

## Кривые доходностей на низколиквидных рынках облигаций: особенности оценки

Макушкин М.С., Лапшин В.А.

Существует множество моделей оценки кривой бескупонных доходностей облигаций. Эти модели хорошо подходят для развитых рынков, где обращается большое число ликвидных выпусков. Однако на развивающихся рынках ситуация с ликвидностью облигаций обстоит сложнее. Облигации торгуются в неоднородных объемах, в данных по котировкам часто встречаются пропуски, а иногда на рынке просто нет достаточного количества выпусков для оценки срочной структуры процентных ставок.

Мы приводим обзор существующих и теоретически возможных решений проблем, возникающих при оценке кривой бескупонных доходностей на развивающихся рынках. Наш обзор показывает, что все перечисленные особенности развивающихся рынков могут быть преодолены, если адаптировать модель оценки кривой под наблюдаемый уровень ликвидности.

Проблема неоднородной ликвидности решается удалением наблюдений с атипичным объемом торгов или добавлением весов в оптимизационный функционал модели. Проблему пропусков в данных можно решить за счет восстановления пропущенных значений либо за счет динамического обновления параметров кривой. Проблему недостаточного количества можно преодолеть путем упрощения модели оценки кривой и использования данных со смежных рынков.

Выводы обзора могут быть полезны для оценки кривой бескупонных доходностей на развивающихся рынках и на рынках облигаций с низкой ликвидностью. Они также служат отправной точкой для дальнейших эмпирических исследований, посвященных данной тематике.

**Ключевые слова:** кривая бескупонной доходности; срочная структура процентных ставок; рынок облигаций; метод Нельсона – Зигеля; ликвидность рынка; пропуски в данных; развивающиеся рынки.

**DOI:** 10.17323/1813-8691-2021-25-2-177-195

---

**Макушкин Михаил Сергеевич** – стажер-исследователь Лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту Научно-исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: mmakushkin@hse.ru

**Лапшин Виктор Александрович** – к.ф.м.н., доцент Школы финансов Научно-исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: vlapshin@hse.ru

Статья получена: 05.02.2021/Статья принята 10.05.2021.

**Для цитирования:** Макушкин М.С., Лапшин В.А. Кривые доходностей на низколиквидных рынках облигаций: особенности оценки. Экономический журнал ВШЭ. 2021; 25(2): 177–195.

**For citation:** Makushkin M.S., Lapshin V.A. Yield Curve Estimation in Illiquid Bond Markets, *HSE Economic Journal*. 2021; 25(2): 177–195. (In Russ.)

## Введение

Оценка срочной структуры процентных ставок является важной задачей сразу для нескольких областей экономики и финансов. К их числу принадлежат управление рисками, ценообразование финансовых инструментов, оценка инвестиционных проектов, макроэкономический анализ, а также многое другое.

Обычно срочную структуру ставок отображают с помощью кривой бескупонных доходностей. Она показывает стоимость заемных средств в зависимости от срочности. К сожалению, кривая бескупонных доходностей не наблюдается на рынке напрямую. Ее необходимо оценивать. В финансовой литературе в различные годы было предложено множество методов для построения такой кривой. Все они имеют общий принцип – информация о ненаблюдаемой кривой бескупонных доходностей извлекается из наблюдаемых рыночных данных.

Классические исследования на тему оценки кривой бескупонных доходностей посвящены развитым рынкам. Эти рынки высоколиквидны, на них достаточно легко получить качественные рыночные данные. Поэтому традиционные работы по срочной структуре процентных ставок концентрируются в основном на моделях оценки кривой бескупонных доходностей. Обзор таких моделей можно найти, например, в работе [Лапшин, Терещенко, 2018].

В последние годы наблюдается интерес к теме оценки срочной структуры процентных ставок на развивающихся рынках. Это объясняется быстрым развитием в них финансового сектора. На развивающихся рынках ситуация с ликвидностью, как правило, хуже. Качество и полнота рыночной информации здесь является ключевым вопросом, а модельная составляющая отходит на второй план.

Мы даем обзор существующих и потенциально возможных решений проблемы качества и полноты данных при построении кривой бескупонных доходностей на развивающихся рынках. Вслед за Гамбаровым и др. (2004), мы выделяем три типа проблем с данными по торгам облигациями: неоднородная ликвидность, пропуски в данных, малое количество обращающихся выпусков. Каждой проблеме мы сопоставляем несколько вариантов возможных решений с опорой на академическую литературу и рыночные практики.

Обзор показывает, что все эти проблемы можно в той или иной степени решить, модифицировав классические модели оценки кривой бескупонных доходностей. Проблема неоднородной ликвидности на практике решается удалением наблюдений с атипичным объемом торгов или добавлением весов в оптимизационный функционал модели. Проблему пропусков в данных можно решить либо за счет динамического обновления параметров кривой, либо за счет восстановления пропущенных значений. Проблему недостаточного количества можно преодолеть путем упрощения модели оценки кривой и использования данных со смежных рынков.

Выводы обзора могут быть полезны для оценки кривой бескупонных доходностей на развивающихся рынках и на рынках облигаций с низкой ликвидностью. Они также могут служить отправной точкой для дальнейших эмпирических исследований, посвященных данной тематике.

### Модели оценки срочной структуры процентных ставок

Кривая бескупонных доходностей – это графический способ отображения срочной структуры процентных ставок. Она показывает, как стоимость денег зависит от срочности. Кривая бескупонных доходностей не наблюдается на рынке напрямую. Однако информацию о ней можно получить из наблюдаемых котировок ликвидных рыночных инструментов.

Кривая бескупонных доходностей может извлекаться из различных рыночных инструментов. Это зависит от цели, для которой она применяется [Курбангалеев, Лапшин, 2015]. На развивающихся фондовых рынках наиболее ликвидным сегментом является, как правило, рынок государственного долга. Поэтому для извлечения информации о срочной структуре процентных ставок на развивавшихся рынках обычно используются именно данные с рынка суверенных облигаций. Такой подход в литературе был использован для следующих рынков: Индия [Dutta et al., 2005; Subramanian, 2001], Китай [Xie et al., 2006], Чили [Cortazar et al., 2007], Бразилия [Luiz, Ribeiro, 2008], Тайвань [Chou et al., 2009], Хорватия [Zoricic, Orsag, 2013], Тунис [Chakroun, Abid, 2014], Кения [Muthoni et al., 2015], Малайзия [Ali et al., 2015], Армения [Poghosyan, Poghosyan, 2019], Казахстан [Хакимжанов и др., 2019], Венгрия [Nagy, 2020] и др.

Кривая бескупонных доходностей, построенная на основе цен суверенных облигаций, показывает рыночную стоимость заемных средств для заемщика с нулевым уровнем кредитного риска. Кредитное качество заемщика обычно учитывают отдельно, при помощи вспомогательной модели кредитного спреда. Полученная кривая подходит для целей работы с долговыми инструментами – кредитами, депозитами, облигациями и т.д.

Модели срочной структуры процентных ставок можно разделить на три большие категории – параметрические [Nelson, Siegel, 1987; Svensson, 1994], сплайновые [McCulloch, 1971] и методы последовательного определения процентных ставок (далее мы будем пользоваться термином «бутстрэп» ввиду отсутствия краткого русскоязычного аналога) [Fama, Bliss, 1987]. Помимо этого, существуют модели коротких ставок и безарбитражные модели [Vasicek, 1977].

На развивающихся рынках обычно используются параметрические модели. Они могут быть удобно оценены в условиях небольшого количества наблюдений. Так, в большинстве перечисленных выше исследований по развивающимся рынкам используется параметрическая модель кривой бескупонных доходностей Нельсона – Зигеля.

Модель Нельсона – Зигеля, описывающая зависимость бескупонной ставки  $y$  от ее срочности  $\tau$ , может быть записана следующим образом:

$$(1) \quad y(\tau) = \beta_1 + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} - e^{-\lambda\tau} \right) + \varepsilon(\tau),$$

где  $\beta_i$  и  $\lambda$  – оцениваемые параметры модели;  $\varepsilon(\tau)$  – случайная ошибка. Параметры  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$  можно интерпретировать как уровень, наклон и «горб» кривой соответственно (level, slope, curvature). Четвертый параметр  $\lambda$  описывает положение «горба» на графике.

Вектор параметров модели  $\theta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda\}$  оценивается через минимизацию среднеквадратичной ошибки оценки бескупонных доходностей:

$$(2) \quad \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^I (\hat{y}_i(\tau_i, \theta) - y_i)^2.$$

Это нелинейная оптимизационная задача, однако ее можно свести к решению с помощью обычного МНК, зафиксировав параметр  $\lambda$  или подбирая его итеративно.

В качестве входных данных для оценки модели Нельсона – Зигеля в стандартном случае используются бескупонные доходности. Их легко получить, если на рынке существуют бескупонные суверенные облигации. На развивающихся рынках зачастую торгуются только купонные облигации. В таком случае необходимо предварительно применить бутстрэп для расчета бескупонных ставок. Подробнее подход описан в работе [Лапшин, Терещенко, 2018].

Как альтернативный вариант для рынков с только купонными облигациями можно использовать фиттинг непосредственно цен облигаций, а не бескупонных доходностей. Он подразумевает минимизацию средней ошибки оценки стоимости облигаций по модельной дисконтирующей ставке из уравнения (1). Надь [Nagy, 2020] для нахождения оценки параметров использует следующую оптимизационную задачу:

$$(3) \quad \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_i^I (\hat{P}_i(\theta) - P_i)^2,$$

$$(4) \quad \hat{P}_i(\theta) = \sum_{j=1}^{J_i} C_{ij} e^{-y(\tau_i)\tau_i} + N_i e^{-y(\tau_i)\tau_i},$$

где  $P_i$  – цена  $i$ -й облигации;  $C_{ij}$  – ее  $j$ -й купон;  $N_i$  – ее номинал, а  $y(\tau)$  – бескупонная дисконтирующая ставка из уравнения (1).

Этот подход технически более сложен, так как он, в любом случае, требует нелинейной оптимизации, однако позволяет избежать дополнительного шага с бутстрэпом бескупонных доходностей.

### Проблемы с данными по облигациям на развивающихся рынках

Если бы на развивающихся рынках было достаточное количество качественных рыночных данных, то оценка кривой бескупонных доходностей сводилась бы к чисто технической задаче. Однако в связи с низким уровнем ликвидности развивающихся финансовых рынков оценка кривой бескупонных доходностей для них вызывает дополнительные сложности.

Работая с российским рынком облигаций, Гамбаров и др. (2004) выделили три следующие проблемы с качеством и полнотой рыночных данных.

1. *Неоднородная ликвидность*: на рынке есть облигации, которые регулярно торгуются, но с разной степенью активности. Некоторые облигации торгуются в аномально больших объемах. По некоторым бумагам объемы крайне малы.

2. *Пропуски в данных*: на рынке есть облигации, но некоторые из них торгуются нерегулярно. Когда сделки по бумаге отсутствуют, в данных образуются пропуски.

3. *Малое число обращающихся выпусков*: на рынке попросту не существует достаточное количество инструментов для достоверной оценки срочной структуры ставок. В экстремальных случаях количество доступных инструментов оказывается меньше числа оцениваемых параметров кривой.

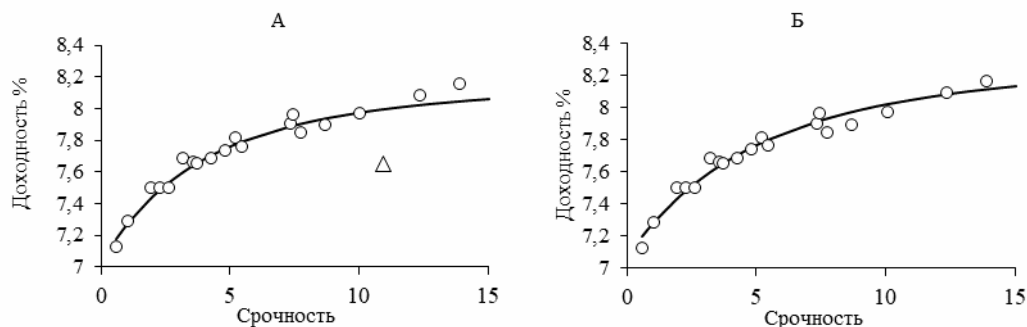
И хотя с тех пор ситуация с ликвидностью российского рынка облигаций улучшилась [Теплова, 2018], выделенные Гамбаровым и др. (2004) проблемы с данными по облигациям остаются актуальными для других развивающихся рынков. Иллюстрации этих проблем можно найти, в частности, в работах [Хакимжанов и др., 2019; Nagy, 2020].

Далее в работе мы приводим обзор основных вариантов решения этих проблем.

**Проблема № 1: неоднородная ликвидность.** На развивающихся рынках облигации часто торгуются в неоднородных объемах. Из-за этого в отдельные торговые дни стоимость и доходность некоторых бумаг может сильно отличаться от общего уровня. Это в свою очередь может негативно сказываться на оценке кривой бескупонных доходностей.

Наиболее ярко проблема неоднородной ликвидности проявляется в наличии выбросов в данных, которые искажают оценку параметров кривой. Пример такого негативного влияния показан на рис. 1А. На нем изображена оцененная с помощью модели Нельсона – Зигеля по уравнению (1) кривая бескупонных доходностей ОФЗ на 3 мая 2019 г. Этот день был выходным, однако торги на бирже осуществлялись, хоть и в небольших объемах.

Из-за низкой ликвидности доходность по 11-летней бумаге в этот день оказалась существенно ниже, чем доходности соседних ОФЗ. Можно говорить о наличии в данных выброса (показан на графике треугольником). В итоге оцененная кривая бескупонных доходностей сместилась вниз на дальнем конце. Это исказило уровень долгосрочных ставок.



*Примечания.* А – кривая, построенная на всех имеющихся наблюдениях. Б – кривая, оцененная после фильтрации выброса. Линией на графике показана сама кривая, а точками – рассчитанные бескупонные доходности.

**Рис. 1.** Кривая бескупонных доходностей, оцененная по модели Нельсона – Зигеля, на 3 мая 2019 г.

*Источник:* Cbonds, расчеты авторов.

**Решение 1.1: отсеивание наблюдений с атипичной ликвидностью.** Самым простым решением проблемы неоднородной ликвидности является фильтрация бумаг с нетипичным уровнем ликвидности (удаление выбросов). Такой подход использует, например, Московская Биржа [Московская Биржа, 2017]. Чтобы отфильтровать выбросы, для каждой облигации в выборке оценивается индекс ликвидности. Он представляет собой отклонение объемов торгов по определенной бумаге в конкретный торговый день от среднего объема торгов по всем рассматриваемым выпускам. Облигации со значением отклонения выше экспертно зафиксированного уровня исключаются из выборки.

Фильтрацию можно проводить и более простыми способами, например, на основе визуального анализа. Так, если с рис. 1А удалить явный выброс, отмеченный треугольником, то кривая станет лучше улавливать точки на дальних сроках (рис. 1Б).

**Решение 1.2: взвешивание наблюдений по уровню ликвидности.** На развивающихся рынках данных по торгам зачастую мало. Фильтрация в таких случаях может быть неприменима, так как она приведет к потере важной информации. Кроме того, иногда в выборке нет очевидных выбросов. При этом имеющиеся котировки несут разную информационную ценность, так как обладают разной ликвидностью.

Это подтолкнуло исследователей к введению в модель дополнительных весов, отражающих уровень доверия той или иной котировке. Тогда оптимизационная задача из (2) приобретает вид

$$(5) \quad \hat{\theta} = \arg \min_{\theta} \sum_i^I \omega(\psi) (\hat{y}_i(\tau_i, \theta) - y_i)^2,$$

где  $\omega(\psi)$  – вектор весов, зависящий от некоторых экзогенных параметров  $\psi$ . Отметим, что фильтрация равносильна назначению нулевых весов отдельным наблюдениям.

Использование весов для оценки кривых доходностей – не новая тема. Распространенной практикой является взвешивание ошибок модели на обратную дюрацию [Bliss, 1997]. Этот метод основывается на эмпирическом наблюдении о том, что более длинным бумагам соответствует большая ошибка в котировках.

Субраманиан [Subramanian, 2001] одним из первых предложил учитывать уровень ликвидности бумаги при оценке кривой. Для этого он рекомендовал взвешивать ошибку предсказания в оптимизационной задаче на долю торгов по какой-либо бумаге в общедневных торгах.

Авторы работы [Dutta et al., 2005] углубили данный подход и предложили взвешивать модельные ошибки в задаче оптимизации пропорционально отклонению объемов торгов по бумаге в конкретный день от максимального объема торгов по какой-либо бумаге в этот же день. Объем торгов учитывается двумя способами – в денежном эквиваленте и в количестве сделок. Веса задаются с помощью экспоненциальной функции или гиперболического тангенса.

Блисс [Bliss, 1997] рекомендовал другой подход к учету ликвидности. Для этого он использовал бид-аск спред (разница между ценой покупки и продажи). Для неликвидных бумаг этот спред обычно высок. Подход автора базируется на следующей логике. Точно неизвестно, какая котировка отражает истинную кривую доходности. Однако мы знаем, что такая котировка лежит внутри бид-аск спреда. На основе этих рассуждений автор

модифицирует классическую оптимизационную задачу для оценки параметров кривой так, чтобы она наказывала модель только за те оцененные котировки, которые лежат за пределами бид-аск спреда.

В работе [Lapshin, Sohatskaya, 2020] рассматриваются дополнительные веса, учитывающие бид-аск спред наблюдения. В качестве базового варианта авторы упоминают взвешивание ошибок обратно пропорционально спреду. Такое взвешивание имеет простую логику: чем больше спред, тем ниже степень доверия котировке.

При этом авторы отмечают, что на практике о недостоверности котировки может свидетельствовать и необычно высокий, и необычно низкий спред. Поэтому разумно снижать веса за отклонение от нормального (среднего) бид-аск спреда, а не просто за большие спреды.

Однако и этот подход может быть модифицирован. Авторы предлагают следующий подход. Сначала на основе исторических бид-аск спредов по какой-либо бумаге строится его эмпирическое распределение. Затем в задачу оптимизации вводятся веса, пропорциональные вероятности нахождения наблюдаемого спреда в оцененном эмпирическом распределении.

Перечисленные исследования показывают, что использование информации об уровне ликвидности облигаций позволяет увеличить качество оценки кривой бескупонных доходностей. Она становится менее чувствительна к выбросам и становится более достоверной, так как в большей мере опирается на ликвидные котировки.

**Проблема № 2: пропуски в данных.** Другая проблема с данными по облигациям на развивающихся рынках – большое количество пропусков. Это связано с тем, что сделки по некоторым бумагам происходят нерегулярно. То есть выпуск в принципе существует, но он торгуется не каждый день.

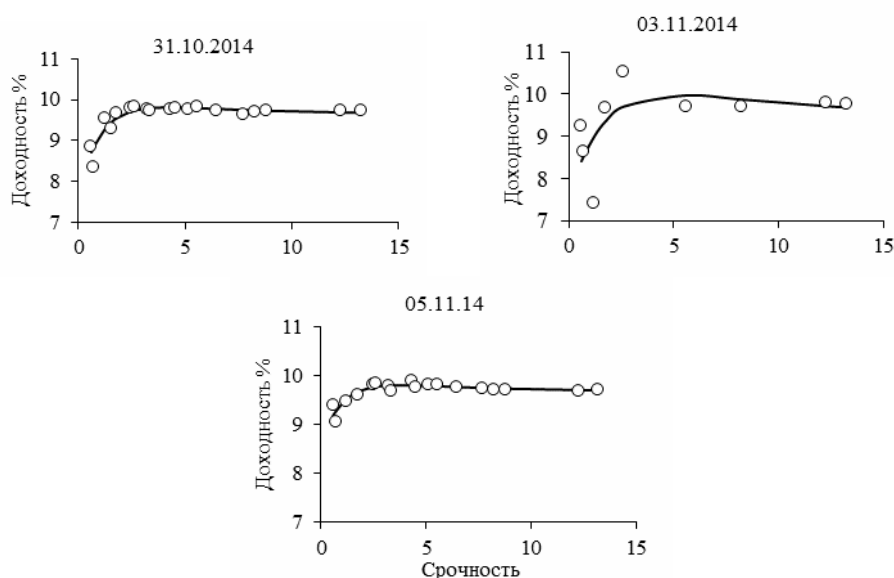
Подобная проблема – следствие низкой активности вторичного рынка [Гамбаров и др., 2004]. На развивающихся рынках облигаций количество участников ограничено. Как правило, это несколько крупных игроков. Они выкупают выпуски при первоначальной эмиссии, а затем держат их до погашения. Объем бумаг в свободном обращении в этом случае низок и бумаги торгуются редко.

Авторы [Cortzar et al., 2007] одни из первых привлекли внимание к проблеме влияния пропусков в данных на оценку срочной структуры процентных ставок. Они показали, что наличие пропусков ведет к увеличению волатильности оценки кривой. При этом волатильность оказывается обусловлена не рыночной ситуацией, что было бы нормально, а именно низким количеством наблюдений.

Проиллюстрируем эту проблему на российском рынке. На рис. 2 изображена кривая бескупонных доходностей, оцененная по модели Нельсона – Зигеля в три последовательных торговых дня. Точками обозначены доходности к погашению, извлеченные из наблюдаемых рыночных котировок, а линией – сама оцененная кривая. Как видно из рисунка, 3 ноября 2014 г. точек было значительно меньше, чем в соседние дни. Это был рабочий день между двумя выходными, поэтому торговая активность в нем была ниже. Ситуация на рынке за эти дни значимо не изменилась. Однако из-за пропусков в данных за 3 ноября у кривой возник «горб» в районе 6 лет. Доходность по кривой на этой срочности оказалась выше на 25 базисных пунктов, чем в соседние дни.

Для российского рынка в последние годы такая ситуация является скорее исключением. По нашим расчетам, средняя доля пропусков снизилась с в среднем 40% в 2012 г.

до примерно 5% в 2020 г. Однако на менее ликвидных рынках наличие пропусков в данных будет сказываться на качестве получаемых оценок кривой бескупонных доходностей. В связи с этим исследователи сходятся во мнении, что с пропусками в данных необходимо что-то делать. В литературе встречаются два подхода – динамическое обновление кривой бескупонных доходностей и предварительная обработка пропусков.



Примечание. Линией на графике показана сама кривая, а точками – рассчитанные бескупонные доходности.

**Рис. 2.** Кривая бескупонных доходностей, оцененная по модели Нельсона – Зигеля, в три последовательных торговых дня (30 октября, 3 и 5 ноября 2014 г.)

Источник: Cbonds, расчеты авторов.

**Решение 2.1: динамические модели кривой бескупонных доходностей.** Одним из подходов для решения проблемы пропусков в данных при оценке кривой бескупонных доходностей является ее динамическое обновление. Этот подход был предложен в работе [Diebold, Li, 2006]<sup>1</sup>. Авторы разработали динамический вариант модели Нельсона – Зигеля, который предполагает зависимость коэффициентов кривой от своих предыдущих значений. Изначально авторы задумывали модель для прогнозирования будущих ставок, однако идея модели в последующих работах была применена другими исследователями и для целей работы с пропусками в данных.

В модель Нельсона – Зигеля Диеболд и Ли (2006) добавляют дополнительный компонент, отвечающий за связь будущих коэффициентов модели с предыдущими. В базовом варианте такая связь моделируется с помощью векторной авторегрессии. Параметр  $\lambda$

<sup>1</sup> Стоит отметить, что похожий подход предлагался несколько ранее применительно к российскому рынку [Гамбаров и др., 2004]. Однако в западной литературе именно работа [Diebold, Li, 2006] является основополагающей в этом направлении.



предварительно оценивается на исторических данных, что позволяет применить для оценки модели МНК. Формально модель выглядит следующим образом:

$$(6) \quad Y_{t+1} = \Lambda \beta_{t+1} + \varepsilon,$$

$$(7) \quad \beta_{t+1} = c + \Gamma \beta_t + \eta,$$

где  $Y_{t+1}$  – вектор прогнозируемых на дату  $t + 1$  доходностей;  $\beta_t$  – вектор параметров модели Нельсона – Зигеля в момент времени  $t$ ;  $\Lambda$  – матрица переменных при коэффициентах модели;  $c$  и  $\Gamma$  – оценки коэффициентов модели векторной авторегрессии;  $\varepsilon$  и  $\eta$  – вектор случайных ошибок. Фактически уравнение (6) эквивалентно уравнению (1), записанному в матричном виде.

Полученная модель позволяет осуществлять прогнозы кривой на будущие даты. Этот прогноз может служить ориентиром для кривой бескупонных доходностей на те дни, когда данных по торгам нет либо когда их крайне мало. Однако для оценки такой модели все равно требуются полные данные.

В своей следующей работе [Diebold et al., 2006] добавили возможность учета постепенно поступающих наблюдений с помощью фильтра Калмана. Такой подход намного лучше работает с пропущенными наблюдениями. Он позволяет не только делать предсказание кривой бескупонных доходностей на основании исторических данных, но и учитывать при этом новую рыночную информацию.

При использовании фильтра Калмана уравнение (6) становится уравнением наблюдений. Оно связывает наблюдаемые доходности с ненаблюдаемым состоянием системы. Уравнение (7) становится уравнением состояний. Оно связывает ненаблюдаемые состояния с их предыдущими значениями. Уравнения оцениваются совместно, при этом параметр  $\lambda$  больше не обязательно должен быть фиксированным.

На первом шаге работы фильтра Калмана осуществляется априорная оценка параметров кривой с учетом доступной информации. Ее можно считать неким прогнозом кривой. Когда же появляются новые данные, формируется апостериорная оценка состояния системы. Модель «впитывает» информацию о расхождениях между априорной и апостериорной оценкой и использует ее для целей дальнейшего прогнозирования.

Подход авторов работы [Diebold et al., 2006] получил широкое распространение в задачах оценки кривой бескупонных доходностей в условиях наличия пропусков в данных. Дело в том, что в условиях отсутствия достаточного количества наблюдений задача прогнозирования кривой бескупонных доходностей фактически становится эквивалентна задаче оценки кривой.

Авторы [Caldeira et al., 2009] применили динамическую модель Нельсона – Зигеля для бразильского рынка, Погосян (2019) использовал ее для рынка Армении. Авдеева и Цыплаков (2015) приложили модель к российским государственным облигациям. Кроме того, подход на основе динамической кривой Нельсона – Зигеля с фильтром Калмана лежит в основе текущей методики построения кривой бескупонных доходностей Московской Биржи [Московская Биржа, 2017].

В работе [Nagy, 2020] модель адаптирована под использование в качестве наблюдений не доходностей облигаций, а непосредственно их цен. Такой прием лучше подхо-

дит для рынков, где не торгуются бескупонные облигации, однако он несколько более сложен.

Авторы работы [Cortazar et al., 2007] показали, что использование фильтра Калмана для обновления кривой возможно и с другими параметрическими моделями кривой бескупонных доходностей, например, с моделями коротких ставок. В качестве иллюстрации своих выводов они совместили фильтр Калмана с моделью коротких ставок Васичека [Vasicek, 1977] для оценки кривой доходностей государственных облигаций Чили. В дальнейшем похожий подход был применен для оценки срочной структуры процентных ставок на бразильском рынке [Luiz, Ribeiro, 2008].

**Решение 2.2: предварительная обработка пропусков.** Другое решение проблемы пропусков в данных, встречающееся в литературе, – это их предварительная обработка. В отличие от метода динамического обновления кривой этот подход подразумевает, что пропуски в данных сначала обрабатываются с помощью специального правила или модели, а уже потом к преобразованным данным применяются классические модели оценки кривой бескупонных доходностей.

Самый простой вариант работы с пропусками – это удаление в выборке дней или облигаций с пропущенными значениями (complete case analysis). Такой подход применяется в работах, посвященных развитым рынкам, где доля пропусков в данных незначительна. На развивающихся рынках такой вариант подходит не всегда, так как удаление бумаг с пропусками может привести к потере большего количества данных.

Поэтому на развивающихся рынках чаще встречается подход с предварительным восстановлением пропущенных значений. Для этого могут применять как простые правила, так и более сложные модели. Так, Хакимжанов и др. (2019) для заполнения пропусков используют последние наблюдаемые значения (last observation carried forward – LOCF). Этот метод предполагает, что в условиях отсутствия данных предыдущее наблюдение является наилучшей оценкой отсутствующего значения. Тем не менее, чтобы отразить меньшую степень доверия старой котировке по сравнению с актуальной текущей, авторы вводят в модель Нельсона – Зигеля дополнительные веса, зависящие от возраста наблюдения. В итоге кривая бескупонных доходностей больше подстраивается под актуальные наблюдения и меньше – под старые. Этот подход лежит в основе текущей методики оценки кривой бескупонных доходностей Казахстанской Фондовой Биржи [Казахстанская Фондовая Биржа, 2019].

Изучая связь между рынком CDS и рынком облигаций, Чжу (2006) сравнивает метод заполнения пропусков последним значением с заполнением с помощью ЕМ-алгоритма [Dempster et al., 1997]. Это итеративный алгоритм, состоящих из двух шагов. На Е-шаге вычисляется ожидаемое значение (expectation) вектора ненаблюдаемых переменных на основе первого приближения коэффициентов модели, оцененных с помощью доступной информации. На М-шаге решается задача максимизации правдоподобия (maximization) и находится следующее приближение вектора параметров модели. С его помощью вновь оцениваются ненаблюдаемые значения и т.д. На практике этот процесс сходится за несколько итераций.

Чжу (2006) приходит к выводу, что ЕМ-алгоритм позволяет лучше уловить зависимость между рынком CDS и облигаций. Это неудивительно, ведь ЕМ-алгоритм учитывает общую структуру данных и связи между наблюдениями в выборке. В результате пропуски заполняются с учетом динамики наблюдаемых данных. В то же время при ис-

пользовании метода LOCF данные становятся более статичными. Связи между наблюдениями нарушаются.

ЕМ-алгоритм для заполнения пропусков в данных по облигациям использует и Варга [Warga, 1992] для сравнения доходностей между ликвидными облигациями on-the-run и менее ликвидными бумагами off-the-run. Автор отмечает, что заполнение пропусков позволяет получить более качественные выводы по сравнению со случаем использования только полных данных.

Косьяненко (2007) помимо ЕМ-алгоритма для заполнения пропусков в данных использует более сложную байесовскую модель с использованием методов Монте-Карло для марковских цепей. Он показывает, что такой подход позволяет более точно моделировать корреляции между доходностями различных облигаций. Модель строит апостериорное распределение пропущенных значений и неизвестных параметров при условии наблюдаемых величин.

В теории, для заполнения пропусков в данных по облигациям могут быть использованы и другие подходы. В статистике существует целое направление, посвященное пропущенным данным [Rubin, 1976]. Так, пропуски могут заполняться с помощью среднего значения, интерполяции, фильтра Калмана, метода ближайших соседей, multiple imputation и др. Подробный обзор существующих методов заполнения пропусков приводится в работе [Briggs et al., 2003]. Не все эти методы применялись к задачам оценки кривой бескупонных доходностей, однако они могут быть вполне применены и для этой цели.

Методы предварительной обработки пропусков полезны тем, что их можно использовать независимо от модели оценки кривой бескупонных доходностей. Они подходят и для параметрических, и для сплайновых, и для бутстрэп-моделей. Заполнение пропусков и оценка кривой происходят на разных этапах и не обязательно связаны между собой. Это также позволяет применять обработанные данные для других целей: оценки рыночного риска, формирования портфеля, хеджирования и т.п.

**Проблема № 3: малое число обращающихся выпусков.** Для некоторых развивающихся рынков ситуация с данными обстоит еще сложнее. На них попросту отсутствует достаточное количество ликвидных выпусков суверенных облигаций, которое позволило бы оценить срочную структуру процентных ставок.

Хакимжанов и др. (2019) приводят интересную статистику по казахскому рынку государственных ценных бумаг (ГЦБ). Так, в первом полугодии 2015 г. на вторичном рынке было совершено всего 18 сделок с ГЦБ. Очевидно, что никакой метод восстановления пропусков или учета неоднородной ликвидности не позволит в этом случае достоверно оценить кривую доходностей.

Строго говоря, на рынках с таким низким уровнем ликвидности полноценно оценить срочную структуру процентных ставок невозможно вообще, так как отсутствует рыночная информация, из которой эту структуру можно было бы извлечь. В лучшем случае можно говорить лишь о некоем ориентире рыночных процентных ставок.

В академической литературе тема оценки кривой бескупонных доходностей в условиях малого числа обращающихся выпусков облигаций покрыта достаточно узко, так как методологически корректная проверка качества получаемых подходов затруднена нехваткой данных. Тем не менее на практике существует несколько вариантов оценки кривой бескупонных доходностей в условиях малого количества данных. К ним относятся использование упрощенных моделей кривой бескупонных доходностей и использование данных со смежных рынков.

**Решение 3.1: упрощенные модели кривой бескупонных доходностей.** Одним из возможных вариантов является ослабление требований к форме кривой бескупонных доходностей. Например, можно предположить, что кривая имеет форму экспоненциальной или логарифмической функции. Тогда потребуется оценить всего два параметра кривой (против четырех в классическом варианте кривой Нельсона – Зигеля), что в условиях нехватки наблюдений выглядит более реальной задачей. Если имеющихся данных по облигациям недостаточно и для этого, то можно предположить срочную структуру процентных ставок плоской.

На практике на таких рынках часто вообще отказываются от предположений о форме кривой, а используют линейную интерполяцию между точками, соответствующими наблюдаемым доходностям. По сути, это является простейшим вариантом сплайнового метода.

Разумеется, эти подходы имеют свои недостатки. Простая кривая не может «уловить» все эмпирически наблюдаемые формы кривой бескупонных доходностей, а кусочно-линейная интерполяция приводит к потере гладкости кривой и также к отрицательным мгновенным форвардным ставкам вблизи изломов. Однако на рынках с низкой ликвидностью с такими недостатками приходится мириться.

**Решение 3.2: использование информации со смежных рынков.** Альтернативное решение проблемы нехватки данных – это использование информации со смежных рынков, которые характеризуются большей ликвидностью. Если на рынке существуют ликвидные процентные свопы или валютные фьючерсы, то можно постараться извлечь срочную структуру процентных ставок и из них. При этом информация со смежных рынков может применяться как на всей кривой бескупонных доходностей, так и отдельно на участках, где отсутствует достаточная ликвидность долгового рынка.

Естественно, рынок производных инструментов отличается от рынка государственного долга. Поэтому в чистом виде ставки с разных рынков не являются взаимозаменяемыми. Между ними существует так называемый базисный спред. Этот спред объясняется разным уровнем ликвидности и кредитного риска [Duffie, Singleton, 1997; Feldhuetter, Lando, 2008; Liu et al., 2006] и неодновременной реакцией двух рынков на внешние события [Avino et al., 2013; Lien, Shrestha, 2012].

В идеале при использовании данных со смежных рынков необходимо учитывать наличие базисного спреда. Это можно сделать несколькими способами. Самый простой вариант – оценить спред на исторических данных и скорректировать кривую на этот спред. Похожий подход сейчас предлагается использовать в контексте реформы IBOR [ARRC, 2020]. После окончания публикации IBOR-ставок их значение предлагается рассчитывать как сумму новых безрисковых ставок в соответствующей валюте и медианного спреда между этими ставками и старыми IBOR-ставками за последние 5 лет с момента окончания их публикации. Это нужно преимущественно для долгосрочных контрактов, где IBOR используется как база для расчета плавающей ставки. Минус такого подхода в том, что он подразумевает параллельный сдвиг кривой на величину спреда, в то время как базисный спред на разных срочностях может иметь разные значения.

Более продвинутый подход – это одновременное моделирование ставок сразу с нескольких рынков [Cuchiero et al., 2019; Hull, White, 2015]. Такие модели позволяют уловить более сложные формы базисного спреда и его временную динамику. Основное приложение multi-curve моделей – оценка сложных производных инструментов, но в теории они

могут быть полезны и для оценки кривых доходностей на низколиквидных рынках. Для этого в период достаточной ликвидности на обоих рынках необходимо оценить модель динамики базисного спреда между двумя ставками. Когда ликвидность на необходимом рынке пропадает, оценку ставок с этого рынка можно получить за счет корректировки наблюдаемых ставок со смежного рынка на рассчитанный по ранее оцененной модели базисный спред.

Другой источник дополнительной информации – рынок корпоративного долга. На развивающихся рынках большую роль играют квазигосударственные компании, которые иногда обладают более ликвидными облигациями, чем само государство. Данные по доходности таких облигаций можно учитывать при оценке кривой бескупонных доходностей. Между доходностью корпоративных и государственных облигаций также существует некоторый спред. Он объясняется разным уровнем кредитного риска, ликвидностью, налоговыми льготами и другими факторами [Elton et al., 2001; Longstaff et al., 2005]. Если эффект ликвидности оценить достаточно сложно, то эффект кредитного риска оценить вполне реально. Кредитный спред в упрощенном варианте можно оценить с помощью кредитного рейтинга и соответствующей вероятности дефолта. Более продвинутый вариант – моделирование безрисковой кривой одновременно на основе котировок облигаций и CDS одного эмитента [Smirnov et al., 2017]. Для этого, однако, требуются ликвидные котировки по CDS, а это редкость для развивающихся рынков.

В любом случае, при моделировании безрисковой кривой бескупонных доходностей с помощью информации со смежных рынков важно понимать, что этот подход дает лишь некоторый ориентир истинной срочной структуры процентах ставок. Поэтому на практике рекомендуется использовать доверительный интервал для полученных оценок и понимать, как принятые предположения влияют на получаемые выводы.

### Заключение

Развивающиеся рынки облигаций имеют свои особенности, часто представляющие проблемы для оценки срочной структуры процентных ставок. К таким проблемам относятся неоднородная ликвидность облигаций, частые пропуски в данных и ограниченные размеры выборки. Проведенный обзор литературы показывает, что все эти проблемы можно в той или иной степени решить, модифицировав классические методы оценки кривой бескупонных доходностей.

Проблему неоднородной ликвидности облигаций можно решить через фильтрацию выбросов или введение в модель весов, основанных на уровне ликвидности облигаций. Уровень ликвидности можно оценивать как с помощью объемов торгов, так и с помощью бид-аск спреда. Конкретные формы весов могут варьироваться, однако все они концептуально похожи: наблюдение с нетипичной ликвидностью получает меньший вес.

Проблему пропусков в данных в литературе решается двумя способами. Первый вариант – обновление параметров кривой. Он предполагает, что кривую можно описать некоторыми параметрами, которые динамически развиваются и обновляются при получении новых наблюдений. Второй вариант – предварительная обработка пропусков. Пропуски можно удалять или заполнять по некоторому правилу.

Проблему малого количества выпусков можно решить либо за счет ослабления требований к форме кривой (использования более простых моделей с меньшим количеством

параметров), либо за счет данных со смежных рынков, например, с рынка корпоративного долга или с рынка производных финансовых инструментов. При втором варианте стоит дополнительно учитывать базисный спред, связанный с различием этих рынков. Также динамику срочной структуры процентных ставок можно моделировать совместно на нескольких рынках одновременно.

Учет особенностей ликвидности рынка при построении кривых доходностей открывает путь к более точному пониманию срочной структуры процентных ставок на этих рынках. Это, в свою очередь, может быть полезно для целей оценки рисков и финансового моделирования на развивающихся рынках.

\* \*

\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Авдеева О.А., Цыплаков А.А. Метод адаптивного оценивания срочной структуры процентных ставок // Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 4. С. 609–639.

Гамбаров Г.М., Шевчук И.В., Балабушкин А.Н. Оценка срочной структуры процентных ставок. Роль рынка государственных ценных бумаг в оценке срочной структуры процентных ставок // Рынок ценных бумаг. 2004. № 13. С. 1–33.

АО «Казахстанская Фондовая Биржа». Методика определения функции доходности государственных ценных бумаг Республики Казахстан // Казахстанская Фондовая Биржа. 2019. ([https://kase.kz/files/normative\\_base/metodika\\_gzb.pdf](https://kase.kz/files/normative_base/metodika_gzb.pdf)) (Дата обращения 24.01.2021)

Косьяненко А.В. Опыт восстановления пропущенной рыночной информации на основе байесовского подхода: Препринт WP16/2007/02. М.: ГУ ВШЭ, 2007.

Курбангалеев М.З., Лапшин В.А. Анализ требований к оценке срочной структуры безрисковых ставок в финансовых задачах // Управление финансовыми рисками. 2015. № 1. С. 50–60.

Лапшин В.А., Терещенко М.Ю. Выбор модели срочной структуры процентных ставок на основе ее свойств // Корпоративные финансы. 2018. Т. 12. № 2. С. 53–69.

Московская Биржа. Методика определения кривой бескупонной доходности государственных облигаций (облигаций федеральных займов) // Московская Биржа. 2017. (<https://fs.moex.com/files/14299>) (Дата обращения 24.01.2021)

Теплова Т.В. Сопоставительный обзор облигационного рынка РФ на конец 2017 г. // Управленческий учет и финансы. 2018. Т. 54 № 2. С. 96–103.

Хакимжанов С., Мустафин Е., Кубенбаев О. Построение кривой доходности на рынке с низкой ликвидностью // Деньги и Кредит. 2019. Т. 78. № 4. С. 71–98.

Ali M.N., Ramli S.N.M., Zainon S., Kamal S.N.-I.M., Razak M.I., Ali N.M., Osman S. Estimating the Yield Curve for the Malaysian Bond Market Using Parsimony Method // Procedia Economics and Finance. 2015. Vol. 31. P. 194–198.

Alternative Reference Rates Committee (ARRC). Request for Proposals for the Administration of Recommended Spread Adjustments and Spread-Adjusted SOFR Rates to Facilitate Contractual Fallbacks. 2020. (<https://www.newyorkfed.org/medialibrary/Microsites/arrc/files/2020/20200902-ARRC-Press-Release-Spread-Adjustment-RFP-FINAL>) (Retrieved at 24.01.2021)

Avino D., Lazar E., Varotto S. Price Discovery of Credit Spreads in Tranquil and Crisis Periods // International Review of Financial Analysis. 2013. Vol. 30. P. 242–253.

- Bliss R.R. Testing Term Structure Estimation Methods // *Advances in Futures and Options Research*. 1997. Vol. 9. P. 197–231.
- Briggs A., Clark T., Wolstenholme J., Clarke P. Missing... Presumed at Random: Cost-analysis of Incomplete Data // *Health Economics*. 2003. Vol. 12. № 5. P. 377–392.
- Caldeira J., Moura G.V., Portugal M.S. Efficient Yield Curve Estimation and Forecasting in Brazil // *Economia*, Brasília (DF). 2009. Vol. 11. № 1. P. 27–51.
- Chakroun F., Abid F. A Methodology to Estimate the Interest Rate Yield Curve in Illiquid Market: The Tunisian Case // *Journal of Emerging Market Finance*. 2014. Vol. 13. № 3. P. 305–333.
- Chou J.-H., Su Y.-S., Tang H.-W., Chen C.-Y. Fitting the Term Structure of Interest Rates in Illiquid Market: Taiwan Experience // *Investment Management and Financial Innovations*. 2009. Vol. 6. № 1. P. 101–116.
- Cortazar G., Schwartz E.S., Naranjo L.F. Term-structure Estimation in Markets with Infrequent Trading // *International Journal of Finance and Economics*. 2007. Vol. 12. № 4. P. 353–369.
- Cuchiero C., Fontana C., Gnoatto A. Affine Multiple Yield Curve Models // *Mathematical Finance*. 2019. Vol. 29. № 2. P. 568–611.
- Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B. Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm // *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*. 1977. Vol. 39. № 1. P. 1–22.
- Diebold F.X., Li C. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields // *Journal of Econometrics*. 2006. Vol. 130. № 2. P. 337–364.
- Diebold F.X., Rudebusch G.D., Aruoba S.B. The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach // *Journal of Econometrics*. 2006. Vol. 131. № 1–2. P. 309–338.
- Duffie D., Singleton K.J. An Econometric Model of the Term Structure of Interest-Rate Swap Yields // *The Journal of Finance*. 1997. Vol. 52. № 4. P. 1287–1321.
- Dutta G., Basu S., Vaidyanathan K. Term Structure Estimation in Illiquid Government Bond Markets: An Empirical Analysis for India // *Journal of Emerging Market Finance*. 2005. Vol. 4. № 1. P. 63–80.
- Elton E.J., Gruber M.J., Agrawal D., Mann C. Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds // *The Journal of Finance*. 2001. Vol. 56. № 1. P. 247–277.
- Fama E.F., Bliss R.R. The Information in Long-Maturity Forward Rates // *The American Economic Review*. 1987. Vol. 77. № 4. P. 680–692.
- Feldhuetter P., Lando D. Decomposing Swap Spreads // *Journal of Financial Economics*. 2008. Vol. 88. № 2. P. 375–405.
- Hull J., White A. OIS Discounting, Interest Rate Derivatives, and the Modelling of Stochastic Interest Rate Spreads // *Journal of Investment Management*. 2015. Vol. 13. № 1. P. 64–83.
- Lapshin V., Sohatskaya S. Choosing the Weighting Coefficients for Estimating the Term Structure from Sovereign Bonds // *International Review of Economics and Finance*. 2020. Vol. 70. P. 635–648.
- Lien D., Shrestha K. Price Discovery in Interrelated Markets // *The Journal of Futures Markets*. 2014. Vol. 34. № 3. P. 203–219.
- Liu J., Longstaff F.A., Mandell R.E. The Market Price of Risk in Interest Rate Swaps: The Roles of Default and Liquidity Risks // *The Journal of Business*. 2006. Vol. 79. № 5. P. 2337–2359.
- Longstaff F.A., Mithal S., Neis E. Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market // *The Journal of Finance*. 2005. Vol. 60. № 5. P. 2213–2253.
- Luiz A., Ribeiro B. Estimating and Comparing the Term Structure of Interest Rates for Assets with Frequent and Infrequent Trading // *The Open Business Journal*. 2008. № 1. P. 25–33.
- McCulloch J.H. Measuring the Term Structure of Interest Rates // *The Journal of Business*. 1971. Vol. 44. № 1. P. 19–31.
- Muthon L., Onyango S., Ongat O. Extraction of Zero Coupon Yield Curve for Nairobi Securities Exchange: Finding the Best Parametric Model for East African Securities Markets // *Journal of Mathematics and Statistical Science*. 2015. № 1. P. 51–74.
- Nagy K. Term Structure Estimation with Missing Data: Application for Emerging Markets // *The Quarterly Review of Economics and Finance*. 2020. Vol. 75. P. 347–360.
- Nelson C.R., Siegel A.F. Parsimonious Modeling of Yield Curves // *The Journal of Business*. 1987. Vol. 60. № 4. P. 473–489.

- Poghosyan K., Poghosyan A.* Yield Curve Estimation and Forecasting in Armenia // Armenian Journal of Economics. 2019. Vol. 4. P. 1–21.
- Rubin D.B.* Inference and Missing Data // Biometrika. 1976. Vol. 63. № 3. P. 581–592.
- Smirnov S.N., Lapshin V.A., Kurbangaleev M.Z.* Deriving Implied Risk-Free Interest Rates from Bond and CDS Quotes: A Model-Independent Approach // Optimization and Engineering. 2017. Vol. 18. P. 499–536.
- Subramanian K.V.* Term Structure Estimation in Illiquid Markets // The Journal of Fixed Income. 2001. Vol. 11. № 1. P. 77–86.
- Svensson L.E.O.* Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994: Working Paper № 4871. National Bureau of Economic Research, 1994.
- Vasicek O.* An Equilibrium Characterization of the Term Structure // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5. № 2. P. 177–188.
- Warga A.* Bond Returns, Liquidity, and Missing Data // Journal of Financial and Quantitative Analysis. 1992. Vol. 27. № 4. P. 605–617.
- Xie C., Chen H., Yu X.* Yield Curve Estimation in the Illiquid Market: Framework, Models and Empirical Study // International Journal of Information Technology and Decision Making. 2006. Vol. 5. № 3. P. 467–481.
- Zhu H.* An Empirical Comparison of Credit Spreads between the Bond Market and the Credit Default Swap Market // Journal of Financial Services Research. 2006. Vol. 29. № 3. P. 211–235.
- Zoricic D., Orsag S.* Parametric Yield Curve Modeling in an Illiquid and Undeveloped Financial Market // UTMS Journal of Economics. 2013. Vol. 4. № 3. P. 243–252.

## Yield Curve Estimation in Illiquid Bond Markets

Mikhail Makushkin<sup>1</sup>, Victor Lapshin<sup>2</sup>

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Bulvar, Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: mmakushkin@hse.ru

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Bulvar, Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: vlapshin@hse.ru

There are many different models for estimation of a yield curve from bond market quotes. These models are well suited for developed markets with high liquidity level and market data readily available. However, this is not always the case for developing markets that are characterized by infrequent trading, heterogeneous liquidity and frequent missing data.

In this article we provide a review of the existing and theoretically possible solutions to the problems arising in the process of yield curve construction in developing markets. Our review shows, that all these problems can be effectively tackled by adapting traditional yield curves models to the observer liquidity level of developing market.

Heterogeneous liquidity can be addressed by introducing liquidity-based weights into a yield curve model and by removing observations with atypical liquidity from the dataset. To solve



missing data problem, we suggest using dynamic yield curve models or recreating missing observations with help of a supplementary model. In special cases when there are not enough bond issues on the market one is recommended to simplify yield curve model and use the data from other markets (e.g. derivative market).

The article might be of a great use for market practitioners who operate on developing bond markets as well as for quants who are engaged in construction of yield curves. It also serves as a starting point for a further academic research in the area of term structure modelling in illiquid bond markets.

**Key words:** yield curve; term structure of interest rates; bond market; Nelson – Siegel method; liquidity level; missing data; emerging markets.

**JEL Classification:** JEL G12, E43.

\* \*  
\*

### References

- Ali M.N., Ramli S.N.M., Zainon S., Kamal S.N-I.M., Razak M.I., Ali N.M., Osman S. (2015) Estimating the Yield Curve for the Malaysian Bond Market Using Parsimony Method. *Procedia Economics and Finance*, 31, pp. 194–198.
- Alternative Reference Rates Committee (ARRC) (2020) *Request for Proposals for the Administration of Recommended Spread Adjustments and Spread-Adjusted SOFR Rates to Facilitate Contractual Fallbacks*. Available at: <https://www.newyorkfed.org/medialibrary/Microsites/arrc/files/2020/20200902-ARRC-Press-Release-Spread-Adjustment-RFP-FINAL> (Retrieved at 24.01.2021)
- Avdeeva O., Tsyplakov A. (2015) A Method for Adaptive Estimation of the Term Structure of Interest Rates [In Russian]. *HSE Economic Journal*, 19, 4, pp. 609–639.
- Avino D., Lazar E., Varotto S. (2013) Price Discovery of Credit Spreads in Tranquil and Crisis Periods. *International Review of Financial Analysis*, 30, pp. 242–253.
- Bliss R.R. (1997) Testing Term Structure Estimation Methods. *Advances in Futures and Options Research*, 9, pp. 197–231.
- Briggs A., Clark T., Wolstenholme J., Clarke P. (2003) Missing... Presumed at Random: Cost-analysis of Incomplete Data. *Health Economics*, 12, 5, pp. 377–392.
- Caldeira J., Moura G.V., Portugal M.S. (2009) Efficient Yield Curve Estimation and Forecasting in Brazil. *EconomiA, Brasília(DF)*, 11, 1, pp. 27–51.
- Chakroun F., Abid F. (2014) A Methodology to Estimate the Interest Rate Yield Curve in Illiquid Market: The Tunisian Case. *Journal of Emerging Market Finance*, 13, 3, pp. 305–333.
- Chou J.-H., Su Y.-S., Tang H.-W., Chen C.-Y. (2009) Fitting the Term Structure of Interest Rates in Illiquid Market: Taiwan Experience. *Investment Management and Financial Innovations*, 6, 1, pp. 101–116.
- Cortazar G., Schwartz E.S., Naranjo L.F. (2007) Term-structure Estimation in Markets with Infrequent Trading. *International Journal of Finance and Economics*, 12, 4, pp. 353–369.
- Cuchiero C., Fontana C., Gnoatto A. (2019) Affine Multiple Yield Curve Models. *Mathematical Finance*, 29, 2, pp. 568–611.
- Dempster A.P., Laird N.M., Rubin D.B. (1977) Maximum Likelihood from Incomplete Data Via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 39, 1, pp. 1–22.

- Diebold F.X., Li C. (2006) Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields. *Journal of Econometrics*, 130, 2, pp. 337–364.
- Diebold F.X., Rudebusch G.D., Aruoba S.B. (2006) The Macroeconomy and the Yield Curve: A Dynamic Latent Factor Approach. *Journal of Econometrics*, 131, 1–2, pp. 309–338.
- Duffie D., Singleton K.J. (1997) An Econometric Model of the Term Structure of Interest-Rate Swap Yields. *The Journal of Finance*, 52, 4, pp. 1287–1321.
- Dutta G., Basu S., Vaidyanathan K. (2005) Term Structure Estimation in Illiquid Government Bond Markets: An Empirical Analysis for India. *Journal of Emerging Market Finance*, 4, 1, pp. 63–80.
- Elton E.J., Gruber M.J., Agrawal D., Mann C. (2001) Explaining the Rate Spread on Corporate Bonds. *The Journal of Finance*, 56, 1, pp. 247–277.
- Fama E.F., Bliss R.R. (1987) The Information in Long-Maturity Forward Rates. *The American Economic Review*, 77, 4, pp. 680–692.
- Feldhuetter P., Lando D. (2008) Decomposing Swap Spreads. *Journal of Financial Economics*, 88, 2, pp. 375–405.
- Gambarov G., Shevchuk I., Balabushkin A. (2004) Assessment of the term Structure of Interest Rates. The Role of Sovereign Debt Market in Estimation of Interest Rate Term Structure [In Russian]. *Securities Market*, 13, pp. 1–33.
- Hull J., White A. (2015) OIS Discounting, Interest Rate Derivatives, and the Modelling of Stochastic Interest Rate Spreads. *Journal of Investment Management*, 13, 1, pp. 64–83.
- Kazakhstan Stock Exchange (2019) *Methodology for Yield Curve Estimation from Kazakhstan Sovereign Bond Market* [In Russian]. Available at: [https://kase.kz/files/normative\\_base/metodika\\_gzb.pdf](https://kase.kz/files/normative_base/metodika_gzb.pdf)
- Khakimzhanov S., Mustafin Y., Kubenbayev O., Atabek D. (2019) Constructing a Yield Curve in a Market with Low Liquidity [In Russian]. *Russian Journal of Money and Finance*, 78, 4, pp. 71–98.
- Kosianenko A.V. (2007) *Missing Market Data Imputation Using Bayesian Inference* [In Russian]. Working Paper WP16/2007/02. Moscow: NRU HSE.
- Kurbangaleev M., Lapshin V. (2015) An Analysis of the Risk-Free Term Structure Estimation Requirements Posed by Various Financial Problems [In Russian]. *Financial Risk Management Journal*, 1, pp. 50–60.
- Lapshin V., Sohatskaya S. (2020) Choosing the Weighting Coefficients for Estimating the Term Structure from Sovereign Bonds. *International Review of Economics and Finance*, 70, pp. 635–648.
- Lapshin V., Tereshchenko M. (2018) The Choice of the Model of the Term Structure of Interest Rates on the Basis of Its Properties [In Russian]. *Journal of Corporate Finance Research*, 12, 2, pp. 53–69.
- Lien D., Shrestha K. (2014) Price Discovery in Interrelated Markets. *The Journal of Futures Markets*, 34, 3, pp. 203–219.
- Liu J., Longstaff F.A., Mandell R.E. (2006) The Market Price of Risk in Interest Rate Swaps: The Roles of Default and Liquidity Risks. *The Journal of Business*, 79, 5, pp. 2337–2359.
- Longstaff F.A., Mithal S., Neis E. (2005) Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market. *The Journal of Finance*, 60, 5, pp. 2213–2253.
- Luiz A., Ribeiro B. (2008) Estimating and Comparing the Term Structure of Interest Rates for Assets with Frequent and Infrequent Trading. *The Open Business Journal*, 1, pp. 25–33.
- McCulloch J.H. (1971) Measuring the Term Structure of Interest Rates. *The Journal of Business*, 44, 1, pp. 19–31.
- Moscow Stock Exchange (2017) *Methodology of Calculation of the Zero Coupon Government Bonds Yield Curve*. Available at: <https://fs.moex.com/files/14299>
- Muthon L., Onyango S., Ongat O. (2015) Extraction of Zero Coupon Yield Curve for Nairobi Securities Exchange: Finding the Best Parametric Model for East African Securities Markets. *Journal of Mathematics and Statistical Science*, 1, pp. 51–74.
- Nagy K. (2020) Term Structure Estimation with Missing Data: Application for Emerging Markets. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 75, pp. 347–360.
- Nelson C.R., Siegel A.F. (1987) Parsimonious Modeling of Yield Curves. *The Journal of Business*, 60, 4, pp. 473–489.

- Poghosyan K., Poghosyan A. (2019) Yield Curve Estimation and Forecasting in Armenia. *Armenian Journal of Economics*, 4, pp. 1–21.
- Rubin D.B. (1976) Inference and Missing Data. *Biometrika*, 63, 3, pp. 581–592.
- Smirnov S.N., Lapshin V.A., Kurbangaleev M.Z. (2017) Deriving Implied Risk-Free Interest Rates from Bond and CDS Quotes: A Model-Independent Approach. *Optimization and Engineering*, 18, pp. 499–536.
- Subramanian K.V. (2001) Term Structure Estimation in Illiquid Markets. *The Journal of Fixed Income*, 11, 1, pp. 77–86.
- Svensson L.E.O. (1994) *Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992–1994*. Working Paper no 4871. National Bureau of Economic Research.
- Teplova T.V. (2018) Comparative Analysis of Russian Bond Market as of End of 2017 [In Russian]. *Management Accounting and Finance*, 54, 2, pp. 96–103.
- Vasicek O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 2, pp. 177–188.
- Warga A. (1992) Bond Returns, Liquidity, and Missing Data. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, 4, pp. 605–617.
- Xie C., Chen H., Yu X. (2006) Yield Curve Estimation in the Illiquid Market: Framework, Models and Empirical Study. *International Journal of Information Technology and Decision Making*, 5, 3, pp. 467–481.
- Zhu H. (2006) An Empirical Comparison of Credit Spreads between the Bond Market and the Credit Default Swap Market. *Journal of Financial Services Research*, 29, 3, pp. 211–235.
- Zoricic D., Orsag S. (2013) Parametric Yield Curve Modeling in an Illiquid and Undeveloped Financial Market. *UTMS Journal of Economics*, 4, 3, pp. 243–252.