

Метод анализа экономических процессов в условиях нестабильности (на примере анализа динамики выручки российских компаний)¹

Полунин Ю.А., Юданов А.Ю.

Предлагаются новые методы, позволяющие использовать свойства моделей нелинейной динамики для анализа динамики реальных социально-экономических процессов. Для этого разработан комплекс моделей в виде связанных нелинейных одномерных и многомерных отображений, отвечающих общим закономерностям социально-экономических процессов, – развитие в быстроменяющейся среде в условиях ресурсных ограничений. Предлагаемый комплекс моделей позволяет анализировать динамику процессов в предположениях как их независимости, так и взаимосвязанности между собой. Вводится определение взаимосвязанных процессов как процессов, развивающихся в условиях общего ограничения. Предлагаются три критерия для выявления взаимосвязанных процессов по эмпирическим данным. В случае взаимосвязанности процессов параметры одномерных и многомерных моделей оказываются тоже взаимосвязанными, что позволяет глубже проводить анализ рассматриваемых ситуаций. Использование предложенного метода демонстрируется на примере анализа динамики выручки российских компаний в период с 2006 по 2015 гг. (всего 38 тыс. компаний). Все компании были разбиты на четыре группы, в зависимости от темпов прироста выручки с 2010 по 2015 г. Исследована и отвергнута гипотеза возможной взаимосвязи упадка одной и параллельного усиления другой группы российских фирм после кризиса 2008–2009 гг. Фирмы-новаторы, увеличившие потенциалы роста выручки после кризиса, ориентировались на иные рынки, чем фирмы-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ № 18-01-00619-а «Разработка новых математических методов и междисциплинарных подходов для анализа ряда социогуманитарных проблем».

Авторы выражают глубокую благодарность Ф.Т. Алескерову, В.А. Бессонову и Б.Г. Миркину, не только с доброжелательной критичностью прочитавшим текст, но и подсказавшим ряд конструктивных решений, серьезно усиливших авторскую концепцию.

Полунин Юрий Алексеевич – к.т.н., доцент, ведущий инженер Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук. E-mail: yplnn@yandex.ru

Юданов Андрей Юрьевич – ординарный профессор, д.э.н., профессор Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. E-mail: yudanov@yandex.ru

Статья поступила: 21.06.2020/Статья принята: 11.11.2020.

консерваторы, потенциал роста выручки которых оказался исчерпан после кризиса. Особенности динамики выручки групп компаний визуально представлены и в виде нормированных значений, когда за единицу взяты медианные оценки каждой из групп в 2007 г.

Ключевые слова: временной ряд; нелинейный процесс; отображения как модели нелинейной динамики; созидательное разрушение; реаллокация ресурсов.

DOI: 10.17323/1813-8691-2020-24-4-622-649

Для цитирования: Полунин Ю.А., Юданов А.Ю. Метод анализа экономических процессов в условиях нестабильности (на примере анализа динамики выручки российских компаний). *Экономический журнал ВШЭ*. 2020; 24(4): 622-649.

For citation: Polunin Yu.A., Yudanov A.Yu. Method for Analyzing Economic Processes in Conditions of Instability (on the Example of Analyzing the Dynamics of Revenue of Russian Companies). *HSE Economic Journal*. 2020; 24(4): 622-649. (In Russ.)

1. Проблемы анализа социально-экономических процессов на примере динамики больших групп компаний, различающихся по темпам роста выручки

Как правило, для анализа социально-экономических процессов есть крайне мало достоверной априорной информации. Это приводит к тому, что существует несколько альтернативных гипотез относительно особенностей рассматриваемых процессов, но невозможно сказать, какая из них наиболее соответствует конкретным анализируемым реалиям. Поэтому задачей анализа часто бывает выработка нового взгляда на процессы, в том числе и за счет представления результатов анализа в новых формах, позволяющих интерпретировать полученные результаты в привязке к альтернативным гипотезам. Это позволяет сузить круг исходных гипотез относительно рассматриваемой ситуации.

Анализ динамики социально-экономических процессов (будем в дальнейшем для упрощения использовать термин «процессы») должен проводиться применительно к ряду специфических условий. Во-первых, процессы развиваются в быстроменяющейся среде, и не всегда априорно понятно даже на качественном уровне, как влияют на них изменения среды. Например, как влияют кризисы и санкции или политические события на динамику роста групп компаний при том, что можно допустить, что влияние на различные группы может быть как отрицательное, так и положительное. В силу того, что измерения процессов дискретны, а возможные изменения среды могут происходить часто по отношению к числу измерений, то для описания и анализа процессов нужны модели с малым числом параметров, позволяющие как выявлять изменения в процессах, так и получать сопоставимую по времени картину динамики процессов даже с учетом существенных качественных изменений.

Во-вторых, процессы развиваются в условиях ограниченных ресурсов. Будем рассматривать термин «ресурсы» в широком смысле в зависимости от конкретной задачи, это как экономические, например, финансовые, рыночные, технологические и другие ре-

сурсы, так и политические ресурсы в виде числа избирателей, сторонников идей и другие. Ограниченность ресурсов создает ограничения развития анализируемого процесса. Влияние ограничений столь повсеместно, что в науке сформировалась особая субдисциплина – «теория ограничений» [Шрагенхайм, 2007]. Влияние ограничений влечет за собой целый ряд особенностей процессов. Из-за влияния ресурсных ограничений социально-экономические процессы нелинейны по своей сути даже при неизменной внешней среде. Следует отдавать отчет, что понятие «нелинейность» применительно к возможной динамике процессов многогранно. Оно включает в себя такие качественно разные варианты динамики, как динамика по S-образной кривой, колебания на различных частотах, динамический хаос. И относительно характера анализируемой конкретной нелинейности у нас нет априорной информации. Кроме того, даже при качественном понимании влияния ресурсов мы априорно не представляем величины этих ограничений. В случае рассмотрения нескольких процессов в рамках одного анализа возникают новые вопросы: развиваются ли процессы, используя один и тот же взаимосвязанный ресурс или ресурс каждого процесса независим; если ресурс для нескольких процессов одинаков, то как он распределяется между процессами?

Таковы наиболее общие особенности, которые необходимо учесть при выборе моделей анализа данных реальных социально-экономических процессов. Общепринятые (например, эконометрические) подходы сталкиваются применительно к такому материалу с очевидными трудностями: для коротких участков с однородной динамикой невозможно собрать достаточное количество данных, чтобы получить статистически устойчивые решения.

Поскольку нам необходимо описывать и анализировать нелинейные процессы, то рационально воспользоваться результатами, полученными математиками в исследовании нелинейной динамики на основании изучения свойств нелинейных моделей. Свойства многих нелинейных моделей хорошо изучены, для части моделей получены обобщающие результаты «теории универсальности» [Фейгенбаум, 1983]. Важным результатом теории универсальности является то, что для любой нелинейной модели, отвечающей достаточно мягким критериям, существует единый сценарий усложнения динамики с единичными значениями констант. Это приводит к тому, что в ходе аппроксимации реальных данных можно использовать любую из моделей, отвечающих достаточно мягким критериям теории универсальности, в предположении, что неизвестная нам генерирующая данные функция тоже отвечает универсальности.

Но использование нелинейных моделей для анализа процессов несет и вполне естественные трудности, когда необходимо выбрать исходную модель, позволяющую интерпретировать результаты в соответствии с задачами анализа. Поскольку свойства моделей нелинейной динамики исследовались с позиций математики и многие результаты носят достаточно абстрактный характер, то возникают проблемы содержательной интерпретации изменений параметров моделей. Стоит задача выбора параметров модели, информативных для конкретных задач. В качестве примера выявления особенностей подхода к выбору моделей анализа будет проанализирована динамика больших групп российских компаний. Исследуемая совокупность изучена на временном интервале с 2006 по 2015 гг. и состоит из 38412 российских компаний, имевших в 2015 г. выручку более 200 млн рублей.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 знакомит со статистической базой исследования, акцентируя внимание на тех ее особенностях, которые должны быть учтены при моделировании. Раздел 3 подробно обсуждает подход к выбору моделей и анализу социально-экономических процессов, основанный на использовании комплексов моделей нелинейной динамики. Метод описывается первоначально в предположении независимых процессов. Приводятся результаты расчетов по моделям независимой динамики. Поскольку анализ динамики компаний приводится в качестве примера, то некоторые трактовки результатов следует рассматривать как предварительные и обсуждаемые в дальнейшем. С учетом совпадающих ключевых моментов в динамике некоторых процессов предлагается модель взаимосвязанных процессов и исследуются ее свойства при определении параметров по эмпирическим данным. Показана избыточность информации в условиях взаимосвязанной динамики, что позволяет получать дублирующие оценки каждого из параметров модели с использованием по три значения каждого из процессов. С учетом избыточности информации сформулированы три критерия выявления взаимосвязанных процессов по эмпирическим данным. Доказано утверждение, что в случае взаимосвязанности сумма значений ограничений одномерных моделей равна значению ограничения в многомерной модели. Содержание раздела 4 составляет выявление взаимосвязанной динамики выручки разных групп российских компаний на реальном статистическом материале. В разделе 5 обсуждается вопрос о том, что мы наблюдаем в результатах использования моделей для посткризисной России. Взлет новаторов и упадок консерваторов, в равной степени ставшие возможными благодаря изменению условий, хотя и совпадают по времени, но проходят автономно, не оказывая влияния друг на друга. Наконец, раздел 6 подводит итоги работы как в отношении предлагаемых инструментов анализа, так и конкретного предмета исследования.

2. Данные, используемые в анализе

Статистическую базу работы составляют данные, содержащиеся в системе «СПАРК-Интерфакс», по всем российским компаниям, отвечающим следующим критериям отбора: существовавшим как минимум с 2010 г. и имевшим в 2015 г. выручку не менее 200 млн руб. Всего таких компаний в Российской Федерации в анализируемый период оказалось 38412. Данные об их выручке в диапазоне с 2006 по 2015 гг. и были использованы при анализе.

Все компании были ранжированы в зависимости от темпов роста выручки за период с 2010 по 2015 г. и разбиты на четыре равные по численности группы по 9603 компании. В первую группу вошли наиболее динамичные компании, чьи темпы роста выручки в рамках ранжированной совокупности компаний располагались выше 75-го перцентиля, во вторую группу – с темпами, попадавшими в диапазон 75–50 перцентилей, в третью – между 50–25 перцентилями и в четвертую – ниже 25-го перцентиля. Динамика медиан выручки по всем четырем группам приведена в табл. 1 и на рис. 1. Поскольку в качестве измеряемого показателя использовались ежегодные медианные значения выручки, то с некоторой условностью их динамика может рассматриваться как динамика выручки типичной компании каждой группы.

Представленная в табл. 1 и на рис. 1 динамика нетривиальна. Вначале медианы всех четырех групп развивались примерно одинаково – зрительно это видно благодаря общим тенденциям на соответствующих кривых. Вплоть до 2008 г. они росли, в 2009 г. сократились

лись, в 2010 г. вместе испытали послекризисный отскок (впрочем, у группы «выше 75 перцентилей» все изменения были слабо выраженными до 2011 г.).

Таблица 1.

**Медианы за весь период анализа годовой выручки
для групп компаний с разными темпами роста в период с 2010 г. по 2015 г.**

Годы	Выручка, млн руб.			
	менее 25-го перцентиля (X_n)	50-25 перцентилей (Y_n)	75-50 перцентилей (Z_n)	более 75-го перцентиля (V_n)
2006	297,578	190,818	113,135	45,091
2007	390,147	245,325	156,099	56,808
2008	490,542	304,144	194,395	63,202
2009	448,958	283,979	178,261	55,725
2010	578,721	346,249	226,205	56,398
2011	637,764	431,371	327,040	147,353
2012	636,772	480,333	395,582	234,585
2013	596,593	507,251	446,487	312,254
2014	547,923	535,190	515,988	418,438
2015	447,972	543,003	573,290	544,881

Источники: база данных «СПАРК-Интерфакс», расчеты авторов.

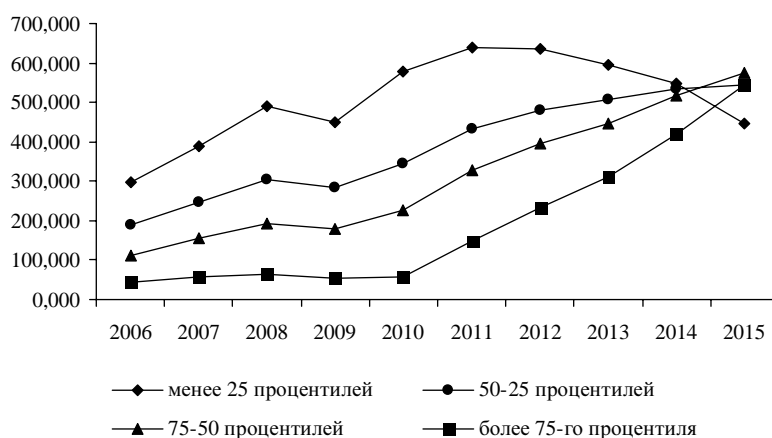


Рис. 1. Медианы за весь период анализа годовой выручки для групп компаний с разными темпами роста в период с 2010 г. по 2015 г., млн руб.

Характерно, что до этого момента группа «менее 25 перцентилей», которой в дальнейшем суждено было стать собранием наиболее медленно растущих фирм, выглядела отчетливо лучше других. Из всех четырех групп в ней были сосредоточены самые крупные компании, что не мешало им расти быстрее основной массы остальных фирм. За период 2006–2010 гг. их медианная выручка увеличилась в 1,94 раза, что практически равно лучшему из четырех групп результату группы «75–50 перцентилей», где зафиксирован рост в 2,0 раза. По абсолютной же величине прироста выручки будущие «неудачники» из группы «менее 25 перцентилей» были вне конкуренции. В названный период она у них много выше, чем у типичных фирм других групп.

Понятно, что взрывной рост группы «более 75 перцентилей» предопределен принципом отбора компаний. Ведь в этой группе мы сосредоточили ту четверть общей популяции фирм, которая демонстрировала в 2010–2015 гг. наивысшие темпы роста. Однако отбор ни в коей мере не предопределял столь буквальную реализацию принципа «так будут последние первыми, и первые последними» (Мф. 20:16). Если следовать фундаментальному принципу эволюционной экономики «растут более приспособленные» (growth of the fitter), то обычно «ожидается, что фирмы, превосходящие прочих, будут увеличивать долю на рынке, в то время как менее эффективные компании сократят свое присутствие на рынке и в итоге покинут его» ([Dosi et al., 2017, p. 1], см. также одну из наиболее авторитетных обобщающих работ на эту тему – [Coad, 2007]). Очевидно, в этой логике напрашивается лишь одна интерпретация случившегося: после кризиса произошел резкий слом условий, к которым надо было заново приспособливаться, соответственно, наиболее приспособленными стали совсем другие фирмы.

Можно ли в таком случае говорить о становлении в ходе кризиса новой генерации фирм, лучше приспособленной к изменившимся условиям слабой конъюнктуры и вытесняющей с рынка поколение компаний, процветавших при благоприятном климате? Соответствует ли описанная динамика шумпетерианскому «созидательному разрушению»? Попробуем взглянуть на этот вопрос с учетом результатов анализа динамики компаний при помощи нелинейных моделей.

3. Методика анализа

3.1. Выбор и свойства нелинейной базовой модели

С учетом нелинейности процессов выберем модель, отвечающую нелинейной парадигме. Использование нелинейной парадигмы отражает взгляд на реальность, который содержит, по выражению Ильи Пригожина, «философию неравновесности». Но анализ с использованием нелинейной парадигмы несет и некоторые проблемы: полученные результаты, как правило, интуитивно непонятны, ибо они лежат за пределами нашего повседневного опыта. И всегда, рассматривая результаты анализа с использованием нелинейных моделей, надо отдавать себе отчет в этом, меньше используя интуитивные представления. Подходы к описанию и анализу экономических процессов при помощи нелинейных моделей рассмотрены, например, в работе [Пу, 2000], а использование нелинейных моделей в эволюционной экономике – в исследовании [Садченко, 2007].

Поскольку значения процессов в социально-экономической сфере обычно даны в дискретном времени, то для описания и анализа их динамики целесообразно восполь-

зываются моделями в виде дискретных нелинейных одномерных отображений $X_{n+1} = f(X_n)$. «Термин «отображения» используется, как это принято в нелинейной динамике, фактически это разностные уравнения, описывающие изменения значений процессов...» [Кузнецов, Савин, Тюрюкина, 2010]. В пользу выбора одномерных отображений в анализе процессов приведем несколько соображений, основанных на результатах исследования свойств нелинейных отображений [Малинецкий, 2017]. В анализе многих нелинейных явлений проще говорить на языке дискретных отображений, чем использовать язык дифференциальных уравнений. Многие системы дифференциальных уравнений порождают похожие отображения, поэтому модели в виде одномерных или двумерных отображений часто рассматривают как модели нелинейных процессов. Тем более что крупные успехи в нелинейной динамике были достигнуты в изучении одномерных отображений, что позволяет рассматривать их как упрощенные модели многих процессов. Свойства одномерных отображений хорошо изучены.

В условиях анализа реальных данных, как, например, в нашем случае, возникают ситуации, когда надо анализировать динамику нескольких процессов с разных позиций: либо как независимых, либо еще и рассматривать гипотезу о их взаимосвязанности. Для одновременного анализа нескольких процессов и выявления их взаимосвязей предлагается использовать комплекс нелинейных отображений, включающий в себя взаимосвязанные одномерные и многомерные нелинейные отображения. Данный комплекс моделей базируется на одномерном отображении (в дальнейшем будем его называть «базовой моделью»), описывающем анализируемый процесс как независимый и представляющем значение процесса на временном шаге $n+1$ в виде следующего отображения:

$$(1) \quad X_{n+1} = X_n + X_n A_X (K_X - X_n),$$

где X_n – значение процесса в момент времени n ; A_X – интенсивность изменений процесса при отсутствии ограничений; K_X – ограничение, в котором развивается процесс, часто оно характеризует потенциал развития процесса (в случае анализа динамики выручки компаний оно характеризует с некоторым допущением размер рыночной ниши типичной компании анализируемой группы).

Логика базовой модели такова: значение процесса на следующем шаге представляется в виде суммы текущего значения X_n и приращения, зависящего от достигнутого значения X_n , интенсивности изменений A_X и поправки на влияние ограничения, выраженной как $(K_X - X_n)$. Поправка на влияние ограничения отражает свободную зону для развития процесса и определяется как разность между значением ограничения и достигнутым значением процесса (в нашем случае можно говорить о незанятой части рыночной ниши). Другими словами, мы транслируем непосредственно в структуру модели описанные выше общетеоретические представления о ключевой роли ограничений – рост возможен до тех пор, пока позволяют ограничения².

² Специально проблеме влияния спросовых ограничений на рост компаний посвящена статья авторов [Полунин, Юданов, 2020].

Рассматриваемое одномерное отображение предложено для описания нелинейной динамики еще Ферхюльстом [Verhulst, 1845], но по упомянутым методологическим причинам оно актуально вплоть до нашего времени. Динамика Ферхюльста рассматривается, например, в работе [Пайген, Рихтер, 1993]. Несмотря на свою простоту, отображения подобного класса весьма перспективны для моделирования [Малинецкий, 2017], так как могут описывать широкий круг качественно отличающихся траекторий, генерируемых широким классом функций.

Для сопоставимости параметров отображений с разными значениями ограничений (такие ситуации возникают как для разных времен измерений одного и того же процесса, так и для разных процессов, сравниваемых между собой) необходима нормировка параметров отображения (1) путем деления левой и правой части на значение ограничения K_X . В результате нормировки значения ограничений становятся равными единице, а

нормированные значения процесса выражаются в долях ограничения $x_n = \frac{X_n}{K_X}$, интен-

сивности процессов становятся так же нормированными $a_x = A_X K_X$. Будем в дальнейшем обозначать исходные ненормированные значения процессов и параметры к ним относящиеся прописными буквами, в том числе и в индексах, а нормированные величины, аналогичные ненормированным, – строчными буквами.

Оценки параметров модели (1) на основании эмпирических данных можно получить как решение системы уравнений, описывающих два значения процесса:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 = X_0 + X_0 A_X (K_X - X_0) \\ X_2 = X_1 + X_1 A_X (K_X - X_1) \end{cases}$$

Решением будут следующие оценки параметров модели:

$$(3) \quad A_X = \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0)},$$

$$(4) \quad K_X = \frac{X_1 - X_0}{X_0 A_X} + X_0 = \frac{X_1 (X_1 - X_0)^2}{X_1^2 - X_0 X_2} + X_0.$$

Как видно из (3) и (4), для определения параметров моделей нам необходимы всего лишь три последовательных значения процесса X_0, X_1, X_2 . Эта особенность моделей Ферхюльста крайне важна, если учесть свойственную среде краткость временных отрезков, отделяющую разные тенденции развития. Так, за анализируемый нами временной диапазон с 2006 г. по 2015 г. произошел мировой кризис, появились санкции и контрсанкции, и говорить об однородности среды, в которой происходит динамика выручки, просто бессмысленно. К очевидному же вопросу о том, можно ли хоть сколько-нибудь доверять модели, опирающейся на всего лишь три годовых показателя, мы вернемся позже, на данном этапе зафиксировав только формальную корректность решения системы уравнений.

Влияние шума на отображения типа (1) рассмотрено в работе [Ахромеева и др., 2007], где выяснено, что небольшой шум не меняет свойства одномерных отображений. Это позволяет использовать их в анализе процессов с шумом.

Так как нам предстоит анализировать нескольких процессов, то будем каждый из процессов обозначать новой переменной, добавляя ее и в индексы параметров описывающей его модели. Для четырех анализируемых процессов с переменными X_n, Y_n, Z_n, V_n параметры интенсивности процессов будут обозначаться A_X, B_Y, C_Z, D_V , а ограничения процессов – K_X, K_Y, K_Z, K_V . Аналогичные приведенным выше рассуждениям по определению параметров моделей на основании реальных данных можно провести и для других анализируемых процессов, заменяя соответствующие переменные.

3.2. Новые категории анализа временных рядов с использованием базовых моделей

Несмотря на краткость социально-экономических временных рядов, данные по ним, имеющиеся в распоряжении исследователя, обычно включают более трех наблюдений процессов. Так, в нашем анализе мы имеем измерения по 10 точкам (годам). То есть один временной ряд каждого из процессов на разных своих участках позволяет получить некую совокупность решений уравнений (3) и (4) или аналогичных уравнений для других процессов. В этом случае вместо отдельных значений параметров модели можно по каждому из процессов получить и анализировать их динамику. Такой набор изменяющихся во времени оценок параметров модели (1) получается путем многократных расчетов, аналогичных (3) и (4), со сдвигом каждый раз исходных данных на один временной интервал (метод скользящего окна). Это позволяет анализировать процесс в категориях **изменения** параметров модели, что и будет проведено ниже.

Фактически, вместо одной модели, перекрывающей весь анализируемый временной диапазон, получается набор взаимосвязанных нелинейных моделей, построенных на очень коротких временных отрезках. Можно сказать, что меняется идеология анализа. Мы не стремимся максимально удлинить временной ряд с целью повысить статистическую точность вычисления и репрезентативность параметров. А значит, и не несем связанных с этим издержек, в частности, связанных с включением в одну модель данных, относящихся к несовместимым ситуациям³, со сглаживанием разнообразных поворотных точек и т.п. Зато появляется возможность сосредоточить внимание на динамике параметров модели при переходе от одного «скользящего окна» к следующему. Информативными становятся как соответствие на следующем шаге развития процесса выявленной ранее тенденции, так и степень отклонения от нее.

Модель (1) можно использовать для выявления моментов времени, когда тенденции развития процессов последовательно реализуют себя год за годом (например, продукция фирмы все сильнее заполняет доступную ей рыночную нишу), либо, напротив, силь-

³ Не забудем, что краткость временного ряда в экономике – объективная реальность. Его нельзя удлинить без нарушения общенаучного принципа «при прочих равных условиях» (*ceterisparibus*). Чем длиннее ряд, тем выше вероятность изменений внешних и внутренних условий деятельности фирмы.

но меняются (принципиально меняется тип траектории). При этом, если происходит значительное изменение тенденции, то для этого момента времени получаемые результаты расчетов параметров модели становятся некорректными. Они указывают лишь на сам факт смены тенденции. Это связано с тем, что при сильной смене тенденции в расчеты вводятся разнородные данные: значение процесса, отражающее старую тенденцию и новое значение, соответствующее изменившейся тенденции.

Количественно изменение тенденции можно представить как ситуацию, когда на следующем шаге (в следующем временном окне) новое значение процесса не совпадет со значением, которое должно было быть на основании сформировавшейся в предыдущем окне тенденции. Обратимся к выражению (3) и посмотрим, как будут меняться оценки интенсивностей при отклонении значения процесса от сформировавшейся тенденции. Представим новое реальное значение процесса X_2 как сумму значения в рамках предыдущей тенденции X_{tend} и некоего отклонения ΔX_2 от тенденции: $X_2 = X_{tend} + \Delta X_2$. Подставляя такое выражение значения процесса в (3), можно представить получаемое значение интенсивности как сумму значения оценки интенсивности из предыдущего окна A_{tend} и отклонения новой оценки ΔA_X по отношению к оценке предыдущего окна:

$$(5) \quad A_X = A_{tend} + \Delta A_X = \frac{X_1^2 - X_0 X_{tend}}{X_0 X_1 (X_1 - X_0)} - \frac{\Delta X_2}{X_1 (X_1 - X_0)}.$$

Второе слагаемое в выражении (5) и определяет, насколько изменится оценка интенсивности по отношению к предыдущему окну:

$$(6) \quad \Delta A_X = - \frac{\Delta X_2}{X_1 (X_1 - X_0)}.$$

Как видно из выражения (6), изменение оценки интенсивности ΔA_X будет зависеть от соотношения отклонения от тенденции ΔX_2 и предыдущих значений процесса, в том числе и их разности.

Резкий скачок изменения значений интенсивности по отношению к предыдущему значению должен трактоваться как индикатор значительного изменения тенденции. Определение конкретной величины изменения интенсивности ΔA_X , которую можно рассматривать как «резкий скачок», зависит от конкретных ситуаций. В данной статье мы ограничимся более слабым тезисом: будем рассматривать значительные изменения параметров в моделях только как признак смены тенденций развития процессов, а значит, будем игнорировать результаты расчетов параметров для этого момента как полученные на основании разнородных данных.

Какую информацию кроме того можно извлечь из значений параметров модели (1) и комплекса их изменений? Применительно к анализу эволюционной динамики нас интересуют возможности развития процесса в меняющейся среде, которые отражены в изменении значений ограничения K_X , характеризующих потенциалы роста. Важным вопро-

сом является и то, сколь далеко находятся процессы в разные периоды времени от потенциалов роста (например, насколько сильно заполняет продукция фирмы потенциальную рыночную нишу), информацию об этом несут нормированные значения процесса x_n – это выражение значений процесса в долях ограничения.

Процессы постоянно испытывают мощные внешние воздействия, что затрудняет интерпретацию результатов анализа сколько-нибудь длинного временного ряда, если его рассматривать как единое целое. Напротив, описываемый в настоящей статье подход изучает временной ряд не как неразделимое целое, а как совокупность скользящих коротких трехлетних окон, что, на наш взгляд, позволяет сосредоточить внимание не на тренде, а на происходящих изменениях.

Рассмотрим описание и анализ приведенных выше данных о выручке российских компаний.

3.3. Описание динамики выручки групп компаний базовыми моделями

Проанализируем динамику выручки компаний по параметрам базовых моделей, описывающих динамику каждой из групп компаний как независимую. В табл. 2 представлены результаты расчетов. На основании изменения оценок интенсивностей моделей были определены времена значительных изменений тенденций, в эти моменты оценки параметров некорректны, поэтому в таблицах они не приведены. Для удобства восприятия параметров ниже приведены базовые модели и нормированные значения процессов для каждой группы компаний. Каждому из процессов присвоен номер. Такая нумерация будет использована в дальнейшем для индексов вариантов расчетов в моделях взаимосвязанной динамики.

$$\text{Процесс 1 - группа «менее 25-го перцентиля» } X_{n+1} = X_n + X_n A_X (K_X - X_n), \quad x_n = \frac{X_n}{K_X}.$$

$$\text{Процесс 2 - группа «50-25 перцентилей» } Y_{n+1} = Y_n + Y_n B_Y (K_Y - Y_n), \quad y_n = \frac{Y_n}{K_Y}.$$

$$\text{Процесс 3 - группа «75-50 перцентилей» } Z_{n+1} = Z_n + Z_n C_Z (K_Z - Z_n), \quad z_n = \frac{Z_n}{K_Z}.$$

$$\text{Процесс 4 - группа «более 75-го перцентиля» } V_{n+1} = V_n + V_n D_V (K_V - V_n), \quad v_n = \frac{V_n}{K_V}.$$

Рассмотрим, какую информацию о внешних воздействиях и реакции на них можно извлечь по изменению значений ограничений моделей и нормированных по моделям значений процессов.

Оценки 2008 г. (т.е. «скользящее окно» 2006–2008 гг.) с некоторым допущением можно рассматривать как исходные докризисные оценки рыночных ниш и их заполнения для разных групп компаний (кризис начал проявляться с августа 2008 г., и реакция на него запаздывала). По нормированным значениям (правая часть таблицы) можно оценить возможности дальнейшего роста компаний в этом году. Рыночные ниши для первых

двух групп оказываются незаполненными, позволяя, не меняя стратегии, интенсивно расти дальше, если бы все осталось без перемен. Но в 2009 г. кризис резко преобразовал динамику, что отразилось в уменьшении оценок ограничений моделей, характеризующих рыночные потенциалы. Наряду со значительным уменьшением самих рыночных потенциалов мы видим и другую проблему для компаний, порожденную кризисом: значения выручки компаний оказались вблизи новых ограничений – рыночные ниши оказались почти заполнены (нормированные значения близки к единице). Возможности дальнейшего роста почти исчезли. Другими словами, мировой кризис повлиял на перспективы роста компаний самым жестким образом.

Таблица 2.

**Оценки ограничений моделей (рыночных потенциалов)
и нормированных значений процессов для каждой группы**

Последний год временного окна	Ограничения моделей (рыночный потенциал), млн руб.				Нормированные значения процессов			
	группа «менее 25-го процент- ля» (K_X)	группа «50–25 процент- лей» (K_Y)	группа «75–50 процент- лей» (K_Z)	группа «более 75-го процент- ля» (K_V)	$\frac{X_n}{K_X}$	$\frac{Y_n}{K_Y}$	$\frac{Z_n}{K_Z}$	$\frac{V_n}{K_V}$
2008	833,3	530,1	234,5	65,8	0,59	0,57	0,83	0,96
2009	465,7	291,4	184,7	59,9	0,96	0,97	0,97	0,93
2010	481,1	299,5	190,6	56,4	1,2	1,16	1,19	1
2011	649,5		Изменение тенденций		0,98		Изменение тенденций	
2012	636,9	504,4	416,5	200,1	1	0,95	0,95	1,17
2013	Измене- ние тен- денций	528,1	504,6	345,3	Измене- ние тен- денций	0,96	0,88	0,9
2014	Изменение тенденций				Изменение тенденций			
2015	636	545,3	689	1265,5	0,7	1	0,83	0,43

Примечание: курсивом выделены параметры с момента, когда рост в посткризисный период прекратился.

Оценки 2010 г. дали величины рыночных потенциалов, близкие к оценкам за 2009 г., но значения выручки показали переполнения рыночных ниш (нормированные значения больше единицы), что можно объяснить проявлением эффекта отложенного спроса. В 2011 г. начался посткризисный отскок, причем для трех групп компаний тенденция изменилась очень резко. В 2012 г. оценки рыночных потенциалов возросли, однако проблемы в развитии компаний сохранились: нормированные значения близки к единице, расти особенно некуда. Наиболее ярко это видно для группы компаний «менее 25-го проценти-

ля», их нормированное значение процесса равно единице и, как будет видно, в дальнейшем значения выручки переходят от роста к падению (значения интенсивности становятся отрицательными). Такое качественное изменение трактовки параметра является проявлением особенностей смены соотношений параметров отображений Ферхюльста. Можно сказать, что это единственная группа компаний, где докризисное ограничение (потенциал роста) впоследствии не было достигнуто, в этой группе сконцентрировались наиболее сильно пострадавшие от кризиса компании. В 2013 г., несмотря на увеличение оценок потенциала рыночных ниш, видно, что развитие компаний затруднено (нормированные значения для компаний продолжают быть близки к единице). После очередной резкой смены тенденции в 2014 г. картина поменялась, причем для каждой группы по-своему, особенно наглядно это видно по изменению нормированных значений процессов. Группа «50–25 процентиля» сравнивалась по выручке с рыночной нишей. Если не произойдет существенных перемен в стратегиях компаний или в экономической среде, то типичные компании этой группы в дальнейшем повторят судьбу компаний группы «менее 25-го процентиля», они начнут исчезать.

У группы «75–50 процентиля» ситуация с возможностями роста улучшилась, но не кардинально. К 2015 г. потенциал роста вырос ($K_z = 689$ млн руб.) почти втрое, превзойдя докризисный уровень. Причем он задействован только на 83%, так что у фирм есть возможность дальнейшего развития на основе продолжения выбранной стратегии. Наконец, у самой динамичной группы «более 75-го процентиля» появилась возможность быстрого и значительного роста. Типичная компания этой группы до кризиса страдала от практически исчерпанного потенциала роста, зато к 2015 г. ее рыночный потенциал стал самым большим как по величине ограничения (рост в 19 раз с докризисных 65,8 до 1265,5 в конце периода), так и по степени заполнения ниши (мизерный уровень 0,43). Можно утверждать, что типичная компания этой группы существенно выиграла как от последствий мирового кризиса, так и от санкционного противостояния, начавшегося в 2014 г.

Какие общие заключения можно сделать по первой части анализа с использованием базовых моделей в виде отображений Ферхюльста?

- Модели хорошо улавливают изменения тенденций развития процессов и позволяют определить характер этих изменений, не противореча результатам дескриптивного анализа.
- Модели отражают процессы, происходящие в российской экономике, в том числе влияние внешних факторов, что проявляется в совпадении времен изменения тенденции для разных групп исследованных фирм. Особенно выделяются в этом плане 2009 и 2010 гг. с отрицательным влиянием мирового кризиса на динамику выручки всех компаний. Внешнее влияние в 2014 г. хронологически совпадало для всех фирм, но порождало у части компаний слабый отрицательный эффект, а у других фирм – значительный положительный эффект (по принципу: «для кого санкции, а для кого импортозамещение»).
- Если рассматривать ежегодно только значения ограничений моделей, то на качественном уровне видны некие общие закономерности их изменения: в разные годы оценки разных групп меняются взаимосвязанно. Но встает вопрос: «Эти зависимости проявляются только на качественном уровне, или это более сильные взаимосвязи, проявляющиеся и количественно?». Для ответа на него требуются другие модели.

3.4. Модели взаимосвязанных процессов

Наряду с базовыми моделями одномерных отображений введем еще один класс моделей, основанных на многомерных отображениях и позволяющих описывать взаимосвязанные процессы. Для выявления и анализа взаимосвязанных периодов динамики целесообразно использовать модели в виде многомерных отображений, образующих комплекс с рассмотренными выше одномерными моделями. Анализ взаимосвязанности процессов проведем в рамках следующего определения: «Будем называть нелинейные процессы взаимосвязанными, если они происходят под влиянием одного и того же ограничения». Такое определение, бесспорно, сужает общегуманитарное понимание взаимосвязанности, но применимо ко многим процессам, в частности, к случаям, когда проявляются конкурентные, паразитические (эксплуаторские) или, наоборот, симбиотические отношения.

Для дальнейшего анализа взаимосвязанных процессов воспользуемся моделью в виде системы нескольких нелинейных отображений (формально-математическую сторону см.: [Полунин, 2003, 2019]), объединяющих динамику процессов. Рассмотрим в качестве примера модель первых трех процессов в условиях взаимосвязанности. Свойства, полученные для трехмерной модели, можно наблюдать и в других многомерных случаях. Предлагаемая модель в виде системы трехмерных отображений отвечает основным закономерностям динамики рассматриваемых процессов, выражая значения процессов на следующем временном шаге $n + 1$ следующим образом:

$$(7) \quad \begin{cases} X_{n+1} = X_n + X_n A(K - X_n - Y_n - Z_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + Y_n B(K - X_n - Y_n - Z_n), \\ Z_{n+1} = Z_n + Z_n C(K - X_n - Y_n - Z_n), \end{cases}$$

где X_n, Y_n, Z_n – значения соответствующих процессов в момент времени n ; A, B, C – интенсивности соответствующих процессов при отсутствии ограничений; K – единое ограничение, объединяющее процессы во взаимосвязанные. По идеологии построения эти отображения аналогичны набору отображений типа (1), но в них усложнено описание влияния ограничений. Поскольку теперь мы допускаем, что три процесса используют один и тот же ресурс, то влияние ограничения определяется как разность между значением ограничения и суммой достигнутых одновременно значений всех трех процессов. Свободная рыночная ниша, например, может заполняться как продукцией данной фирмы, так и ее конкурентов. В данном случае ограничение процессов можно рассматривать как оценку общего потенциала эволюционного развития.

При использовании моделей взаимосвязанных процессов встает закономерный вопрос: «В какие моменты времени у процессов есть взаимосвязанность?» или, что то же самое, «Когда корректно применение моделей в виде многомерных отображений (7)?».

Для проверки гипотезы о взаимосвязанности анализируемых процессов в определенный временной период и для определения параметров моделей (7) достаточно по три значения каждого из процессов $X_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2, Y_3, Z_0, Z_1, Z_2$. Для определения параметров модели на основании значений процессов можно составить систему из четырех независимых уравнений, аналогичную системе (2), решив которую, мы получим расчет-

ные формулы для оценок параметров модели. Как показывают решения системы уравнений, для определения оценок параметров моделей достаточно трех значений одного из процессов и по два значения других процессов. Если каждый раз брать по три значения разных процессов, то в условиях строгой взаимосвязанности оценки одинаковых параметров должны совпадать.

Рассмотрим в качестве примера вариант оценок, получаемый на основании трех значений первого процесса и двух значений второго и третьего процессов. Присвоим этим оценкам индекс «1», поскольку используются три значения первого процесса (нумерация процессов приведена перед табл. 2). Соответственно для оценок, полученных по трем значениям второго процесса, будет индекс «2» и по трем значениям третьего процесса – «3».

Система уравнений для определения параметров моделей имеет вид:

$$\begin{cases} X_1 = X_0 + X_0 A_1 (K_1 - X_0 - Y_0 - Z_0), \\ X_2 = X_1 + X_1 A_1 (K_1 - X_1 - Y_1 - Z_1), \\ Y_1 = Y_0 + Y_0 B_1 (K_1 - X_0 - Y_0 - Z_0), \\ Z_1 = Z_0 + Z_0 C_1 (K_1 - X_0 - Y_0 - Z_0). \end{cases}$$

Первый вариант оценок получается как решение этой системы уравнений:

$$(8) \quad A_1 = \frac{X_1^2 - X_0 X_2}{X_0 X_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 + Z_1 - Z_0)},$$

$$(9) \quad B_1 = A_1 \frac{X_0 (Y_1 - Y_0)}{Y_0 (X_1 - X_0)} \text{ и } C_1 = A_1 \frac{X_0 (Z_1 - Z_0)}{Z_0 (X_1 - X_0)},$$

$$(10) \quad K_1 = \frac{X_1 - X_0}{X_0 A_1} + X_0 + Y_0 + Z_0 = \frac{X_1 (X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0 + Z_1 - Z_0)}{X_1^2 - X_0 X_2} + X_0 + Y_0 + Z_0.$$

Значения интенсивностей B_2 и C_3 для других наборов данных можно рассчитать по выражениям, аналогичным (8), заменяя значения X_i на Y_i или Z_i . Расчетные формулы значений ограничений для второго и третьего вариантов моделей аналогичны, они получаются заменой соответствующих переменных:

$$(11) \quad K_2 = \frac{Y_1 - Y_0}{Y_0 B_2} + X_0 + Y_0 + Z_0 \text{ и } K_3 = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_0 C_3} + X_0 + Y_0 + Z_0.$$

На основании рассматриваемого набора исходных данных можно получить по три варианта оценок коэффициентов моделей (7), которые можно использовать для определения того, в какой мере рассматриваемые модели пригодны для описания анализируемых процессов как взаимосвязанных.

Выявлять взаимосвязанные процессы с использованием предлагаемых моделей можно, применяя пошагово три критерия. При строгой взаимосвязанности процессов в

каждом из критериев должны получаться одинаковые оценки, но в анализе реальных данных оценки будут совпадать лишь с некоторой точностью.

Первый критерий наиболее прост, он вытекает из определения взаимосвязанных процессов, это выполнение равенства оценок ограничений, полученных при использовании трех значений разных процессов $K_1 = K_2 = K_3$. Оценки рассчитываются на основании (10) либо (11).

Второй критерий взаимосвязанности рассматривает возможность прогнозирования значений процессов, не задействованных в первоначальных расчетах. Например, пусть мы получили оценки параметров моделей на основании трех значений первого процесса X_0, X_1, X_2 и двух значений второго процесса Y_0, Y_1 . При строгой взаимосвязанности мы должны получить точное значение Y_2 третьего неиспользованного значения второго процесса, рассчитав его по второму отображению системы (7) на основании параметров B_1 (9) и K_1 (10), полученных с использованием полных данных первого процесса. Если процессы не строго взаимосвязаны, то предсказанное значение

$$\hat{Y}_2 = Y_1 + Y_1 B_1 (K_1 - X_1 - Y_1 - Z_1)$$

и реальное значение второго процесса Y_2 будут отличаться. Тогда расхождение значений, в процентах от реального, можно рассматривать как точность описания процессов предлагаемыми моделями (7), примененными в предположении взаимосвязанности, а именно:

$$(12) \quad \hat{Q}_{1,2} = \frac{Y_2 - \hat{Y}_2}{Y_2} \cdot 100\%,$$

где $\hat{Q}_{1,2}$ – относительная ошибка прогноза, построенного по трем значениям первого процесса и реальному значению второго процесса (в индексе первая цифра означает номер процесса, по которому были просчитаны параметры модели, вторая цифра – номер процесса, значение которого предсказывалось). Аналогичные оценки точности можно получить и для третьего и четвертого процессов. Такие расчеты можно провести еще трижды с использованием в качестве основных по три значения второго, третьего и четвертого процессов. Точность полученных оценок является одним из показателей взаимосвязанности процессов между собой.

Третий критерий связывает параметры одномерных и многомерных моделей процессов в единое целое, позволяя в случае взаимосвязанности рассматривать их как единый комплекс. Такой подход базируется на приводимом ниже доказательстве утверждения, которое для простоты будет рассмотрено для двумерной модели. Доказательства утверждения для моделей большей размерности аналогичны.

Утверждение. *При строгом выполнении условий взаимосвязанности процессов сумма значений ограничений в одномерных моделях равна значению ограничения в многомерных моделях.*

По исходному определению в случае строгой взаимосвязанности процессов $K_1 = K_2 = K$ (процессы развиваются под воздействием одного ограничения, его значения

должны быть равны). Для двумерной модели, аналогичной (7), и одномерных моделей должно выполняться следующее условие:

$$(13) \quad K_X + K_Y = K.$$

Рассмотрим, каково должно быть соотношение значений процессов, чтобы выполнялось условие (13). Для этого запишем условие (13) на основании оценок параметров (4) и аналогичного для второго процесса, а также (10), воспользовавшись для вычисления значения K расчетной формулой для K_1 , скорректированной для двумерного случая:

$$\frac{X_1(X_1 - X_0)^2}{X_1^2 - X_0X_2} + \frac{Y_1(Y_1 - Y_0)^2}{Y_1^2 - Y_0Y_2} + X_0 + Y_0 = \frac{X_1(X_1 - X_0)(X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0)}{X_1^2 - X_0X_2} + X_0 + Y_0.$$

После сокращений и преобразований получим

$$(14) \quad \frac{Y_1(Y_1 - Y_0)}{Y_1^2 - Y_0Y_2} = \frac{X_1(X_1 - X_0)}{X_1^2 - X_0X_2}.$$

Для выполнения равенства (13) необходимо, чтобы для значений процессов выполнялось равенство (14).

По определению для взаимосвязанных процессов можно записать равенство оценок ограничений $K_1 = K_2$ на основании (10) и (11), скорректированных для двумерного случая как

$$\frac{X_1(X_1 - X_0)(X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0)}{X_1^2 - X_0X_2} + X_0 + Y_0 = \frac{Y_1(Y_1 - Y_0)(X_1 - X_0 + Y_1 - Y_0)}{Y_1^2 - Y_0Y_2} + X_0 + Y_0,$$

после сокращений получим равенство

$$\frac{X_1(X_1 - X_0)}{X_1^2 - X_0X_2} = \frac{Y_1(Y_1 - Y_0)}{Y_1^2 - Y_0Y_2},$$

совпадающее с условием (14) для выполнения равенства (13). Таким образом, утверждение о равенстве суммы ограничений одинарных моделей значению ограничения взаимосвязанных процессов для двух процессов доказано. Аналогичную систему доказательств утверждения можно провести и для большего числа взаимосвязанных процессов.

Доказанное утверждение помимо того, что является третьим критерием взаимосвязанности процессов, имеет еще и важные *следствия*. Во-первых, оно позволяет в анализе многомерных взаимосвязанных процессов использовать известные свойства одномерных отображений. Во-вторых, при установленной взаимосвязанности процессов, используя соотношения оценок ограничений в независимых процессах, мы можем понять, как распределяются общие ресурсы по различным процессам.

Рассмотренный комплекс моделей, естественно, не является абсолютно универсальным, но диапазон его корректного использования гораздо шире исходных отображений (7).

4. Выявление взаимосвязанной динамики выручки групп компаний

Для того чтобы количественно оценить степень взаимной сопряженности развития различных групп, необходимо рассмотреть, в какие моменты времени и для каких групп компаний (для каких процессов) выполняются все три критерия взаимосвязанности. С учетом неизбежных случайных отклонений (шума) в предлагаемом анализе эмпирических данных взаимосвязанными рассматриваются процессы, для которых все три критерия выполнялись с двухпроцентной точностью.

Забегаая вперед, отметим, что группа «выше 75-го перцентиля» – априорно самый вероятный кандидат на роль фирм-новаторов в шумпетерианском «созидательном разрушении» – не выполняла перечисленные критерии взаимосвязанности даже самым приблизительным образом (скажем, не с двухпроцентной точностью, а с расхождениями в двадцать процентов), причем ни в один из временных отрезков. То есть о взаимозависимости развития этой группы с другими группами фирм говорить не приходится. На примере этой группы мы не наблюдаем явных признаков «созидательного разрушения» в посткризисном развитии российских компаний.

Однако прежде чем пытаться интерпретировать этот, на наш взгляд, центральный результат анализа, необходимо выяснить, наблюдалось ли вообще на эмпирическом материале взаимосвязанное развитие процессов? Выполняются ли обоснованные выше критерии взаимосвязанности хоть для каких-то групп фирм в отдельные интервалы времени? Объектом для соответствующего анализа изберем три оставшиеся группы компаний кроме группы «выше 75-го перцентиля»⁴.

Первый критерий заключается в выполнении условия $K_1 = K_2 = K_3$. Результаты расчетов оценок ограничений и их отклонений от медианы приведены в табл. 3. Расхождения оценок ограничений каждой из моделей ΔK_i вычисляются как процент отклонения от медианы оценок ограничений трех процессов K_i .

Как видно из табл. 3, в 2009 г. оценки ограничений роста по моделям (940,1–946,3–939,2) для трех групп компаний были исключительно близки. Еще ближе они оказались в следующем, 2010 г. (971,4–971,0–970,7). Напомним, что в основе всех наших расчетов, в том числе и этих цифр, лежат существенно отличающиеся, как по абсолютной величине (табл. 1), так и по динамике (рис. 1) данные о медианной выручке разных групп компаний. Маловероятно, что оценки ограничений моделей практически сошлись в силу случайности. Ведь в относительных измерениях (см. три правые столбца табл. 3) при всех трех альтернативных вариантах расчетов моделей за 2009 и 2010 гг. по каждой из групп компаний отклонение оценок ограничений меньше одного процента, что соответствует требованиям по точности для выполнения первого критерия взаимосвязанности. Для этого периода три процесса являются кандидатами для дальнейшего оценивания на взаимосвязанность.

Помимо данных, приведенных в табл. 3, были проведены расчеты и по другим комбинациям процессов, они не приводятся в силу ограниченного объема статьи, но в проведенном далее анализе рассматриваются основные результаты всех расчетов по всем вари-

⁴ Ниже мы обсудим тот факт, что группа «выше 75-го перцентиля» явно стоит наособицу в сравнении с другими группами, тогда как три остальные группы демонстрируют общие черты развития.

антам моделей. Еще раз оговорим, что для группы компании «более 75-го перцентиля» не выявилось ситуаций взаимосвязанности с другими группами (процессами).

Таблица 3.

Критерий 1. Расчеты отклонения оценок ограничений моделей от медианы при последовательном использовании трех значений каждого из процессов*

Годы	K_1	K_2	K_3	Расхождение оценок ограничений модели «менее 25» $\Delta K_1, \%$	Расхождение оценок ограничений модели «50-25» $\Delta K_2, \%$	Расхождение оценок ограничений модели «75-50» $\Delta K_3, \%$
2008	1701,4	1784,4	1138,4	0,0	4,9	-33,1
2009	940,1	946,3	939,2	0,0	0,7	-0,1
2010	971,4	971,0	970,7	0,0	0,0	0,0
2011	Значительное изменение тенденции					
2012	1392,5	1606,3	1613,6	-13,3	0,0	0,5
2013	1393,2	1626,3	1698,0	-14,3	0,0	4,4
2014	Значительное изменение тенденции					
2015	1510,9	1616,7	1720,5	-6,5	0,0	6,4

* Процесс 1 – типичная компания группы «менее 25-го перцентиля»; процесс 2 – типичная компания группы «50-25 перцентиля»; процесс 3 – типичная компания группы «75-50 перцентиля». В таблице и далее в тексте использованы сокращенные названия групп, без слова «перцентиль».

Источники: база данных «СПАРК-Интерфакс», расчеты авторов.

Рассмотрим второе условие взаимосвязанности процессов по точности предсказаний неиспользуемых в первоначальных расчетах значений процессов. Расчетные формулы для определения расхождения предсказанных и реальных значений процессов (7)–(12) и аналогичные им получены в предположении строгой взаимосвязанности трех процессов.

В табл. 4 представлены лишь ячейки, где выполнен первый критерий взаимосвязанности (2009 и 2010 гг.). Общим итогом расчетов можно считать то, что второй критерий прогнозирования обеспечивается с точностью лучше 2%, т.е. выводы, полученные с использованием первого критерия, получают подтверждение, и с помощью этой методики расчета в обсуждаемые периоды времени динамика групп компаний указывает на взаимосвязанный характер их развития.

Рассмотрим, как выполняется третий критерий взаимосвязанности процессов, заключающийся в том, что сумма оценок ограничений базовых моделей должна равняться среднему значению ограничения в многомерных моделях. Сравним совпадение средних оценок ограничений в моделях трех процессов и суммы оценок ограничений базовых моделей. Результаты сравнений представлены в табл. 5.

Таблица 4.

**Критерий 2. Оценки точности прогноза третьих значений процессов
на основании расчетов по моделям полных данных другого процесса,
в % от действительного значения**

Годы	Расчет по полным данным третьего процесса («75-50»)		Расчет по полным данным второго процесса («50-25»)		Расчет по полным данным первого процесса («менее 25»)	
	расхождение $\hat{Q}_{3,2}$ процесса «50-25»	расхождение $\hat{Q}_{3,1}$ процесса «менее 25»	расхождение $\hat{Q}_{2,3}$ процесса «75-50»	расхождение $\hat{Q}_{2,1}$ процесса «менее 25»	расхождение $\hat{Q}_{1,3}$ процесса «75-50»	расхождение $\hat{Q}_{1,2}$ процесса «50-25»
2009	1,6	0,2	-1,7	-1,5	-0,2	1,4
2010	0,4	1,1	-0,4	0,7	-1,1	-0,6

Источники: база данных «СПАРК-Интерфакс», расчеты авторов.

Таблица 5.

**Критерий 3. Сравнение сумм ограничений (потенциалов роста выручки)
базовых моделей со средним значением ограничения
в моделях трех взаимосвязанных процессов**

Годы	Ограничения (потенциалы роста выручки) процессов по базовым одномерным моделям, млн руб.				Среднее значение ограничения по трехмерным моделям, млн руб.
	модель «75-50»	модель «50-25»	модель «менее 25»	сумма ограничений по базовым моделям, млн руб.	
2009	184,7	291,4	465,7	941,8	941,9
2010	190,6	299,5	481,1	971,2	971,0

Источники: база данных «СПАРК-Интерфакс», расчеты авторов.

Как видим, критерий взаимосвязи для трех групп компаний выполняется с очень высокой точностью, и при использовании третьего независимого метода оценки сумма ограничений базовых моделей отличается от среднего значения ограничений моделей взаимосвязанности на 0,1 млн руб. в 2009 г. (941,8–941,9) и 0,2 млн руб. (971,2–971,0) в 2010 г. – расхождения составляют сотые доли процента. В целом на основании использования всех трех критериев можно сделать вывод, что перед нами взаимосвязанные процессы, т.е. развитие трех рассмотренных групп компаний опиралось на одну и ту же общую ресурсную базу.

Итак, для двух «скользящих трехлетних окон» мы выявили четкую, прослеживаемую с высокой точностью по каждому из критериев взаимосвязь трех групп компаний (процессов). В содержательном плане эта взаимосвязь, как представляется, состояла в не-

избежном усилении «борьбы за общую кормовую базу» во время кризиса 2008–2009 гг. и «отскока» экономики после него. Сжатие совокупного спроса, а потом восстановление его пострадавших сегментов (отложенный спрос и т.п.) обострило конкуренцию большей части российских фирм, прежде обслуживавших соответствующие сегменты рынка. Неслучайно взаимосвязанное развитие в это время показали три, а не все четыре исследуемые группы фирм. На тот момент маленькие и слабые фирмы, входившие группу «более 75 перцентилей», в отличие от прочих компаний не были сильно завязаны на восстановлении бизнеса старого типа (старые ограничения), а искали новые пути. Разберемся с ними подробнее.

Если модель правильно описывает ситуацию, то, вероятно, должны существовать зримые признаки взаимосвязей и независимостей процессов в разные времена. Чтобы выявить их, нормируем медианы выручки из табл. 1 для каждого процесса, взяв за единицу значения 2007 г. (см. рис. 2). Эта точка отсчета привлекательна тем, что именно в «окнах» за 2007–2009 и 2008–2010 гг. были выявлены взаимосвязанные процессы в трех группах компаний из четырех. Логично попробовать разобраться, чем отличается динамика, диагностируемая моделями как взаимосвязанная, от динамики таковой непризнаваемой. Для этого приведены два рисунка, представляющие динамику групп (за единицу приняты значения 2007 г.), но в разном масштабе: на втором рисунке масштаб увеличен, чтобы была видна динамика группы «более 75 перцентилей», медианная выручка которой в первые годы изучаемого периода крайне мала.

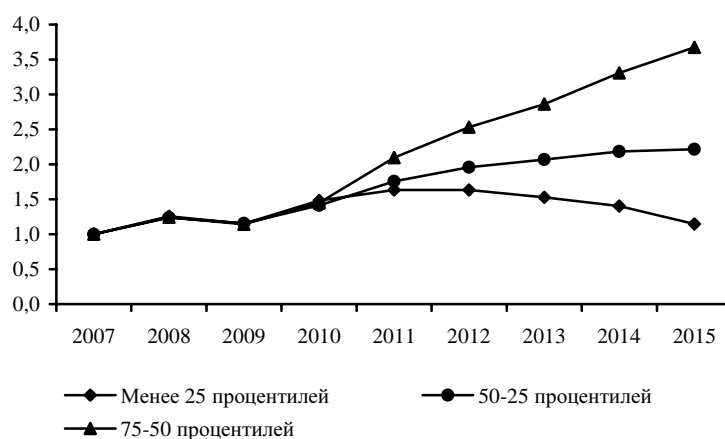


Рис. 2. Динамика нормированной выручки медианных компаний по группам фирм с взаимосвязанными процессами «менее 25», «50–25», «75–50»

На рис. 2 представлены нормированные выручки трех групп фирм, т.е. всех, кроме самой динамичной. Начиная с 2011 г. их траектории предсказуемым образом расходятся, что предопределено процедурой отбора фирм в группы по темпам их роста за 2011–2015 гг. Не предопределено процедурой другое: четыре года с 2007 г. по 2010 г. у всех трех групп наблюдается схожее почти до степени слияния совпадение значений. Складывается впечатление, что их динамика так похожа потому, что находится под воздействием одних и

тех же ограничений. Но это именно тот период взаимосвязанной динамики трех процессов, который выявлен выше с помощью комплекса нелинейных моделей.

Обратимся теперь к рис. 3, на котором добавлена динамика четвертой группы компаний «более 75» (по сравнению с рис. 2, на рис. 3 представлен меньший участок изображения, чтобы лучше показать отличия кризисной динамики разных групп компаний).

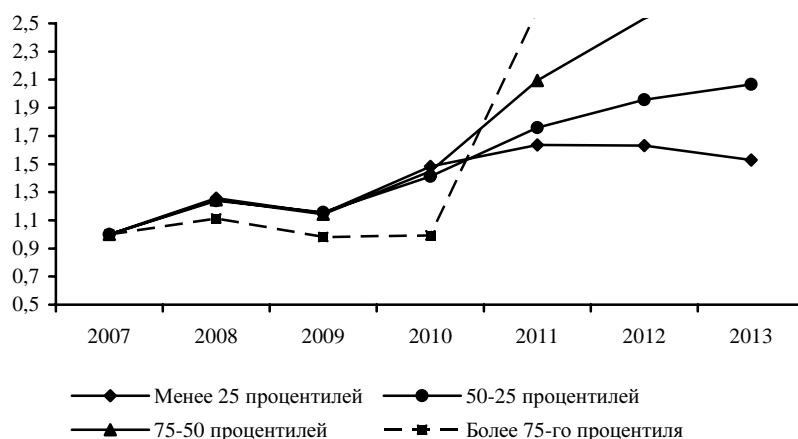


Рис. 3. Динамика нормированной выручки медианных компаний по всем группам фирм, включая несвязанную группу «более 75»

Динамика группы «более 75» совсем другая, чем у прочих групп. И в кризисный 2009 г., и 2010 г. «отскока» нормированная выручка устойчиво держится на точно том же уровне (0,98 и 0,99 соответственно), на котором была в 2007 г. А потом «выстреливает» вверх, за один 2011 г. увеличившись в 2,61 раза, т.е. много сильнее, чем выросла выручка прочих групп за весь послекризисный период. Обратим внимание также на то, что в этот год, переломный для динамики группы «более 75», медианная выручка других групп также активно росла, не демонстрируя видимых признаков «разрушения».

Представляется, что перед нами последствия эффективной адаптации группы «более 75» к новым, посткризисным условиям: тот, кто был хуже всех в докризисной динамике, стал (с опозданием на год, вероятно, вызванным затратами времени на перестройку бизнеса, – в литературе уже описана эта пауза или даже свертывание бизнес-активности, наступающие перед началом фазы быстрого роста компаний, см.: [Баранова, 2017]) лидером посткризисного роста. В самой динамичной группе «более 75» объединены фирмы, которые нашли некую новую бизнес-модель, обеспечивающую возможность активного роста, как в посткризисных условиях, так и после введения санкций. Это быстроразвивающиеся компании, которые по своей динамике напоминают «газелей» [Полунин, Юданов, 2016]. Там, правда, другие, более высокие по темпам и устойчивости роста критерии, но структура жизненного цикла во многом схожа. А именно, сверхбыстрый рост связан с выявлением или созданием новой, ранее никем не разрабатывавшейся ниши. Неслучайно модели не выявляют взаимосвязанности развития группы «более 75» ни с одной из других групп – предположительно они обслуживают несвязанные сегменты спроса.

5. Заключение

Подводя итоги работы, сформулируем основные выводы по поводу того конкретного объекта исследования, на примере которого демонстрировалась предлагаемая исследовательская методика.

1. Подтверждено на высоком уровне точности наличие взаимосвязи динамики выручки основных групп российских компаний в период кризисного сжатия и послекризисного восстановления. Они сталкивались с общими ограничениями спроса, демонстрируя остроту конкурентных отношений, в более спокойные времена не наблюдаемую. Представляется, что было бы затруднительно выявить эту закономерность традиционными методами. Обычная ориентация моделей на охват полной длительности временного ряда хуже приспособлена к выявлению периодов активного взаимодействия процессов, чем использованный нами инструмент отслеживания изменений параметров моделей при переходе от одного «скользящего временного окна» к следующему.

2. Рост наиболее динамичной части российских фирм в послекризисно-санкционную эпоху в большей степени указывает на «неразрушающее созидание», чем на «созидательное разрушение». Фирмы-новаторы, как представляется, ориентировались на иных потребителей и/или иные цели потребления, чем фирмы-консерваторы. В результате первые скорее создавали новые рынки, чем отбирали их у вторых.

3. Очевидной повесткой дальнейшего исследования может стать выяснение того, насколько часто и в какой степени инновационное созидание вызывает в экономике разрушение прежних бизнесов, а в какой происходит в иной плоскости, не затрагивая (либо затрагивая в малой степени) сложившиеся бизнесы.

Так, волна импортозамещения породила ряд инновационных, ранее отсутствовавших в нашей стране производств. Мы имеем в виду не только последствия санкций и контрсанкций, но и вытеснение иностранных товаров из-за девальвации рубля. Импортозамещение открыло дорогу для быстрого роста многих инновационных фирм. Подключение к крупным государственным проектам также часто открывает путь и к инновациям, и к быстрому росту (см., например: [Юданов, Яковлев, 2018]), но не имеет значимой разрушительной составляющей. Крымский мост, например, создал в стране принципиально новую подотрасль крупномасштабного мостостроения, с нуля разработавшую ряд инновационных решений, но не уничтожил других строительных бизнесов. Еще один сюжет связан с тем, что обнаруженная аномалия вполне может быть трансформационным эффектом. Одной из черт плановой экономики, бесспорно, была принудительно спартанская бедность ассортимента. Насыщение незанятых в силу этого ниш – растянутый во времени и неоднородный в секторальном отношении процесс, отнюдь не завершившийся с появлением кажущегося рыночного разнообразия. Общее изобилие вариантов не гарантирует наличие востребованных в конкретных ситуациях версий. Переход экономики к длительному периоду кризисно-санкционного развития вполне мог спровоцировать очередную тур насыщения рынка. Подробнее о том, что процесс трансформации привел к появлению в России отсутствовавшей ранее «продукции в целом более высокого качества, более широкой номенклатуры», см.: [Баранов, Бессонов, 2018, с. 155]. Мысль о том, что вообще в постсоциалистических экономиках «на переходном этапе новые фирмы не только вытесняют отставших фирм-старожилов (obsolete incumbents), но и заполняют новые рынки, которые в прошлом либо отсутствовали, либо были слабо населены фирмами»,

т.е. осуществляют инновации, не ведущие к созидательному разрушению, высказана также в работе [Bartelsman, Haltiwanger, Scarpetta, 2004, p. 15]. Другими словами, возможно, отсутствие созидательного разрушения в отечественной экономике объясняется обилием возможностей экстенсивного, а не интенсивного роста. Прояснить этот вопрос поможет лишь моделирование на материалах других постсоветских стран – нужда в такого рода работах представляется очевидной. Главной целью статьи была, однако, более общая задача – апробация возможности комплексов моделей нелинейной динамики.

4. Предлагаемый комплекс моделей на базе нелинейных отображений проявил себя как работоспособный инструмент анализа нелинейных социально-экономических процессов, развивающихся в условиях ограничений. Использование его для анализа динамики выручки российских компаний за период с 2006 г. по 2015 г. позволило выявить и объяснить общие закономерности и индивидуальные особенности динамики разных групп компаний. Примерами других социальных процессов, для исследования которых перспективен предлагаемый комплекс моделей, являются процессы формирования общественного мнения в ходе выборов или референдумов [Полунин, 2003]. Аналогичные процессы также развиваются в Интернете, скажем, в ходе дискуссий или при проведении рекламных компаний. Возможно описывать и анализировать динамику конкурирующих биржевых процессов, развивающихся с использованием ограниченных ресурсов. Перспективной представляется возможность описывать и анализировать предлагаемыми моделями динамику индексов стран.

5. В дальнейшем, анализируя оценки точности описания взаимосвязанности моделями, перспективным представляется оценивать степень взаимосвязи по отношению к траекториям, а не отдельным значениям параметров. Однако такой подход требует дополнительной теоретической проработки.

6. Особенно продуктивной может оказаться информация о взаимосвязанности процессов, если один из них используется как управляющий. В этом случае на оценки взаимосвязанности надо смотреть как на оценки возможности эффективного управления. Предлагаемый подход позволяет реализовать оперативный анализ изменений, что особенно важно в настоящее время из-за повсеместного влияния ситуации с COVID 19.

* *

*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Структуры и хаос в нелинейных средах. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.

Баранов Э.Ф., Бессонов В.А. Взгляд на российскую экономическую трансформацию // Вопросы экономики. 2018. № 11. С. 142–158.

Баранова Е.И. Опыт эмпирического определения цикла жизни фирмы // Экономика. Налоги. Право. 2017. Т. 10. № 3. С. 92–105.

Катуков Д.Д., Малыгин В.Е., Смородинская Н.В. Фактор созидательного разрушения в современных моделях и политике экономического роста // Вопросы экономики. 2019. № 7. С. 95–118.

Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. Бифуркации отображений. Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2012.

- Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Научная книга, 2010.
- Малинецкий Г.Г. Математические основы синергетики: Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. Изд. 8-е. М.: Изд. Группа URSS, 2017.
- Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1993.
- Полунин Ю.А. Нелинейная динамика конкурирующих идей. Модель формирования общественного мнения. Сценарии. Проблемы прогноза // Сборник научных трудов «Социальная синергетика: предмет, актуальные проблемы, поиски решения». Йошкар-Ола: МарГТУ, 2003. С. 277–290.
- Полунин Ю.А. Синтез методов нелинейной динамики и регрессионного анализа для исследования социально-экономических процессов // Проблемы управления. 2019. № 1. С. 32–44.
- Полунин Ю.А. Выявление взаимосвязей нелинейных процессов по эмпирическим данным // Труды XIII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2019. М.: ИПУ РАН, 2019. С. 2224–2227.
- Полунин Ю.А., Юданов А.Ю. Российские быстрорастущие компании: испытание депрессией // Мир новой экономики. 2016. № 2. С. 103–112.
- Полунин Ю.А., Юданов А.Ю. Темпы роста компаний и заполнение рыночной ниши // Проблемы прогнозирования. 2020. № 2. С. 101–112.
- Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000.
- Садченко К.В. Законы экономической эволюции. Серия «Учебники МГУ им. М.В. Ломоносова». М.: Дело и сервис, 2007.
- Сморodinская Н.В., Катукон Д.Д., Малыгин В.Е. Шумпетерианская теория роста в контексте перехода экономических систем к инновационному развитию // Journal of Institutional Studies (Журнал институциональных исследований). 2019. Т. 11. № 2. С. 60–78.
- Фейгенбаум М.Ж. Универсальность в поведении нелинейных систем: Пер. С.Г. Тиходеева // Успехи физических наук. 1983. Т. 141. Вып. 2. С. 343–374.
- Хайек Ф.А. Индивидуализм и экономический порядок: Пер. с англ. Челябинск: Социум, 2011.
- Шрагенхайм Э. Управленческие дилеммы: Теория ограничений в действии: Пер. с англ. М.: Альпина Бизнес Букс, 2007.
- Шумпетер Й.А. Капитализм, Социализм и Демократия: Пер. с англ. / Предисл. и общ. ред. В.С. Автономова. М.: Экономика, 1995.
- Юданов А.Ю., Яковлев А.А. «Неортодоксальные» быстрорастущие фирмы-«газели» и порядок ограниченного доступа // Вопросы экономики. 2018. № 3. С. 80–101.
- Acemoglu D., Akcigit U., Alp H., Bloom N., Kerr W. Innovation, Reallocation, and Growth // The American Economic Review. 2018. Vol. 108. № 11. P. 3450–3491.
- Aghion P., Howitt P. A Model of Growth through Creative Destruction // Econometrica. 1992. Vol. 60. № 2. P. 323–351.
- Banerjee R.N., Hofmann B. The Rise of Zombie Firms: Causes and Consequences // BIS Quarterly Review. 2018. September. P. 67–78.
- Bartelsman E.J., Haltiwanger J., Scarpetta S. Microeconomic Evidence of Creative Destruction in Industrial and Developing Countries: IZA Discussion Paper № 1374 – The World Bank Policy Research Working Paper № 3464. 2004. P. 15.
- Coad A. Testing the Principle of «Growth of the Fitter»: The Relationship between Profits and Firm Growth // Structural Change and Economic Dynamics. 2007. Vol. 18. № 3. P. 370–386.
- Dosi G., Pugliese E., Santoleri P. Growth and Survival of the «Fitter»? Evidence from US New-born Firms: LEM Working Paper Series. № 2017/06. Pisa: Scuola Superiore Sant'Anna, Laboratory of Economics and Management (LEM). (<http://hdl.handle.net/10419/174556>)
- EBRD. Transition Report 2017–2018: Sustaining Growth. London: European Bank for Reconstruction and Development.

GEM. Global Entrepreneurship Monitor 2017/18 Global Report. Global Entrepreneurship Research Association (GERA). 2018.

Verhulst P.F. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population // Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles. 1845. N° 18. P. 14–54.

Method for Analyzing Economic Processes in Conditions of Instability (on the Example of Analyzing the Dynamics of Revenue of Russian Companies)

Yuri Polunin¹, Andrei Yudanov²

¹ V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences,
65, Profsoyuznaya St., Moscow, 117341, Russian Federation.
E-mail: yplnn@yandex.ru

² Financial University under the Government of the Russian Federation,
49, Leningradsky Prospekt, Moscow, 125993, Russian Federation.
E-mail: yudanov@yandex.ru

New methods are proposed that allow using the properties of nonlinear dynamics models to analyze the dynamics of real socio-economic processes. For this, a complex of models has been developed in the form of connected nonlinear one-dimensional and multidimensional mappings that meet the general laws of socio-economic processes – development in a rapidly changing environment under resource constraints. The proposed set of models allows you to analyze the dynamics of processes under the assumptions of both their independence and interconnection with each other. The definition of interrelated processes is introduced as processes developing under conditions of general constraints. Three criteria are proposed for identifying interrelated processes based on empirical data. In the case of interrelation of processes, the parameters of one-dimensional and multidimensional models are also interrelated, which allows a deeper analysis of the situations under consideration. The use of the proposed method is demonstrated by the example of analyzing the dynamics of revenue of Russian companies in the period from 2006 to 2015 (38 thousand companies in total). All companies were divided into four groups, depending on the rate of revenue growth from 2010 to 2015. The hypothesis of a possible relationship between the decline of one and the parallel strengthening of another group of Russian firms after the crisis of 2008–2009 is investigated and rejected. Innovative firms that boosted their revenue growth potential after the crisis were targeting markets other than conservative firms whose revenue growth potential was exhausted after the crisis. The peculiarities of the dynamics of revenue of groups of companies are visually presented in the form of normalized values, when the median estimates of each of the groups in 2007 are taken as a unit.

Key words: time series; nonlinear processes; mappings as models of nonlinear dynamics; creative destruction; resource reallocation.

JEL Classification: O12, O33, C220, C510, C650.

* *
*

References

- Acemoglu D., Akcigit U., Alp H., Bloom N., Kerr W. (2018) Innovation, Reallocation, and Growth. *The American Economic Review*, 108, 11, pp. 3450–3491.
- Aghion P., Howitt P.A. (1992) Model of Growth through Creative Destruction. *Econometrica*, 60, 2, pp. 323–351.
- Akhromeeva T.S., Kurdyumov S.P., Malinetskiy G.G., Samarskiy A.A. (2007) *Struktury i khaos v nelineynykh sredakh* [Structures and Chaos in Nonlinear Environments]. Moscow: FIZMATLIT. (in Russian)
- Banerjee R.N., Hofmann B. (2018) The Rise of Zombie Firms: Causes and Consequences. *BIS Quarterly Review*, September, pp. 67–78.
- Baranov E.F., Bessonov V.A. (2018) Vzgl'yad na rossiyskuyu ekonomicheskuyu transformatsiyu [A View at the Russian Economic Transformation]. *Voprosy Ekonomiki*, 11, pp. 142–158. (in Russian)
- Baranova E.I. (2017) Opyt empiricheskogo opredeleniya tsikla zhizni firmy [Experience of Empirical Estimation of the Company Life Cycle]. *Economics, Taxes & Law*, 10, 3, pp. 92–105. (in Russian)
- Bartelsman E.J., Haltiwanger J., Scarpetta S. (2004) *Microeconomic Evidence of Creative Destruction in Industrial and Developing Countries*. IZA Discussion Paper no 1374 – The World Bank Policy Research Working Paper no 3464.
- Coad A. (2007) Testing the Principle of ‘Growth of the Fitter’: The Relationship between Profits and Firm Growth. *Structural Change and Economic Dynamics*, 18, 3, pp. 370–386.
- Dosi G., Pugliese E., Santoleri P. (2017) *Growth and Survival of the «Fitter»? Evidence from US New-born Firms*. LEM Working Paper Series. no 06. Pisa: ScuolaSuperioreSant'Anna, Laboratory of Economics and Management (LEM). Available at: <http://hdl.handle.net/10419/174556>
- EBRD. *Transition Report (2017–18) Sustaining Growth*. London: European Bank for Reconstruction and Development.
- Feigenbaum M.J. (1978) Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19, pp. 25–52.
- Feigenbaum M.J. (1979) The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations. *Journal of Statistical Physics*, 21, pp. 669–706.
- GEM. Global Entrepreneurship Monitor (2017/18) *Global Report. Global Entrepreneurship Research Association* (GERA).
- Hayek F.A. (2011) *Individualizm i ekonomicheskiy poryadok* [Individualism and Economic Order.] Cheljabinsk: Sozium. (in Russian)
- Katukov D.D., Malygin V.E., Smorodinskaya N.V. (2019) Faktor sozidatel'nogo razrusheniya v sovremennykh modelyakh i politike ekonomicheskogo rosta [The Factor of Creative Destruction in Modern Economic Growth Models and Growth Policy]. *Voprosy Ekonomiki*, 7, pp. 95–118. (in Russian)
- Kuznetsov A.P., Savin A.V., Sedova Yu.V., Tyuryukina L.V. (2012) *Bifurkatsii otobrazheniy* [Bifurcations of Mappings]. Saratov: Science. (in Russian)
- Kuznetsov A.P., Savin A.V., Tyuryukina L.V. (2010) *Vvedeniye v fiziku nelineynykh otobrazheniy* [Introduction to the Physics of Nonlinear Mappings]. Saratov: Scientific Book. (in Russian).
- Malinetskiy G.G. (2017) *Matematicheskiye osnovy sinergetiki: Khaos. Struktury. Vychislitel'nyy eksperiment*. [Mathematical Foundations of Synergetics: Chaos. Structures. Computational Experiment]. URSS Publishing Group. (in Russian)
- Peitgen H.-O., Richter P.H. (1986) *The Beauty of Fractals*. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Polunin Yu.A. (2003) Nelineynaya dinamika konkuriruyushchikh idey. Model' formirovaniya obshchestvennogo mneniya. Stsenarii. Problemy prognoza [Non-linear Dynamics of Competing Ideas. The Model of Public Opinion Formation. Scenarios Problems of Forecasting]. *Collection of Scientific Papers «Social*

Synergetics: Subject, Current Problems, Search for Solutions», Yoshkar-Ola: MarSTU, pp. 277–290. (in Russian)

Polunin Yu.A. (2019) Sintez metodov nelineynoy dinamiki i regressionnogo analiza dlya issledovaniya sotsial'no-ekonomicheskikh protsessov [Synthesis of Nonlinear Dynamics Methods and Regression Analysis for the Research of Socio-economic Processes]. *Control Sciences*, 1, pp. 32–44. (in Russian)

Polunin Yu.A. (2019) Vyyavleniye vzaimosvyazey nelineynykh protsessov po empiricheskim dannym [Identification of the Relationship of Nonlinear Processes according to Empirical Data]. *Proceedings of the Meeting on the Control Sciences VSPU-2019*, pp. 2224–2227. (in Russian)

Polunin Yu.A., Yudanov A.Yu. (2016) Rossiyskiye bystrorastushchiye kompanii: ispytaniye depressiyey [Russia's High-growth Companies: tested through Depression]. *The World of New Economy*, 2, pp. 103–112. (in Russian)

Polunin Yu.A., Yudanov A.Yu. (2020) Growth Rates of Companies and Filling of a Market Niche. *Studies on Russian Economic Development*, 31, 2, pp. 202–211.

Sadchenko K.V. (2007) *Zakony ekonomicheskoy evolyutsii* [Laws of Economic Evolution]. Delo and Service. (in Russian).

Schragenheim E. (1998) *Management Dilemmas: The Theory of Constraints Approach to Problem Identification and Solutions*. CRC Press.

Schumpeter J. (1995) *Capitalism, Socialism and Democracy*. Moscow: Ekonomika. (in Russian)

Smorodinskaya N.V., Katukov D.D., Malygin V.E. (2019) Shumpeterianskaya teoriya rosta v kontekste perekhoda ekonomicheskikh sistem k innovatsionnomu razvitiyu [Schumpeterian Growth Theory in the Context of the Innovation-led Transition of Economies]. *Journal of Institutional Studies*, 11, 2, pp. 60–78. (in Russian)

Puu T. (1997) *Nonlinear Economic Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag.

Verhulst P.F. (1845) Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 18, pp. 14–54.

Yudanov A.Yu., Yakovlev A.A. (2018) «Neortodoksal'nyye» bystrorastushchiye firmy-«gazeli» i poryadok ogranichenogo dostupa [«Unorthodox» Fast-growing Firms (Gazelles) and North's Limited access Order]. *Voprosy Ekonomiki*, 3, pp. 80–101. (in Russian)