двойственных оценок последних. Вопросам теории двойственных оценок и экономическим приложениям задач линейной оптимизации посвящено значительное число работ. Здесь отметим наиболее важные в прикладном аспекте работы Моисеева и Новожилова [Моисеев и др., 1978; Новожилов, 1972].

Если объект оптимизации описывается вектором с целочисленными компонентами, т.е. ограничение (3) заменяется на следующее:

$$x_i \in Z_+, \quad (4)$$

где $Z_+$ – множество неотрицательных целых чисел, то получившаяся линейная целочисленная задача (1), (2), (4) эффективно решается методами отсечения Гомори и ветвей и границ [Колемаев, 2012; Юдин и др., 1982]. Для всех перечисленных выше задач линейной оптимизации с успехом могут быть применимы пакеты прикладных программ, например, ППП Excel.

Однако линейные задачи составляют лишь небольшую часть задач математического программирования: например, коэффициенты $p_i$ функционала (1) и $c_{ij}$ в левой части ограничения (2) могут быть связаны функциональной зависимостью с переменными $x_i$. В этом случае задача (1)–(3) трансформируется в задачу нелинейного программирования, для решения которой используются, как правило, численные методы нахождения приближенного решения [Аоки, 1977; Бахвалов и др., 2003; Luenberger, Yinyu, 2008; Minniti, Turino, 2013].

Эффективность этих методов напрямую зависит от вида функционала (1) и левой части ограничения (2). Если, например, они представляют собой выпуклые, квадратичные функции переменных группы $\{x_i\}$, то численные методы нахождения оптимального решения могут быть построены с использованием процедуры последовательного спуска (подъема) к этому решению градиентным методом [Аоки, 1977; Бахвалов и др., 2003].

Для нелинейных непрерывных задач выпуклого программирования инструментом нахождения двойственных оценок ограничений вида (2), которые далее используются в экономико-математическом анализе оптимального плана задачи (1)–(3), является теорема Куна – Таккера, устанавливающая взаимосвязь между двойственной оценкой и значением множителя Лагранжа ограничения (2).

В перечисленном ряду задач линейной и нелинейной оптимизации особое место занимают задачи нелинейной дискретной целочисленной оптимизации, общий вид которых задается выражениями:

(5) $$F\left(\bar{X}\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i\right)\cdot x_i \to \max;$$

(6) $$\sum_{i=1}^{n} c_{ij}\left(x_i\right)\cdot x_i \le b_j,\ j=\overline{1,m};$$

(7) $$x_i \in Z_+,\ i=\overline{1,n}.$$

Особенность задач нелинейной дискретной оптимизации заключается в том, что они относятся к так называемым NP-полным по А. Тьюрингу проблемам, для которых неизвестно существование численных алгоритмов поиска оптимального решения с полиноминальной от размерности задачи сложностью [Юдин и др., 1982; Халиков, 2001]. В практическом плане этот факт означает возможность поиска оптимального решения задачи (5)–(7) только с использованием процедуры полного перебора допустимых соответствующих ограничениям (6)–(7) векторов с целочисленными компонентами.

Вычислительная мощность современных ПК позволяет решить проблему полного перебора, но, однако, остается важной нерешенная проблема определения двойственных оценок ограничений (6), что может быть обеспечено только на основе соответствующих аналитических процедур, позволяющих установить связь переменных прямой и двойственной задач нелинейного целочисленного программирования.

## 2. Цель исследования и научная идея метода

Целью настоящего исследования является разработка теоретического подхода и численного метода поиска квазиоптимального решения нелинейной дискретной задачи математического программирования большой размерности, универсальных для задач финансового и производственного планирования, отличительной особенностью которых является выпуклость функционала критерия и правых частей ограничений. Основной идеей предлагаемого метода поиска квазиоптимального (приближенного) решения указанных задач нелинейного целочисленного программирования является линеаризация критерия (5) и ограничения (6) и последующая локальная оптимизация полученного непрерывного решения в окрестности априорно заданного радиуса (например, единичного).

## 3. Описание подхода и численного алгоритма

С целью демонстрации пошагового алгоритма и его вычислительных возможностей нами из известных и практически значимых задач финансового [Горский, 2018] и производственного [Бельченко, Халиков, Щепилов, 2011] планирования выбрана задача согласованного оптимального управления производственной деятельностью структурных подразделений (бизнес-единиц) – СБЕ вертикально-интегрированного холдинга с критерием на максимум маржинальной доходности производственной программы интегрированной группы предприятий и учетом рыночных, внутрифирменных и рисковых ограничений.

### 3.1. Постановка задачи и математическая модель выбора согласованных вариантов производственных программ предприятий холдинга

Институциональное развитие крупных интегрированных производственных структур в добывающих и обрабатывающих отраслях российской экономики способно обеспечить рост их эффективности и конкурентоспособности не только на внутреннем, но и на внешних рынках за счет снижения прямых и косвенных затрат на проектирование, производство и реализацию продукции и роста надежности функционирования «сквозных» производственно-технологических цепочек на основе дополнительной синергии объединения специфических активов структурных подразделений, являющихся звеньями этих цепочек, и корректного выбора вариантов деятельности в сферах производства, финансов и инвестиций. Отметим, что этот тезис, объясняющий природу фирмы и, в том числе, крупной интегрированной производственной структуры, детально отражен в трудах классиков трансакционной теории, большой группы зарубежных и российских ученых. Здесь сошлемся на работы [Ансофф, 1991; Бельченко, Халиков, Щепилов, 2011; Клейнер, 2008; Коуз, 2001; Maximov, Khalikov, 2016], в которых отражен опыт производственной интеграции в развитых и развивающихся экономиках.

В приложении к производственному холдингу актуальной является задача выбора оптимальных по рыночному критерию (доходности основной деятельности или стоимости интегрированного бизнеса) вариантов производственной программы и стратегии ее реализации, обеспечивающих наиболее полное использование эффекта объединения производственно-технологического и финансово-ресурсного потенциалов смежных СБЕ с приемлемыми рисками в производственной, финансовой и инвестиционной сферах деятельности [Клейнер, 1997; Халиков, Максимов, 2015, Khalikov, Maximov, Shabalina, 2018; Maximov, Khalikov, 2016].

При формировании «общей» (реализуемой в рамках «сквозных» производственно-технологических цепочек) производственной программы холдинга анализируются производственная мощность и ресурсный потенциал отдельных производственных звеньев, и при выборе решения об объемах производства учитываются параметры либо наиболее «слабого», либо заключительного звеньев, что является фактором производственной и ресурсной обеспеченности реализации выбранного варианта [Аббясова, Шабалина, 2016; Бельченко, Халиков, Щепилов, 2011; Халиков, Максимов, 2015].

Таким образом, основная доля производственных фондов и рабочего капитала СБЕ задействована соответственно в производственно-технологическом обеспечении и покрытии затрат «общей» производственной программы, определяемой управляющей компанией. Остаток мощностей и финансовых ресурсов отдельные СБЕ используют для реализации «собственных» производственных программ.

Важной особенностью финансирования и учета финансовых результатов производственной деятельности структурных подразделений холдинга является следующая. Необходимое финансово-ресурсное обеспечение «общей» и «собственных» производственных программ холдинга и СБЕ в его составе управляющая компания выделяет структурным подразделениям по «внутренним», трансфертным, ценам. Суммы «внутреннего» кредита на покрытие производственных затрат структурных подразделений учитываются в финансовом результате деятельности головной компании – УК. Напротив, стоимость промежуточной продукции, производимой отдельными СБЕ в рамках «общей» производственной программы холдинга, рассчитывается также во «внутренних» ценах и учитывается в финансовых итогах деятельности СБЕ со знаком «+», а в итогах деятельности УК – со знаком «–».

С учетом сделанных замечаний рассмотрим математические модели выбора оптимальных вариантов «общей» (модель верхнего уровня) и «собственных» (модель нижнего уровня) производственных программ холдинга и его структурных подразделений, согласованные по производственно-технологическому и финансово-ресурсному обеспечению.

Будем использовать следующие индексы и переменные:

$t=\overline{1,T}$ – временной интервал планирования;

$x_k^{(t)}$ – планируемый объем выпуска (в натуральном или стоимостном выражении) $k$-го продукта (производимого в рамках $k$-й производственно-технологической цепочки), $k=\overline{1,K^{(t)}}$ (в общем случае номенклатура производимой предприятиями холдинга продукции может меняться при переходе к следующему временному интервалу).

(8) $$\underline{x_k^{(t)}} \le x_k^{(t)} \le \overline{x_k^{(t)}},$$

где $\underline{x_k^{(t)}}$ и соответственно нижняя $\overline{x_k^{(t)}}$ (определяется объемом не $\rho_i$ выполненных заказов) и верхняя (определяется рыночным спросом) границы объема производства $k$-го продукта на временном интервале $t$; $i=\overline{1,I}$ – индекс СБЕ; $\rho_i$ – стоимость внутрифирменного кредита, предоставляемого УК холдинга $i$-й СБЕ; $v_{k,i}(x_k^{(t)})$ – средняя величина выпуска в рамках $i$-й СБЕ промежуточного продукта, необходимого для обеспечения выпуска на $k$-й производственно-технологической цепочке холдинга конечного продукта в объеме

$x_{k,i}^{(t)}$ (в общем случае нелинейная функция переменной $x_k^{(t)}$); $a_{k,i}, r_{k,i}, d_{k,i}$ – элементы прямоугольных матриц (размером $K^{(t)} \times I$ ) – коэффициенты соответственно: фондоемкости, внутренних (трансфертных) цен и удельных затрат на производство $k$-го продукта в рамках $i$-й СБЕ (рассчитанные с учетом внутрифирменных нормативов на промежуточную продукцию подразделений холдинга, входящих в производственно-технологическую цепочку производства $k$-го продукта); $p_k^{(t)}$ – планируемая для временного интервала $t$ цена $k$-го продукта (без учета затрат на реализацию); $B_i^{(t)}$ – фондовооруженность (в единицах технологической фондоемкости) $i$-й СБЕ на временном интервале $t$; $c_i^{(t)}, \Delta c_i^{(t)}$ – соответственно наличная (в начале интервала планирования $t$) и выделяемая (управляющей компанией-УК) $i$-й СБЕ на временном интервале $t$ часть рабочего капитала холдинга, предназначенная для покрытия затрат, связанных с реализацией «общей» производственной программы холдинга; $C_{УК}^{(t)}$ – объем рабочего капитала холдинга, планируемый для покрытия затрат основной производственной деятельности структурных подразделений на временном интервале $t$.

В терминах введенных переменных сформулируем статичную (для временного интервала $t$) задачу выбора оптимального по критерию валового маржинального дохода (понимаемого в рассматриваемой постановке задачи как валовой доход за вычетом прямых и косвенных затрат по отдельным звеньям – СБЕ единых производственно-технологических цепочек, включенных в производственный процесс на выбранном временном интервале) варианта «общей» производственной программы холдинга и распределения рабочего капитала по отдельным производственно-технологическим цепочкам (задача верхнего уровня):

$$F\left(x_1^{(t)},\ldots,x_{K^{(t)}}^{(t)};\Delta c_1^{(t)},\ldots,\Delta c_I^{(t)}\right)=\sum_{k=1}^{K^{(t)}} p_k^{(t)}\cdot x_k^{(t)}+\sum_{i=1}^{I}\Delta c_i^{(t)}\cdot\left(1+\rho_i\right)-\sum_{k=1}^{K^{(t)}}\sum_{i=1}^{I} r_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)\to\max; \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{I}\Delta c_i^{(t)}\le C_{УК}^{(t)}; \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} a_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)\le B_k^{(t)}, i=\overline{1,I}; \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} d_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)\le c_i^{(t)}+\Delta c_i^{(t)}, i=\overline{1,I}; \tag{12}$$

$$\underline{x_{k,i}^{(t)}}\le x_{k,i}^{(t)}\le\overline{x_{k,i}^{(t)}}, x_{k,i}^{(t)}\in Z_+, i=\overline{1,I}, k=\overline{1,K^{(t)}}; \tag{13}$$

(14) $$\Delta c_i^{(t)} \in Z_+, i = \overline{1, I}.$$

Статичная (для выбранного временного интервала) модель (9)–(14) выбора оптимального варианта производственной программы холдинга и распределения производственного капитала между его структурными подразделениями описывает процедуру принятия решения о составе производственной программы, объеме и источниках ее финансирования в условиях невысокой изменчивости товарных, материальных и финансовых рынков, позволяющих корректно сформировать ограничения по спросу. В случае нестабильных рынков, характеризующихся высокой изменчивостью спроса и цен, сфера приложения статичных моделей и, в частности, описанной, существенно ограничивается, так как они не учитывают динамику показателей, используемых в критерии и системе ограничений.

С другой стороны, для моделей «рюкзачного» типа, к которым относится и рассматриваемая модель, эффективным способом учета динамики экзогенных параметров (в нашем случае, спроса и цен) является подход с использованием в моделях предприятия (интегрированной группы предприятий) альтернативного доходности критерия риска принимаемого решения [Khalikov, Maximov, 2018].

Рассмотрим один из возможных подходов к учету риска производственной программы и используем его в «модифицированном» варианте представленной выше модели выбора оптимального варианта производственной деятельности холдинга.

Введем следующие дополнительные обозначения:

$T$ – число временных интервалов, на которых фиксировались значения маржинальной доходности изделий производственной программы холдинга (понимаемой в нашем случае как цена реализации продукта за вычетом прямых и косвенных затрат по отдельным звеньям единой производственно-технологической цепочки);

$\bar{c}_k = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} c_k^{(t)}}{T}, \left(k = \overline{1, K^{(t)}}\right)$ – средний за период наблюдений удельный маржинальный доход единицы продукции $k$-го вида;

$\sigma_k = \sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{T}\left(c_k^{(t)} - \bar{c}_k\right)^2}{T-1}}$ – дисперсия доходности продукции $k$-го вида за период наблюдений;

$cov(k_1; k_2) = \left[\dfrac{\sum_{t=1}^{T}\left(c_{k_1}^{(t)} - \bar{c}_{k_1}\right)\cdot\left(c_{k_2}^{(t)} - \bar{c}_{k_2}\right)}{(T-1)\cdot\sigma_{k_1}\cdot\sigma_{k_2}}\right]$ – ковариация доходностей продукции видов $k_1$ и $k_2$ $\left(k_1, k_2 = \overline{1, K^{(t)}}\right)$ за период наблюдений;

$w_k^{(t)} = \dfrac{x_k^{(t)}}{\sum_{k=1}^{K^{(t)}} x_k^{(t)}}$ – доля продукции $k$-го вида в производственной программе в периоде $t$;

$\overline{\sigma}_t$ – пороговое (допустимое) значение риска «общей» производственной программы холдинга для периода $t$.

В этих обозначениях ограничение на риск производственной программы может быть представлено неравенством

(15) $$\sum_{k_1}^{K^{(t)}}\sum_{k_2}^{K^{(t)}} w_{k_1}^{(t)} \cdot \sigma_{k_1} \cdot w_{k_2}^{(t)} \cdot \sigma_{k_2} \cdot cov\left(k_1;k_2\right) \le 2\overline{\sigma}_t^{\ 2}$$

или

(15') $$\sum_{k_1}^{K^{(t)}}\sum_{k_2}^{K^{(t)}} x_{i_1}^{(t)} \cdot \sigma_{k_1} \cdot x_{k_2}^{(t)} \cdot \sigma_{i_2} \cdot cov\left(k_1;k_2\right) \le 2\overline{\sigma}_t^{\ 2} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K^{(t)}} x_k^{(t)}\right]^2,$$

а в записи критерия (9) вместо $p_k^{(t)}$ – планируемой для временного интервала $t$ цены $k$-го продукта следует использовать среднюю (за период наблюдений) маржинальную доходность $\overline{c}_k$ :

(9') $$F\left(x_1^{(t)},\ldots,x_{K^{(t)}}^{(t)};\Delta c_1^{(t)},\ldots,\Delta c_I^{(t)}\right) = \sum_{k=1}^{K^{(t)}} \overline{c}_k^{(t)} \cdot x_k^{(t)} + \sum_{i=1}^{I} \Delta c_i^{(t)} \cdot \left(1+\rho_i\right) - \\ - \sum_{k=1}^{K^{(t)}}\sum_{i=1}^{I} r_{k,i} \cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right) \to \max.$$

Таким образом, статичная (для временного интервала $t$) задача верхнего уровня – выбор оптимального по критерию «внутренней» маржинальной доходности, с производственно-технологическими, финансово-ресурсными и рисковым (на допустимую величину среднеквадратичного отклонения реальной доходности от планируемого значения) ограничениями варианта «собственной» производственной программы холдинга и распределения рабочего капитала между структурными подразделениями (в данном случае вполне обоснованно можно считать – вариант деятельности управляющей компании) – задается выражениями (9'), (10)–(12), (15'), (13), (14) и, как следует из формы ее представления, относится к нелинейным (критерий (9'), ограничения (11) и (15')) дискретным задачам (в практических приложениях – большой размерности), анонсированным выше.

Оставшиеся по результатам решения задачи верхнего уровня производственно-технологический и финансово-ресурсный потенциалы структурных подразделений холдинга могут быть направлены на реализацию их «собственных» производственных программ.

Переходя к рассмотрению задачи нижнего уровня (выбор оптимального для временного интервала $t$ варианта «собственной» производственной программы $i$ -й СБЕ), сделаем ряд замечаний.

Во-первых, на этапе выбора «собственной» производственной программы структурное подразделение холдинга оперирует только собственными и заемными источниками финансирования и не прибегает к трансфертным отчислениям управляющей компании. Таким образом, в данном случае СБЕ является «традиционным» рыночным агентом, критерием деятельности которого на кратко- и среднесрочном интервалах планирования является валовой доход, распределяемый на инвестиции и внутреннее потребление.

Далее. Как правило, «излишек» производственных мощностей и ресурсного обеспечения после формирования «общей» производственной программы холдинга является незначительным, обеспечивающим весьма ограниченный выбор вариантов «собственных» производственных программ СБЕ. В этом случае учет фактора рыночного риска в ограничениях модели выбора оптимального варианта «собственной» производственной деятельности СБЕ является излишним.

Сформулируем задачу нижнего уровня для $i$ -й СБЕ (выбор оптимального для временного интервала $t$ варианта «собственной» производственной программы):

$$F\left(y_{1,i}^{(t)},\ldots,y_{L_i^{(t)},i}^{(t)}\right)=\sum_{l=1}^{L_i^{(t)}} p_{l,i}^{(t)}\cdot y_{l,i}^{(t)}\to\max; \tag{16}$$

$$\sum_{l=1}^{L_i^{(t)}} a_{l,i}\cdot y_{l,i}^{(t)}\le B_i^{(t)}-\sum_{k=1}^{K^{(t)}} a_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(t)}\right), i=\overline{1,I}; \tag{17}$$

$$\sum_{l=1}^{L_i^{(t)}} d_{l,i}\cdot y_{l,i}^{(t)}\le c_i^{(t)}+\Delta c_i^{(t)}-\sum_{k=1}^{K^{(t)}} d_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(t)}\right), i=\overline{1,I}; \tag{18}$$

$$\underline{y_{l,i}^{(t)}}\le y_{l,i}^{(t)}\le\overline{y_{l,i}^{(t)}}, y_{l,i}^{(t)}\in Z_+, i=\overline{1,I}, l=\overline{1,L_i^{(t)}}, \tag{19}$$

где $l=\overline{1,L_i^{(t)}}$ – индекс продукции собственного производства $i$-й СБЕ (в общем случае номенклатура продукции, производимой в рамках конкретной СБЕ дополнительно по отношению к основной производственной программе холдинга, может изменяться при переходе к следующему временному интервалу); $y_{l,i}^{(t)}, p_{l,i}^{(t)}, a_{l,i}, d_{l,i}, \underline{y_{l,i}^{(t)}}, \overline{y_{l,i}^{(t)}}$ – соответственно: планируемый объем производства, удельный маржинальный доход, коэффициенты фондоемкости, удельные производственные затраты и актуальные для интервала планирования $t$ нижнее и верхнее ограничения на объем производства одного изделия «собственной» производственной программы $i$-й СБЕ; $\overset{=}{x}_k^{(t)}$ – компоненты вектора оптимального решения задачи (9'), (10)–(12), (15'), (13), (14).

В отличие от задачи верхнего уровня (9'), (10)–(12), (15'), (13), (14) оптимизационная задача нижнего уровня (16)–(19) относится к классу традиционных линейных дискретных задач (критерий в форме (16) является линейным, ограничения (17) и (18), если учесть, что вектор «общей» производственной программы холдинга на этапе решения задачи нижнего уровня известен, содержат в правых частях константы (соответственно

$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} a_{k,i} \cdot v_{k,i}\left(\overset{=(t)}{x_k}\right)$ и $\sum_{k=1}^{K^{(t)}} d_{k,i} \cdot v_{k,i}\left(\overset{=(t)}{x_k}\right)$, а, следовательно, также являются линейными) может быть эффективна решена с использованием «стандартных» алгоритмов дискретной оптимизации, например, указанного выше метода «ветвей и границ».

### 3.2. Численный алгоритм решения нелинейной дискретной оптимизационной задачи (9'), (10)–(12), (15'), (13), (14)

Разберем численный алгоритм решения рассмотренной выше дискретной нелинейной оптимизационной задачи:

$$F\left(x_1^{(t)},\ldots,x_{K^{(t)}}^{(t)};\Delta c_1^{(t)},\ldots,\Delta c_I^{(t)}\right)=\sum_{k=1}^{K^{(t)}} c_k^{(t)}\cdot x_k^{(t)}+\sum_{i=1}^{I}\Delta c_i^{(t)}\cdot\left(1+\rho_i\right)- -\sum_{k=1}^{K^{(t)}}\sum_{i=1}^{I} r_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)\to\max; \tag{9'}$$

$$\sum_{i=1}^{I}\Delta c_i^{(t)}\le C_{УК}^{(t)}; \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} a_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)\le B_k^{(t)}, i=\overline{1,I}; \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} d_{k,i}\cdot v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)\le c_i^{(t)}+\Delta c_i^{(t)}, i=\overline{1,I}; \tag{12}$$

$$\sum_{k_1}^{K^{(t)}}\sum_{k_2}^{K^{(t)}} x_{i_1}^{(t)}\cdot\sigma_{k_1}\cdot x_{k_2}^{(t)}\cdot\sigma_{i_2}\cdot cov\left(k_1;k_2\right)\le 2\overline{\sigma}_t^{\,2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{K^{(t)}} x_k^{(t)}\right]^2; \tag{15'}$$

$$\underline{x_{k,i}^{(t)}}\le x_{k,i}^{(t)}\le\overline{x_{k,i}^{(t)}}, x_{k,i}^{(t)}\in Z_+, i=\overline{1,I}, k=\overline{1,K^{(t)}}; \tag{13}$$

$$\Delta c_i^{(t)}\in Z_+, i=\overline{1,I}, \tag{14}$$

в которой эндогенными (управляемыми) переменными являются компоненты векторов $\overset{=(t)}{x}=\left(x_1^{(t)},\ldots,x_K^{(t)}\right)$ («общей» производственной программы холдинга) и $\Delta C^{(t)}=\left(\Delta c_1^{(t)},\ldots,\Delta c_I^{(t)}\right)$ (распределения рабочего капитала холдинга по структурным подразделениям), в совокупности представляющих вариант централизованной деятельности УК и СБЕ на временном интервале *t*.

Заметим, что нелинейный характер этой задачи связан с формой критерия (9') и наличием нелинейного ограничения (15'), представленного квадратичной (выпуклой) функцией эндогенных переменных.

Основная «сложность» упрощения рассматриваемой задачи в направлении линеаризации критерия (9') и ограничения (15') заключается в проблеме линеаризации функциональной зависимости $v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)$ величины промежуточного продукта *i*-й СБЕ, обеспечивающей выпуск заключительным звеном соответствующей производственно-технологической цепочки *k*-го продукта в объеме $x_k$.

Решение этой проблемы, в свою очередь, лежит в плоскости организационно-технической структуры и характера серийности производственных процессов, реализуемых интегрируемой группой предприятий.

В случае, если характер производства – крупносерийный или массовый, то предположение о линейном характере зависимости $v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)$ от $x_k^{(t)}$ для звеньев с серийным производством, как следует из результатов работы [Клейнер, 2008], вполне оправданно. В этом случае можно утверждать существование наборов коэффициентов $\left\{\propto_{i,k}\right\},\left(i=\overline{1,I},k=\overline{1,K^{(t)}}\right)$, определяющих объемы промежуточных продуктов *i*-й СБЕ, обеспечивающих планируемые УК объемы $x_k^{(t)}$ выпуска «конечных» продуктов:

$$v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)=\propto_{k,i}\cdot x_k. \tag{20}$$

Напротив, если характер производства – мелко- или среднесерийный, то можно утверждать только о кусочно-линейной зависимости объемов промежуточного и конечного продуктов. В этом случае объемы промежуточных продуктов для структурных подразделений холдинга устанавливаются УК на основании технологических карт с учетом межоперационных резервов [Аббясова, Шабалина, 2016; Бельченко, Халиков, Щепилов, 2011].

Однако и в этом случае имеется возможность линеаризации рассматриваемой зависимости, если нами ставится цель определения не оптимального, а квазиоптимального (в смысле, приближенного) решения задачи (9'), (10)–(12), (15'), (13), (14).

Учитывая «право» на погрешность, предложим следующий метод линеаризации.

По результатам решения задачи верхнего уровня для предыдущих временных интервалов, предшествующих рассматриваемому $t_\rho$ $\left(t=\overline{1,\ t_{\rho-1}}\right)$, выберем для каждого продукта $k\left(k=\overline{1,K^{(t)}}\right)$ из линейки «общих» продуктов холдинга минимальный $\overset{=(\min)}{x_k}$ и максимальный $\overset{=(\max)}{x_k}$ объемы его производства и далее по каждой производственно-технологической цепочке определим соответствующие значения минимального и максимального объемов промежуточного продукта: $v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(\min)}\right)$ и $v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(\max)}\right)$ для всех СБЕ $\left(i=\overline{1,I}\right)$, участвующих в производстве $k$-го конечного продукта $\left(k=\overline{1,K^{(t\rho)}}\right)$.

Искомую линейную зависимость $v_{k,i}\left(x_k^{(t\rho)}\right)$ для временного интервала $t=t_\rho$ определим по методу «двух точек»:

$$v_{k,i}\left(x_k^{(t)}\right)=\beta_{k,i}+\propto_{k,i}\cdot x_k,\quad i=\overline{1,I},\ k=\overline{1,K^{(t\rho)}},\ t=t_\rho, \tag{21}$$

где $\propto_{k,i}=\dfrac{v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(\max)}\right)-v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(\min)}\right)}{\overset{=}{x}_k^{(\max)}-\overset{=}{x}_k^{(\min)}}$;

$$\beta_{k,i}=\frac{v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(\min)}\right)\cdot\overset{=}{x}_k^{(\max)}-v_{k,i}\left(\overset{=}{x}_k^{(\max)}\right)\cdot\overset{=}{x}_k^{(\min)}}{\overset{=}{x}_k^{(\max)}-\overset{=}{x}_k^{(\min)}}.$$

Возможность линеаризации критерия (9') и ограничений (11) и (12) позволяет значительно упростить модель задачи верхнего уровня, которая принимает вид:

$$\begin{aligned}F\left(x_1^{(t)},\ldots,x_{k^{(t)}}^{(t)};\Delta c_1^{(t)},\ldots,c_I^{(t)}\right)&=\sum_{k=1}^{K^{(t)}}\left(c_k^{(t)}-\sum_{i=1}^{I}r_{k,i}^{(t)}\propto_{k,i}\right)\cdot x_k^{(t)}+\\&+\sum_{i=1}^{I}\Delta c_i^{(t)}\cdot(1+\rho_i)-\sum_{k=1}^{K^{(t)}}\sum_{i=1}^{I}\beta_{k,i}\to\max;\end{aligned} \tag{9''}$$

$$\sum_{i=1}^{I}\Delta c_i^{(t)}\le C_{УК}^{(t)}; \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{K^{(t)}}\alpha_{k,i}\cdot\propto_{k,i}\cdot x_k^{(t)}\le B_i^{(t)}-\sum_{k=1}^{K^{(t)}}\alpha_{k.i}\,.\,\beta_{k,i},\ i=\overline{1,I}; \tag{11'}$$

$$\sum_{k=1}^{K^{(t)}}d_{k,i}\cdot\propto_{k,i}\cdot x_k^{(t)}-\Delta c_i^{(t)}\le c_i^{(t)}-\sum_{k=1}^{K^{(t)}}d_{k,i}\cdot\beta_{k,i},\ i=\overline{1,I}; \tag{12'}$$

$$\sum_{k_1}^{K^{(t)}}\sum_{k_2}^{K^{(t)}}x_{i_1}^{(t)}\cdot\sigma_{k_1}\cdot x_{k_2}^{(t)}\cdot\sigma_{i_2}\cdot cov\left(k_1;k_2\right)\le 2\overline{\sigma}_t^{\,2}\cdot\left[\sum_{k=1}^{K^{(t)}}x_k^{(t)}\right]^2; \tag{15'}$$

(13) $$\underline{x_{k,i}^{(t)}} \leq x_{k,i}^{(t)} \leq \overline{x_{k,i}^{(t)}}, x_{k,i}^{(t)} \in Z_+, i = \overline{1,I}, k = \overline{1,K^{(t)}};$$

(14) $$\Delta c_i^{(t)} \in Z_+, i = \overline{1,I},$$

где $t = t_\rho$.

Если ввести следующие обозначения для групп коэффициентов и констант:

$$e_k = c_k^{(t)} - \sum_{i=1}^{I} r_{k,i}^{(t)} \cdot \propto_{k,i};$$

$$E = \sum_{k=1}^{K^{(t)}} \sum_{i=1}^{I} \beta_{k,i};$$

$$q_{k,i} = \alpha_{k,i} \cdot \propto_{k,i};$$

$$G_i = B_i^{(t)} - \sum_{k=1}^{K^{(t)}} \alpha_{k,i} \cdot \beta_{k,i};$$

$$f_{k,i} = d_{k,i} \cdot \propto_{k,i};$$

$$F_i = c_i^{(t)} - \sum_{k=1}^{K^{(t)}} \cdot d_{k,i} \cdot \beta_{k,i},$$

то модель можно представить в компактной форме:

(9''') $$F\left(x_1^{(t)}, \ldots, x_{K^{(t)}}^{(t)}; \Delta c_1^{(t)}, \ldots, c_I^{(t)}\right) = \sum_{k=1}^{K^{(t)}} e_k \cdot x_k^{(t)} + \sum_{i=1}^{I} \Delta C_i^{(t)} \cdot (1 + \rho_i) - E \to \max;$$

(10) $$\sum_{i=1}^{I} \Delta c_i^{(t)} \leq C_{УК}^{(t)};$$

(11'') $$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} q_{k,i} \cdot x_k^{(t)} \leq G_i, \ i = \overline{1,I};$$

(12'') $$\sum_{k=1}^{K^{(t)}} f_{k,i} \cdot x_k^{(t)} - \Delta c_i^{(t)} \leq F_i \ , i = \overline{1,I};$$

(15') $$\sum_{k_1}^{K^{(t)}} \sum_{k_2}^{K^{(t)}} x_{i_1}^{(t)} \cdot \sigma_{k_1} \cdot x_{k_2}^{(t)} \cdot \sigma_{i_2} \cdot cov(k_1; k_2) \leq 2\overline{\sigma}_t^{\,2} \cdot \left[\sum_{k=1}^{K^{(t)}} x_k^{(t)}\right]^2;$$

(13) $$\underline{x_{k,i}^{(t)}} \le x_{k,i}^{(t)} \le \overline{x_{k,i}^{(t)}}, x_{k,i}^{(t)} \in Z_+,\ i = \overline{1,I},\ k = \overline{1,K^{(t)}};$$

(14) $$\Delta c_i^{(t)} \in Z_+,\ i = \overline{1,I},$$

где $t = t_\rho$.

В дискретной оптимизационной задаче (9'''), (10), (11''), (12''), (15'), (13), (14) нелинейным является только ограничение (15') на риск отклонения внутреннего маржинального дохода интегрированной группы предприятий от планируемого значения.

Решим дискретную линейную задачу (9'''), (10), (11''), (12”), (13), (14) (без ограничения (15') методом ветвей и границ (МВГ)) и проверим выполнимость ограничения (15') для полученного решения $\left\{\overline{\overline{x_k}}^{(t)}, \overline{\overline{\Delta c_i}}^{(t)}\right\}$. Если ограничение выполняется, то решение задачи верхнего уровня найдено. В противном случае, учитывая выпуклость множества допустимых решений неравенства (15'), можно предложить следующий численный алгоритм решения непрерывного аналога (ограничения (13) и (14) заменяются на условия – ограничения на неотрицательность переменных в группах $\left\{x_k^{(t)}\right\}$ и $\left\{\Delta c_i^{(t)}\right\}$).

Используя стандартную симплекс-процедуру, выпишем все базисные решения непрерывного аналога задачи (9'''), (10), (11''), (12''), удовлетворяющие неравенству (15'). Это множество не пусто, так как содержит по крайней мере одно допустимое (например, нулевое) решение.

Обозначим множество таких решений для временного интервала $t$ символом $\Omega_t : \overline{\rho_1^{(t)}}, \dots, \overline{\rho_n^{(t)}}, \dots, \overline{\rho_{N^{(t)}}^{(t)}}$, где $\overline{\rho}_n^{(t)} = \left(x_{n,1}^{(t)}, \dots, x_{n,K^{(t)}}^{(t)}; \Delta c_{n,1}^{(t)}, \dots, \Delta C_{n,I}^{(t)}\right) - n - e$ – базисное решение задачи линейного программирования (9'''), (10), (11''), (12''), удовлетворяющее условию (15').

Введем в рассмотрение набор весов $\left\{\mu_n^{(t)}\right\}$ такой, что:

(22) $$\sum_{r=1}^{N^{(t)}} \mu_n^{(t)} = 1;$$

(23) $$\mu_n^{(t)} \ge 0, n = \overline{1, N^{(t)}}.$$

Условия (22), (23) обеспечивают выполнение для вектора $\sum_{n=1}^{N^{(t)}} \mu_n^{(t)} \cdot \overline{\rho_n^{(t)}}$ ограничений (10), (11''), (12'') и (15').

Решая задачу

(24) $$F\left(\sum_{n=1}^{N^{(t)}} \mu_n^{(t)} \cdot \overline{\rho_n^{(t)}}\right) = \sum_{n=1}^{N^{(t)}} \mu_n^{(t)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{K^{(t)}} e_k \cdot x_{n,k}^{(t)} + \sum_{i=1}^{I} \Delta c_{n,i}^{(t)} \cdot (1 + \rho_i)\right) \to \max,$$

(22')
$$\sum_{n=1}^{N^{(t)}} \mu_n^{(t)} = 1,$$

(23')
$$\mu_n^{(t)} \geq 0, n = \overline{1, N^{(t)}},$$

определим набор весов $\left\{ \overline{\overline{\mu}}_n^{(t)} \right\}$ и соответствующий ему вектор $\sum_{n=1}^{N^{(t)}} \overline{\overline{\mu}}_n^{(t)} \cdot \overline{\rho}_n^{(t)}$.

Квазиоптимальное решение $\left\{ \overline{\overline{x}}_k^{(t)}, \overline{\overline{\Delta c}}_i^{(t)} \right\}$ дискретной задачи (9'''), (10), (11''), (12''), (13), (14) может быть получено с использованием:

– операции взятия целой части компонент $\sum_{n=1}^{N^{(t)}} \overline{\overline{\mu}}_n^{(t)} \cdot \overline{\rho}_n^{(t)}$ вектора оптимального решения непрерывной задачи;

– метода локальной оптимизации решения непрерывной задачи, описанного в работе М.А. Халикова [Халиков, 2001].

Автором с использованием приведенного выше теоретического подхода и численного метода решения задачи нелинейной дискретной оптимизации большой размерности проведены расчеты оптимальных производственных программ для предприятий российского углеэнергетического холдинга «СУЭК» и предприятий фармацевтической компании ООО «ЭлексиМед», результаты которых показали высокую эффективность предложенного автором инструментария оптимизации нелинейных дискретных систем большой размерности. В публикации автора [Горский, 2018] представлены постановка задачи и практические расчеты оптимальных кредитных портфелей коммерческого банка для случая, когда параметры портфеля задаются нелинейным функционалом от ставки кредита, риска заемщика и объема кредита. Полученные при решении оптимизационной задачи двойственные оценки ограничений объема портфеля от величины собственного капитала банка далее используются в оценках финансовой устойчивости кредитной организации.

## 4. Заключение и выводы

Представленные теоретический подход и численный метод решения задачи нелинейной дискретной оптимизации большой размерности являются новацией в области методов математического программирования, так как представляют собой универсальный инструмент решения широкого класса задач производственного и финансового планирования, описываемых традиционными для этих задач критериями и ограничениями. Ясно, что использование приближенных методов решения актуальных для сфер производства и финансов задач нелинейной дискретной оптимизации не снимает проблему NP-полных по А. Тьюрингу задач, но возможность иметь в арсенале исследователя конструктивный численный метод решения некоторых весьма распространенных задач этого типа частично снимает остроту высокой вычислительной сложности «переборных» задач.

* *
*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Аббясова Д.Р., Шабалина У.М.* Математические модели выбора инвестиционной стратегии вертикально-интегрированного холдинга // Фундаментальные исследования. 2016. № 3–1. С. 98–102.

*Алчян А.А., Демсец Х.* Производство, стоимость информации и экономическая организация // Вехи экономической мысли. Т. 5. Теория отраслевых рынков. СПб., 2003.

*Ансофф И.* Новая корпоративная стратегия. СПб.: Питер, 1991.

*Аоки М.* Введение в методы оптимизации. Основы и приложения нелинейного программирования. М.: Наука, 1977.

*Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2003.

*Бельченко С.В., Халиков М.А., Щепилов М.В.* Управление трансакционными издержками интегрированной группы предприятий: модели и методы. М.: ЗАО Гриф и К, 2011.

*Горский М.А.* Параметрическое моделирование кредитно-инвестиционной деятельности коммерческого банка и его приложения // Ученые записки Российской академии предпринимательства. 2018. Т. 17. № 4. С. 187–209.

*Клейнер Г.Б.* Предприятие в нестабильной экономической среде: риски, стратегия, безопасность / Г.Б. Клейнер, В.Л. Тамбовцев, Р.М. Качалов. Под общ. ред. С.А. Панова. М.: Экономика, 1997.

*Клейнер Г.Б.* Стратегия предприятия. М.: Дело, 2008.

*Колемаев В.А.* Математические методы и модели исследования операций. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012.

*Коуз Р.Г.* Природа фирмы / под ред. Уильямсона О.И., Уинтера С.Дж. М.: Дело, 2001.

*Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М.* Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

*Новожилов В.В.* Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. М.: Наука, 1972.

*Юдин Д.Б., Горяшко А.П., Немировский А.С.* Математические методы оптимизации устройств и алгоритмов АСУ / под ред. Ю.В. Асафьева, В.А. Шабалина. М.: Радио и связь, 1982.

*Халиков М.А.* Дискретная оптимизация планов повышения надежности функционирования экономических систем // Финансовая математика: сб. статей. М.: МГУ, 2001. С. 281–295.

*Халиков М.А., Максимов Д.А.* Об одном подходе к анализу и оценке ресурсного потенциала предприятия // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. 2015. Вып. 11. Часть 2. С. 296–300.

*Khalikov M.A., Maximov D.A., Shabalina U.M.* Risk Indicators and Risk Management Models for an Integrated Group of Enterprises // Journal of Applied Economic Sciences. 2018. Vol. XIII. 1(55). P. 52–64.

*Luenberger D., Yinyu Y.* Linear and Nonlinear Programming. Springer Science + Bussiness Media, LLC, 2008.

*Maximov D.A., Khalikov M.A.* Prospects of Institutional Approach to Production Corporation Assets Assessment // Actual Problems of Economics. 2016. Vol. 183. № 9. P. 16–25.

*Minniti A., Turino F.* Multi-product Firms and Business Cycle Dynamics // European Economic Review. 2013. Vol. 57. P. 75–97.

# A Theoretical Approach and a Numerical Method for Finding a Quasi-Optimal Solution to a Nonlinear High-Dimensional Discrete Problem

**Mark Gorskiy**

GK Rest-Group, LLC,
bld. 1, h. 2 Usacheva str., Moscow, 119048, Russian Federation.
E-mail: gadjiagaev@mail.ru

At present, the class of NP-complete problems is represented not only by the «classical» issue of the travelling salesman problem and many tasks in the theory of graphs and networks, resolved into it, but also by the problems of nonlinear and stochastic optimization, including, in the discrete setting. The peculiarity of these problems is the lack of constructive algorithms for finding the optimal solution in polynomial time from the dimension of the problem, which «dooms» the researcher to use non-constructive methods in solving these problems, for example, the exhaustive algorithm. However, these algorithms, being applied to discrete optimization problems, do not allow to solve the problem in a complex way: for example, such methods do not let us obtain dual constraints estimation that are important for the subsequent analysis of the optimal solution. In the article, for a wide class of problems of production and financial planning, which, in the production plan, are reduced to the problems of discrete nonlinear convex optimization of large dimension, the author offers an original numerical method for finding a quasi-optimal solution with a high (predetermined) accuracy of approximation to the optimum. For the specified class of problems, the proposed method is universal, i.e. it can be applied without additional adaptation of the numerical procedure.

***Key words***: NP-complete problem; linear and nonlinear optimization; nonlinear discrete problem; production and financial planning problems; constructive algorithm; quasi-optimal solution.

**JEL Classification**: C61; C65; D29.

* *
*

## *References*

Abbiasova D.R., Shabalina U.M. (2016) Matematicheskie modeli vybora investicionnoj strategii vertikal'no-integrirovannogo holdinga [Mathematical Models of Choice of the Investment Strategy of a Vertically Integrated Holding Company]. *Fundamental Research*, 3–1, pp. 98–102.

Alchian A.A., Demsetz H. (2003) Proizvodstvo, stoimost' informacii i ekonomicheskaya organizaciya [Production, Cost of Information and Economic Organization]. *Milestones of Economic Thought*, 5, Theory of Industrial Markets. Saint-Petersburg.

Ansoff I. (1991) *Novaya korporativnaya strategiya* [New Corporate Strategy]. Saint-Petersburg: Piter.

Aoki M. (1977) *Vvedenie v metody optimizacii. Osnovy i prilozheniya nelinejnogo programmirovaniya* [Introduction to Optimization Methods. Fundamentals and Applications of Nonlinear Programming]. Moscow: Science.

Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. (2003) *CHislennye metody* [Numerical Methods]. Moscow: Binominal, Laboratory of knowledge.

Belchenko S.V., Khalikov M.A., Shchepilov M.V. (2011) *Upravlenie transakcionnymi izderzhkami integrirovannoj gruppy predpriyatij: modeli i metody* [Management of Transaction Costs of an Integrated Group of Enterprises: Models and Methods]. Moscow: ZAO Grif and K.

Gorskiy M.A. (2018) Parametricheskoe modelirovanie kreditno-investicionnoj deyatel'nosti kommercheskogo banka i ego prilozheniya [Parametric Modeling of Credit and Investment Activity of a Commercial Bank and its Applications]. *Scientific Notes of the Russian Academy of Entrepreneurship*, 17, 4, pp. 187–209.

Kleiner G.B. (1997) *Predpriyatie v nestabil'noj ekonomicheskoj srede: riski, strategiya, bezopasnost'* [Enterprise in an Unstable Economic Environment: Risks, Strategy, Security] (eds. G.B. Kleiner, V.L. Tambovtsev, R.M. Kachalov; general editorship of S.A. Panov). Moscow: Economy.

Kleiner G.B. (2008) *Strategiya predpriyatiya* [Strategy of the Enterprise]. Moscow: Delo.

Kolemaev V.A. (2012) *Matematicheskie metody i modeli issledovaniya operacij* [Mathematical Methods and Models of Operations Research]. Moscow: YUNITI-DANA.

Coase R.H. (2001) *Priroda firmy* [Nature of the Firm] (eds. Williamson O.I., Winter S.) Moscow: Delo.

Moiseev N.N., Ivanilov Yu.P., Stolyarova E.M. (1978) *Metody optimizacii* [Methods of Optimization]. Moscow: Science.

Novozhilov V.V. (1972) *Problemy izmereniya zatrat i rezul'tatov pri optimal'nom planirovanii* [Problems of Measuring Costs and Results in Optimal Planning]. Moscow: Science.

Yudin D.B., Goryashko A.P., Nemirovskiy A.S. (1982) *Matematicheskie metody optimizacii ustrojstv i algoritmov ASU* [Mathematical Methods of Optimization of Devices and Algorithms of ACS] (eds. Yu.V. Asafieva, V.A. Shabalina). Moscow: Radio and Communications.

Khalikov M.A. (2001) Diskretnaya optimizaciya planov povysheniya nadezhnosti funkcionirovaniya ekonomicheskih sistem [Discrete Optimization of Plans to Improve the Reliability of Economic Systems]. *Financial Mathematics*. Comp. art. Moscow: Moscow State University, pp. 281–295.

Khalikov M.A., Maksimov D.A. (2015) Ob odnom podhode k analizu i ocenke resursnogo potenciala predpriyatiya [On one Approach to the Analysis and Evaluation of the Enterprise Resource Potential]. *International Journal of Applied and Fundamental Research*, 11, 2, pp. 296–300.

Khalikov M.A., Maximov D.A., Shabalina U.M. (2018) Risk Indicators and Risk Management Models for an Integrated Group of Enterprises. *Journal of Applied Economic Sciences*, XIII, 1(55), pp. 52–64.

Luenberger D., Yinyu Y. (2008) *Linear and Nonlinear Programming.* Springer Science + Business Media, LLC.

Maximov D.A., Khalikov M.A. (2016) Prospects of Institutional Approach to Production Corporation Assets Assessment. *Actual Problems of Economics*, 183, 9, pp. 16–25.

Minniti A., Turino F. (2013) Multi-product Firms and Business Cycle Dynamics. *European Economic Review*, 57, pp. 75–97.