

## Сравнение моделей прогноза волатильности криптовалют и фондового рынка

**Аганин А.Д., Маневич В.А.,  
Пересецкий А.А., Погорелова П.В.**

В статье сравниваются между собой GARCH и HAR-модели для прогноза на один день вперед реализованной волатильности финансовых рядов. В качестве примера выбрана криптовалюта с наибольшей капитализацией – Bitcoin. Ее реализованная волатильность вычисляется по внутрисуточным (внутрисуточным – 24 часа) данным, с использованием закрывающих значений пятиминутных торговых интервалов. В работе предложен способ вычисления реализованной волатильности для случая наличия пропусков в пятиминутных внутрисуточных данных. Это позволяет добиться сопоставимости дневных величин реализованной волатильности активов, время торгов которых отличается. Среди выбранных для прогнозирования дней практически в равной степени присутствуют все дни недели. Для сравнения выбран актив – E-mini S&P 500 – фьючерсный контракт, который торгуется 23 часа в сутки. Сравнение происходит на интервале наблюдений с 01.01.2018 г. по 29.12.2021 г. Поскольку на этом интервале могли быть (и были) структурные изменения рынков, то модели оцениваются в скользящих окнах длиной 399 дней. Для каждого ряда сравниваются 810 GARCH-моделей (с учетом всех спецификаций моделей), а также 46312 HAR-моделей (с учетом различных преобразований данных 138936 моделей). Для отбора лучших моделей используется MCS-тест (на уровне значимости 0,01). Показано, что GARCH-модели уступают HAR-моделям в точности прогноза как реализованной волатильности Bitcoin, так и E-mini S&P 500. При этом относительная точность

---

Статья подготовлена при поддержке Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

**Аганин Артем Давидович** – к.э.н.; независимый исследователь. E-mail: artyomaganin@gmail.com

**Маневич Вячеслав Андреевич** – аспирант 1 года; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». E-mail: vmanevich@hse.ru

**Пересецкий Анатолий Абрамович** – д.э.н.; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». E-mail: aperesetsky@hse.ru

**Погорелова Полина Вячеславовна** – аспирант 3 года; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики». E-mail: pvrpogorelova@gmail.com

Статья поступила: 31.10.2022/Статья принята: 26.01.2023.

прогноза реализованной волатильности Bitcoin выше, чем точность прогноза реализованной волатильности фьючерса E-mini S&P 500. Наименьшие относительные погрешности для прогнозов реализованной волатильности Bitcoin и E-mini S&P 500 составляют соответственно 29,5 и 36,1%.

**Ключевые слова:** биткоин; криптовалюта; реализованная волатильность; E-mini S&P 500; GARCH-модель; HAR-RV-модель.

**DOI:** 10.17323/1813-8691-2023-27-1-49-77

**Для цитирования:** Аганин А.Д., Маневич В.А., Пересецкий А.А., Погорелова П.В. Сравнение моделей прогноза волатильности криптовалют и фондового рынка. *Экономический журнал ВШЭ*. 2023; 27(1): 49–77.

**For citation:** Aganin A.D., Manevich V.A., Peresetsky A.A., Pogorelova P.V. Comparison of Cryptocurrency and Stock Market Volatility Forecast Models. *HSE Economic Journal*. 2023; 27(1): 49–77. (In Russ.)

## 1. Введение

Первая и занимающая большую часть рынка криптовалют цифровая валюта Bitcoin была создана Satoshi Nakamoto – разработчиком или группой разработчиков в 2009 г., сразу после финансового кризиса 2008 г. Предполагалось, что Bitcoin станет аналогом классических биржевых инструментов и прочих финансовых активов. Его отличительной особенностью являлась полная децентрализованность сети и анонимность пользователей, что позволяло совершать неотслеживаемые транзакции. Изначально Bitcoin не получил большой популярности или признания, в 2010 г. его стоимость не достигала 0,5 долл. Первый скачок роста пришелся на 2014 г., тогда его цена достигала почти 1000 долл. Однако после небольшого пика популярности средняя стоимость криптовалюты опустилась до 400 долл. и держалась на таком уровне с небольшими колебаниями вплоть до начала 2017 г. В 2017 г. начался сильный рост, который достиг своего пика в декабре 2017 г. – стоимость одного Bitcoin достигала 17,5 тыс. долл. Период роста сменился спадом, который длился вплоть до октября 2020 г. Затем Bitcoin начал быстро расти, и 10.11.2021 г. его курс превысил 69 тыс. долл. за один Bitcoin, при этом капитализация достигла 1260 млрд долл. Далее цена опускалась и в августе 2022 г. была менее 15 тыс. долл. и капитализация 460 млрд долл.

Подобный скачок некоторые исследователи связывают с пандемией коронавируса, а также увеличением возможностей оплаты товаров и услуг криптовалютой. Идея создания Bitcoin подтолкнула многих энтузиастов к созданию своих собственных криптовалют. Некоторые из них отличаются от Bitcoin по протоколам работы и взаимодействия, некоторые достигли колоссальной капитализации (Ethereum), однако до сих пор Bitcoin является «главной» криптовалютой и, как правило, изменения его курса влекут за собой схожие изменения курса прочих криптовалют.

Высокая волатильность Bitcoin отличает его от классических финансовых инструментов, таких, например, как индекс S&P 500. Данный индекс является одним из основ-

ных мировых финансовых индексов, он включает в себя акции 505 крупнейших компаний США. В данный момент его капитализация оценивается в 80% от капитализации фондового рынка США, он содержит акции компаний различных секторов экономики, как промышленных, так и финансовых компаний. Bitcoin и S&P 500, можно сказать, представляют две стороны современного биржевого рынка и их анализ, в общем и целом, позволяет судить о прочих участниках рынка.

Индекс S&P 500 является значительно менее волатильным активом. По объему он существенно превосходит рынок Bitcoin. Его капитализация в мае 2022 г. составляла около 38 трлн долл.

Задача прогнозирования волатильности финансовых активов является исключительно важной для инвесторов, банков. Под прогнозом волатильности подразумевается прогноз (ненаблюдаемой) величины – *условной волатильности*  $\sigma_{t+1}^2 = V_t(r_{t+1}) = V(r_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ , где  $r_{t+1}$  – доходность актива в день  $t+1$ ;  $\mathcal{F}_t$  – информация, доступная в день  $t$ . В предположении  $E_t(r_{t+1}) = 0$  получаем  $\sigma_{t+1}^2 = E_t(r_{t+1}^2) = E(r_{t+1}^2 | \mathcal{F}_t)$ . Поскольку условная волатильность  $\sigma_{t+1}^2$  ненаблюдаема, то сравнение качества ее прогнозов  $h_{t+1}$  производится сравнением прогноза  $h_{t+1}$  с некоторым ее аналогом (прокси)  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$ . В качестве  $\hat{\sigma}_{t+1}^2$  в статьях часто берут  $r_{t+1}^2$  (оценка по двум значениям цены в день  $t$ ), либо выборочную волатильность по наблюдениям  $r_{t-k+2}, r_{t-k+3}, \dots, r_{t+1}$  (за  $k$  последних дней), либо реализованную волатильность  $RV_{t+1}^d$ . В данной статье используется реализованная волатильность, поскольку она рассчитывается по большому количеству внутрисуточных наблюдений в день  $t+1$  и поэтому содержит меньше шума, чем первые два аналога. Заметим, что выбор «оптимальной» модели прогноза зависит также от функции потерь  $\mathcal{L}(\hat{\sigma}_{t+1}^2, h_{t+1})$ , которую использует потребитель прогноза. Потребитель может быть также заинтересован в «оптимальном» прогнозе  $\sigma_{t+1} = \sqrt{\sigma_{t+1}^2}$  или  $\ln \sigma_{t+1}$ .

Значительное количество работ посвящено применению моделей семейства GARCH для прогнозирования волатильности курсов традиционных финансовых инструментов, акций, индексов и курсов валют.

Например, Кисинбай [Kisinbay, 2010] использует реализованную волатильность для сравнения прогнозов и приходит к выводу, что асимметричные GARCH-модели типа EGARCH, APARCH и TS-GARCH по точности прогноза превосходят GARCH при прогнозировании волатильности акций, асимметричные модели также дают лучшие прогнозы и для валютных курсов.

Другое направление прогноза волатильности, не использующее параметрические модели, – HAR-RV (heterogeneous autoregressive model for realized volatility) модели были предложены Корси [Corsi, 2009], после чего появилось множество работ с различными усовершенствованиями, модификациями и сравнениями этих моделей с уже существующими.

Авторы работы [Lahaye, Shaw, 2014] рассматривали произвольную нелинейную функцию от лагированных дневной, недельной и месячной волатильностей как модель

для прогноза реализованной волатильности на один шаг и показали, что для моделирования индекса S&P 500 достаточно стандартной линейной спецификации HAR-RV(1,5,21) модели. В этой модели учитывается гетерогенность рынка, поскольку кроме значения реализованной волатильности предыдущего дня в ней используются ее средние за неделю (5 торговых дней) и за месяц (21 торговый день).

В работе [Mastro, 2014] использовалась реализованная волатильность как прокси условной волатильности. На примере прогнозирования волатильности фондовых индексов S&P 500, DAX, FTSE 100, NIKKEY 255 было показано, что самая простая HAR-RV-модель превосходит модели GARCH(1,1) и EGARCH(1,1). В качестве меры точности прогноза использовалась MSE (среднеквадратичное отклонение).

Сравнительное исследование GARCH и HAR-моделей на данных биржевых активов российских компаний проведено в статье [Аганин, 2017]. В работе проведено сравнение 88 GARCH-моделей с моделями ARFIMA и HAR-RV. В результате было получено, что GARCH и ARFIMA-модели уступают моделям семейства HAR в прогнозной силе.

К 2014 г. развитие рынка Bitcoin вызвало интерес к моделированию его волатильности. Гронвалд [Gronwald, 2014] был одним из первых, кто оценил GARCH-модель со скачкообразной интенсивностью доходностей на примере криптовалют. Он обнаружил, что цены на Bitcoin характеризуются экстремальными движениями цен, что является признаком незрелого рынка, что не удивительно, ведь в 2014 г. рынок криптовалют, фактически, только начинал формироваться.

Авторы исследования [Chen et al., 2016] использовали различные спецификации моделей GARCH для анализа индексов CRIX (Cryptocurrency Index – индекс, составленный по 30 криптовалютам), используя ежедневные данные за 2014–2016 гг. Авторы пришли к выводу, что модель  $t$ -GARCH (1,1) (с  $t$ -распределением ошибок) является наилучшей моделью для всех данных выборки на основе критериев AIC и BIC.

Авторы работы [Pichl, Kaizoji, 2017] использовали модель HAR-RV со скачками, а также дневное распределение логарифмов доходности для моделирования волатильности биткоина. Они обнаружили, что модель HAR-RV-] достаточно хорошо отражает динамику реализованной волатильности биткоина.

Исследователи [Caporale, Zekokh, 2019] попытались определить набор лучших моделей, используя более 1000 GARCH-моделей для прогнозирования волатильности некоторых популярных криптовалют. Они пришли к выводу, что стандартные GARCH-модели недостаточно эффективны для моделирования волатильности криптовалют.

В работе [Kaya Soylu et al., 2020] волатильность трех криптовалют, Ripple, Ethereum и Bitcoin, моделировалась с учетом свойств долгой памяти этих криптовалют. Было показано, что на криптовалютном рынке существует эффект долгой памяти. Получен результат, что гиперболическая модель HYGARCH является наиболее подходящей моделью для Bitcoin, FIGARCH со скошенным распределением Стьюдента дает лучшие оценки для Ethereum, а модель FIGARCH с распределением Стьюдента хорошо подходит для доходности Ripple.

В работе [Chkili, 2021] исследуется модель длинной памяти и модель переключения Маркова. Эмпирические результаты указывают на присутствие длинной памяти в динамике волатильности рынка биткоина. Модель FIGARCH, явно учитывающая длинную память, превосходит все остальные модели в моделировании волатильности цен на Bitcoin.

Исследователи [Segnon, Bekiros, 2020] рассматривают GARCH-модели и марковские модели переключения для определения режимности Bitcoin и построения прогноза. Авторы подтверждают, что Bitcoin характеризуется сменой режимов, долгой памятью и мультифрактальностью. Мультифрактальные марковские модели переключения и FIGARCH превосходят другие модели типа GARCH в прогнозировании волатильности Bitcoin. Более того, комбинированные прогнозы улучшают прогнозы, полученные с помощью отдельных моделей.

В работе [Panagiotidis et al., 2022] проведен широкий сравнительный анализ GARCH-моделей с 1, 2, 3-мя марковскими режимами переключения для 292 криптовалют. Оказалось, что для прогноза волатильности на один шаг для биткойна наилучший результат как по MSE и MAE-критериям показывает NGARCH-N с одним режимом (однако для большинства других криптовалют наилучший результат показали модели с двумя режимами. Модели с переключением режимов могут учитывать структурные изменения рынка. Эта цель может достигаться также и при оценке моделей в скользящих окнах.

Авторы работы [Bergsli et al., 2022] сравнивают прогнозы реализованной волатильности Bitcoin, полученные при помощи различных GARCH и HAR-моделей. Авторы получили, что EGARCH и APARCH показывают лучшие результаты среди GARCH-моделей. Однако модели HAR работают лучше, чем модели GARCH, основанные на дневных данных. Превосходство моделей HAR над моделями GARCH сильнее всего проявляется при прогнозировании краткосрочной однодневной волатильности. Погрешности HAR-моделей, приведенных авторами, составляют порядка 40–60%.

В данной работе проводится исследование применимости GARCH-моделей с разнообразными моделями распределения ошибок, а также HAR-моделей и их различных спецификаций в задачах прогнозирования реализованной волатильности на один шаг вперед в скользящем окне длиной 399 значений с шагом в 5 значений. В качестве примеров выбраны Bitcoin и E-mini S&P 500, представляющие криптовалютный и классический фондовый рынки.

Тематика работы [Bergsli et al., 2022] близка к данной, однако в нашей работе мы проводим значительно более широкий анализ моделей, не фиксируя порядки недельной и месячной компонент HAR-моделей. Кроме того, для сравнения моделей для Bitcoin и E-mini S&P 500 рассматриваются только те дни торговли Bitcoin, в которые также торговался и фьючерс. Отметим, что погрешности прогноза отобранных моделей для Bitcoin на 10% ниже, чем в работе [Bergsli et al., 2022].

Отличительной чертой работы является перебор значительного числа GARCH (810 моделей) и HAR (138936 моделей) для прогнозирования реализованной волатильности Bitcoin и фьючерса E-mini S&P 500. После построения прогнозов при помощи MCS-теста проводится отбор наилучших моделей по точности прогноза на один день вперед.

## 2. Данные

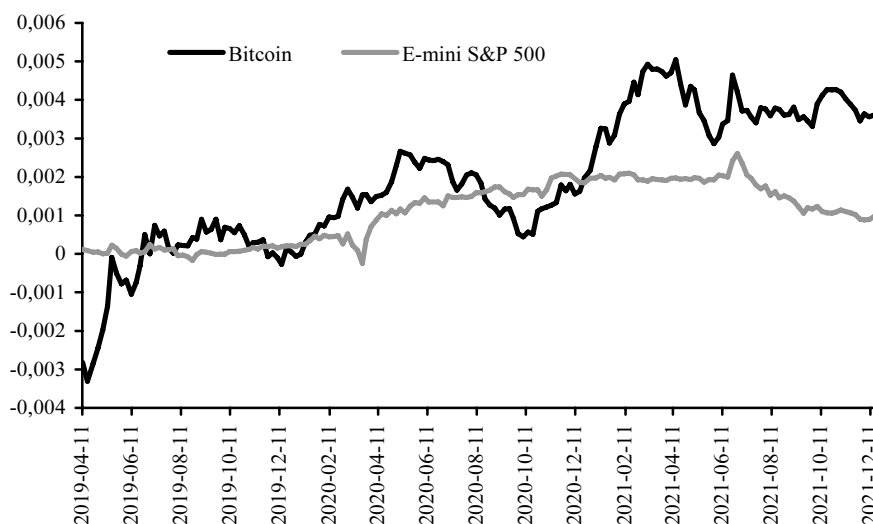
В работе исследуется период с 01.01.2018 г. по 29.12.2021 г. (включительно), все данные с частотой 5 минут взяты с сайта *finam.ru*.

В качестве представителей рынка криптовалют и фондового рынка для анализа выбраны следующие биржевые активы (выбор определен, в том числе, наличием высокочастотных данных):

- Bitcoin (btc) – криптовалюта с наибольшей капитализацией, фактически наиболее представительная из криптовалют, с наибольшей историей. Торгуется 24/7.

- E-mini S&P 500 – это фьючерсный контракт, который торгуется на Чикагской товарной бирже (CME), представляющий одну пятую стоимости стандартного фьючерсного контракта на индекс S&P 500. В индекс S&P 500 включены: 400 промышленных корпораций, 20 транспортных, 40 финансовых и 40 коммунальных. Почти все компании обращаются на NYSE, однако присутствуют и те, которые торгуются на AMEX и Nasdaq. Базовым активом для этого фьючерса является значение фондового индекса S&P 500. Данный фьючерс представляет ценность для исследования, так как он связан с одним из крупнейших индексов S&P 500 и торгуется почти полный день. Торговля ведется с 6<sup>00</sup> воскресенья по 5<sup>00</sup> пятницы (время Чикагской биржи) с ежедневным перерывом с 5<sup>00</sup> до 6<sup>00</sup>.

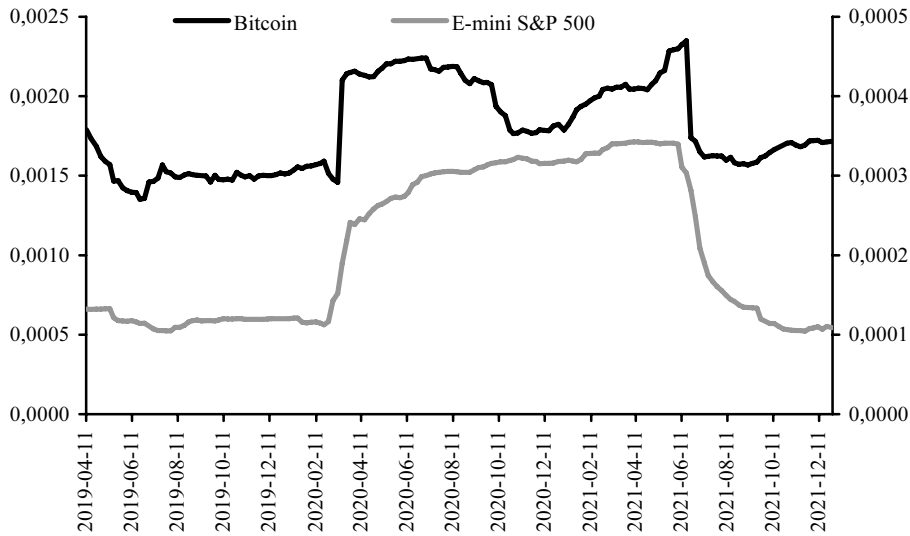
На рис. 1 представлены средние однодневных доходностей активов, рассчитанных в скользящем окне длины 399 дней (шаг скользящего окна 5 дней). Как можно видеть, доходность btc характеризуется довольно сильными изменениями, хотя в целом присутствует восходящий тренд. В то же время для доходностей фьючерса в целом не наблюдается таких резких и частых скачков, кроме периодов с марта по апрель 2020 г. и с мая по июнь 2021 г. В конце интервала наблюдений средние доходности btc выше, чем доходности фьючерса. Отметим, что значения оси абсцисс соответствуют правому концу окна.



**Рис. 1.** Средние однодневных доходностей активов, рассчитанных в скользящем окне длины 399 дней

На рис. 2 представлены выборочные дисперсии однодневных доходностей, рассчитанные в скользящих окнах длиной 399 дней. Дисперсия доходностей btc выше, чем дисперсия доходностей фьючерса. Для btc в период с марта по апрель 2020 г. наблюдается резкий скачок, а с мая по июнь 2021 г. – падение. Аналогичный подъем есть и на графике

E-mini S&P 500, что свидетельствует о схожести процессов волатильностей активов, возникающей в процессе развития рынка криптовалют. Скачок волатильности в начале 2020 г., вероятно, связан с пандемией COVID-19.



**Рис. 2.** Выборочные дисперсии однодневных доходностей, рассчитанные в скользящих окнах длины 399 дней. Левая шкала – Bitcoin, правая шкала – E-mini S&P 500

## 2.1. Реализованные волатильности

В качестве реализованной волатильности используется пятиминутная реализованная волатильность. Выбор именно таких временных промежутков обусловлен исследованием [Andersen, Bollerslev, 1998], в котором показано, что значения реализованной волатильности, рассчитанные по пятиминутным интервалам, являются наиболее оптимальными с точки зрения точности с учетом микроструктуры ошибок, возникающих в результате особенностей и специфики финансовых рынков. Ранее такая же форма расчета волатильности использовалась в работе [Маневич и др., 2022].

Реализованная волатильность в день  $t$  представляется в виде

$$(1) \quad RV_t = \sqrt{\sum_{j=1}^{288} r_{t,j}^2},$$

где  $r_{t,j} = \log(p_{t,j}) - \log(p_{t,j-1})$  – доходности;  $p_{t,j}$  – цена актива в день  $t$  на конец внутрисуточного интервала  $j$  длины 5 минут, с общим числом таких интервалов за один день, равным 288.

$RV$ , описанная выше, является корнем из реализованной дисперсии (realized variance). Реализованная волатильность является прокси для ненаблюдаемой волатильности, ее непараметрической оценкой.

В GARCH-моделях используемого программного пакета прогнозируются значения условной дисперсии  $\sigma_t$  (в качестве ее прокси берутся  $RV$ , указанные выше). В программном пакете для расчета HAR-моделей прогнозируются реализованные дисперсии, после чего от них берутся корни для получения реализованных волатильностей.

В том случае, когда есть наблюдения по всем пятиминуткам, реализованная волатильность в день  $t$  рассчитывается по формуле (1). Однако есть дни с неполными данными. В этом случае для получения соизмеримых результатов в данной работе реализованная волатильность вычисляется следующим образом:

- если в сутках имеются данные менее чем за 5 часов, то соответствующий день удаляется из выборки;
- при пропуске наблюдений в начале и/или конце суток реализованная волатильность рассчитывается по имеющимся  $K$  пятиминутным интервалам, а затем приводится к суточным данным масштабированием:

$$(1b) \quad RV_t = \sqrt{\frac{288}{K} \sum_{j=1}^K r_{t,j}^2};$$

- в случае пропуска данных внутри суток, например, между моментами  $j_1$  и  $j_2$ , соответствующая сумма заменяется на квадрат доходности за пропущенный период.

Таким образом, получена сопоставимость значений дневной реализованной волатильности фьючерса с дневной реализованной волатильностью Bitcoin в разные дни.

На рис. 3 представлены реализованные волатильности Bitcoin и E-mini S&P 500 в логарифмическом масштабе.

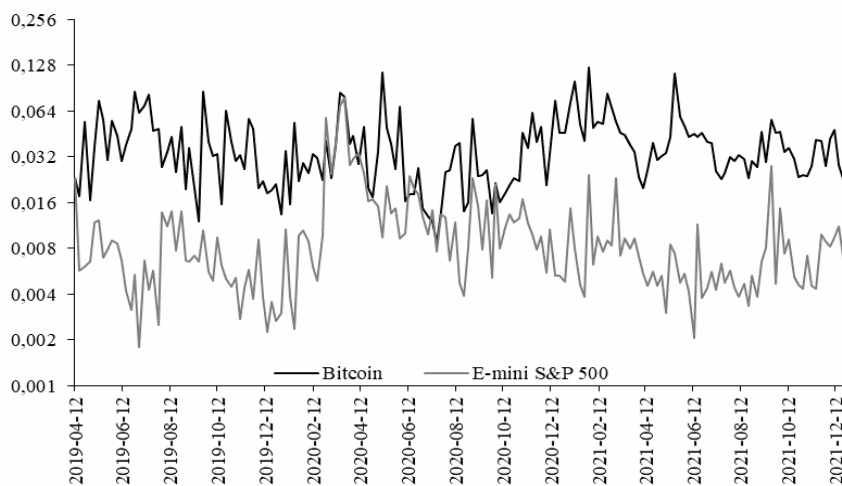


Рис. 3. Реализованная волатильность Bitcoin (черная линия) и E-mini S&P 500



Волатильность Bitcoin выше чем волатильность E-mini S&P 500. Это соответствует тому, что рынок криптовалюты молодой и объем его гораздо меньше, чем объем фондового рынка. Оба графика демонстрируют волатильность реализованной волатильности.

### 3. Методология

В данной работе модели сравниваются по точности прогноза волатильности на один день вперед. Поскольку в течение рассматриваемого периода изменялись макроэкономические показатели, изменялся объем торговли криптовалютой, то было бы неправильно предполагать постоянство параметров моделей на всем интервале наблюдений. Поэтому каждая из моделей оценивается в скользящем окне длиной 399 дней и делается прогноз на один день вперед. Размер окна выбран из соображений получения устойчивых оценок параметров GARCH-моделей.

Для сокращения времени расчетов шаг сдвига окна выбран 5 дней. Поскольку некоторые дни пропущены, то получено следующее распределение прогнозов по дням недели (см. табл. 1). В целом, распределение прогнозов по дням недели почти равномерное, что делает результаты репрезентативными.

Таблица 1.

Встречаемость дней недели		
	Частота встречаемости	Процент от выборки
День недели:		
понедельник	27/170	15,9
вторник	27/170	15,9
среда	31/170	18,2
четверг	30/170	17,6
пятница	28/170	16,5
воскресенье	27/170	15,9

Для сравнения моделей по точности прогноза используется MCS-тест (Model Confidence Set), введенный в работе [Hansen et al., 2011]<sup>1</sup>. Этот тест позволяет учесть несовершенство данных, и, при его наличии, выбирается не одна, а несколько моделей, которые в равной степени лучше прочих.

В качестве метрик ошибки в MCS-тесте в работе используются три различные функции потерь:

$$(2) \quad MSE = (RV_k - h_k)^2,$$

$$(3) \quad MAE = |RV_k - h_k|,$$

<sup>1</sup> Выбран уровень значимости 0,01.

$$(4) \quad MAPE = \left| \frac{RV_k - h_k}{RV_k} \right| \cdot 100\%,$$

где  $h_k$  – прогноз на момент времени  $k$ ;  $RV_k$  – значение реализованной волатильности в день  $k$ . Тест проводится на уровне значимости 0,01.

Сравнение производится по метрикам (2)–(4) для GARCH-моделей и (2)–(3) для HAR-моделей.

В работе рассмотрено 810 моделей типа GARCH и 46312 HAR-моделей трех типов. Поскольку MCS-тест является требовательным к мощности компьютера, то для сокращения времени расчетов используется следующая процедура. Для каждого типа моделей отбирались 400 лучших, т.е. с наименьшими значениями средних значений ошибок, после чего отобранные модели сравнивались MCS-тестом. Для сокращения объема таблиц результатов приводятся только значения функций потерь для наилучшей из моделей, отобранных MCS-тестом.

### 3.1. GARCH-модели

Все GARCH-модели рассматриваются с AR(1)-частью для доходностей (среднее значение равно нулю):

$$r_t = \phi r_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где  $r_t$  – доходность в момент  $t$ ;  $\phi$  – параметр. Предварительный анализ AR-моделей показал, что лаги выше второго незначимы. В скользящих окнах и параметр  $\phi$ , как правило, оказывается незначимым, но он включен в модель для более корректного оценивания параметров GARCH-моделей. В работе [Angelidis, 2004] также отмечается, что оценки параметров волатильности в GARCH-моделях практически не зависят от порядка AR-спецификации.

Для оценивания GARCH-моделей используется метод максимального правдоподобия, с робастными стандартными ошибками и тестами [White, 1982], реализованный в пакете «rugarch» языка R<sup>2</sup>.

В сравнении участвуют следующие десять GARCH-моделей.

1. Стандартная GARCH( $p, q$ ) модель [Bollerslev, 1986].

$$(5) \quad \varepsilon_t = \sigma_t z_t,$$

$$(6) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2,$$

где  $\sigma_t^2$  – условная дисперсия в момент  $t$ ;  $r_t$  – доходность в момент  $t$ ;  $\phi, \theta, \alpha, \beta$  – параметры, оцениваемые методом максимального правдоподобия;  $\xi$  – шум, от распределения которого зависит модель (в классической модели  $\xi \sim i.i.d.N(0,1)$ ).

<sup>2</sup> Package «rugarch» (2022). См.: <https://cran.r-project.org/web/packages/rugarch/rugarch.pdf>

## 2. Экспоненциальная GARCH-модель – EGARCH [Nelson, 1991].

Эта модель учитывает асимметрию влияния положительных и отрицательных шоков. Кроме того, поскольку в уравнении используется логарифм условной дисперсии, то прогнозное значение условной дисперсии  $\sigma_t^2$  автоматически положительно (в отличие от GARCH( $p, q$ ) модели).

$$(7) \quad \ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q [\alpha_i z_{t-i} + \gamma_i (|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)] + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

(параметры  $p, q, a_0$  и векторы  $\alpha, \beta, \gamma$ ).

## 3. Пороговая GJR-GARCH [Glosten et al., 1993].

$$(8) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \gamma_i I_{t-i}^-) \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \text{где } I_{t-i}^- = \begin{cases} 1, & \varepsilon_t < 0, \\ 0, & \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

(параметры  $p, q, a_0$  и векторы  $\alpha, \beta, \gamma$ ).

## 4. Асимметричная степенная ARCH-APARCH [Ding et al., 1993]:

$$(9) \quad \sigma_t^\lambda = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\lambda + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\lambda$$

(параметры  $p, q, a_0, \lambda$  и векторы  $\alpha, \beta, \gamma$ ).

## 5. Component sGARCH-csGARCH [Lee, Engle, 1999].

Эта модель раскладывает условную дисперсию на постоянную и временную компоненты, чтобы исследовать долгосрочные и краткосрочные движения волатильностей.

$$(10) \quad \sigma_t^2 = q_t + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i}^2 - q_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sigma_{t-j}^2 - q_{t-j}),$$

$$(11) \quad q_t = w + \rho q_{t-1} + \phi (\varepsilon_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2)$$

(параметры  $p, q, w, \rho, \phi$  и векторы  $\alpha, \beta$ ), где  $q_t$  – постоянная компонента условной дисперсии. Разница между условной дисперсией и ее трендом  $(\sigma_{t-j}^2 - q_{t-j})$  является временной (транзитивной) компонентой условной дисперсии.

## 6. ALLGARCH-HGARCH [Hentschel, 1995].

$$(12) \quad \sigma_t^\lambda = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^\lambda (|z_{t-i} - \tau_{2i}| - \tau_{1i} (z_{t-i} - \tau_{2i}))^\lambda + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\lambda$$

(параметры  $p, q, w, \lambda$  и векторы  $\alpha, \beta, \tau_1, \tau_2$ ).

7. Asymmetric Absolute Value GARCH, AVGARCH [Taylor, 1986; Schwert, 1990].

$$(13) \quad \sigma_t = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i} (|z_{t-i} - \tau_{2i}| - \tau_{1i} (z_{t-i} - \tau_{2i})) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}$$

(параметры  $p, q, w$  и векторы  $\alpha, \beta, \tau_1, \tau_2$ ).

8. Threshold GARCH-TGARCH [Zakoian, 1994].

$$(14) \quad \sigma_t = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i} (|z_{t-i}| - \tau_i z_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}$$

(параметры  $p, q, w$  и векторы  $\alpha, \beta, \tau$ ).

9. Nonlinear ARCH-NARCH [Higgins et al., 1992].

$$(15) \quad \sigma_t^\lambda = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^\lambda |z_{t-i}|^\lambda + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\lambda$$

(параметры  $p, q, w, \lambda$  и векторы  $\alpha, \beta$ ).

10. Nonlinear Asymmetric GARCH-NAGARCH [Engle, Ng, 1993]:

$$(16) \quad \sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^q \alpha_i \sigma_{t-i}^2 (z_{t-i} - \tau_i)^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

(параметры  $p, q, w$  и векторы  $\alpha, \beta, \tau$ ).

Отметим, что модели 1, 3, 4, 7, 8, 9, 10 являются частными случаями модели 6, при наложении ограничений на параметры. Конечно, значение функции правоподобия при оценке моделей будет наибольшее для модели 6 (без ограничений на параметры). Это, однако, не означает, что полная модель будет наилучшей по точности прогноза.

Каждая из выше перечисленных моделей GARCH-типа оценивается с каждой из девяти моделей условного распределения нормированных ошибок  $z_t = \varepsilon_t / \sigma_t$ , приведенных ниже.

1. Стандартное нормальное распределение (*norm*) с функцией плотности

$$(17) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2. Скошенное нормальное распределение (*snorm*) [O'Hagan, Leonard, 1976], с плотностью параметра, зависящей от параметра скошенности  $\alpha$  :

$$(18) \quad f(x) = 2\varphi(x)\Phi(\alpha x),$$

где  $\varphi(x)$  и  $\Phi(x)$  – функция плотности вероятности и функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Дисперсия равна  $1 - \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2}$ .

3. Нормальное обратное гауссовское распределение (*nig*)

$$(19) \quad f(x, \theta) = \frac{\alpha \delta}{\pi} \exp\left(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right) \frac{K_1\left(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right)}{\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}},$$

где  $x \in R$ , параметры  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in (-\alpha, \alpha)$ ,  $\delta \in (0, \infty)$ ,  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ ,

а  $K_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2} w(u + u^{-1})\right) du$  – модифицированная функция Бесселя третьего рода с индексом единица.

Дисперсия этого распределения равна  $\alpha^2 \delta (\alpha^2 - \beta^2)^{-3/2}$ , для нормировки дисперсии на единицу можно взять  $\delta = \alpha^{-2} (\alpha^2 - \beta^2)^{3/2}$ .

4.  $t$ -распределение Стьюдента (*std*) с  $\nu$  степенями свободы.

$$(20) \quad f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\beta \nu \pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\beta \nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}.$$

Для нормировки дисперсии на единицу полагаем  $\beta = \frac{\nu-2}{\nu}$ .

5. Скошенное  $t$ -распределение Стьюдента (*sstd*) имеет плотность

$$(21) \quad f(z, \xi) = \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} \left[ f(\xi z) I(-z) + f(z/\xi) I(z) \right],$$

где  $f(x)$  плотность распределения Стьюдента,  $I(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0, \end{cases}$ . Параметры  $\xi, \beta, \nu$  вы-

бираются так, что дисперсия равна единице.

6. Обобщенное распределение ошибок (*ged*).

$$(22) \quad f(x) = \frac{k e^{-0,5 \left| \frac{x-\alpha}{\beta} \right|^k}}{2^{1+k^{-1}} \beta \Gamma(k^{-1})},$$

где  $\alpha, \beta, k$  – параметры расположения, масштаба и формы.

Для нормировки дисперсии на единицу имеем  $\beta = 2^{-1/k} \sqrt{\frac{\Gamma(k^{-1})}{\Gamma(3k^{-1})}}$ .

7. Скошенное обобщенное распределение ошибок (sged).

Функция плотности имеет громоздкий вид и получается из плотности обобщенного распределения ошибок (22) с помощью введения параметра скошенности  $\xi$ , аналогично (21).

8. Johnson's reparametrized SU распределение (jsu).

Первая версия распределения – Johnson's SU-распределение было предложено Джонсоном [Johnson, 1949]. Репараметризация увеличивает куртозис, но, при том, сохраняет математическое ожидание и дисперсию обычного Johnson's SU.

$$(23) \quad f(z) = \frac{\theta}{\eta \sqrt{1 + \left(\frac{z - \tau}{\eta}\right)^2}} \varphi\left(v + \theta sh^{-1}\left(\frac{z - \tau}{\eta}\right)\right)$$

(параметры  $\theta, \eta, \tau, v$ ; функция  $\varphi$  – плотность стандартного нормального распределения).

9. Обобщенное гиперболическое распределение (ghyp).

$$(24) \quad f(x; \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\gamma/\delta)^\lambda}{\sqrt{2\pi} K_\lambda(\delta\gamma)} \frac{K_{\lambda-1/2}\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right)}{\left(\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}/\alpha\right)^{1/2-\lambda}} e^{\beta(x-\mu)},$$

где  $K_\lambda$  – модифицированная функция Бесселя третьего рода порядка  $\lambda$ ;  $\delta$  – коэффициент масштаба;  $\beta$  – коэффициент асимметрии. При  $\lambda < 0, \delta > 0, \gamma \geq 0$ , при  $\lambda = 0, \delta > 0, \gamma > 0$ , при  $\lambda > 0, \delta \geq 0, \gamma > 0$ .

Отметим, что все распределения 1–9 используются в нормированном виде – со средним ноль и дисперсией единица, что соответствует случайной величине  $z_i$  в декомпозиции (5) ошибки  $\varepsilon_i$ .

### 3.2. HAR-модели

В основе HAR-моделей [Corsi, 2009] лежит предположение о неоднородности (гетерогенности) рынка. Эти модели используют дневную, недельную и месячную компоненты волатильности и позволяют учесть длинную память волатильности и ее устойчивость, одностороннее влияние долгосрочной волатильности на краткосрочную. В HAR-моделях рассматриваются оценки ненаблюдаемых волатильностей, а именно, реализованные дисперсии, которые являются квадратами реализованных волатильностей. Модели этого семейства позволяют учесть неоднородность рынка и влияние на моделируемые величины

дневных, недельных и месячных лагов реализованной волатильности. В данный момент HAR-модели являются, вероятно, наилучшими инструментами для моделирования RV, что было также показано в работах [Souček, Todorova, 2014; Lahaye, Shaw, 2014].

Так как HAR-модели были созданы для моделирования и прогнозирования классических рынков, принято использовать параметры (1,5,21) [Craioveanu, Hillebrand, 2012], эффективность которых была показана в работе [Andersen et al., 2007]. Однако, так как в данной работе изучается Bitcoin, торгуемый 7 дней в неделю (в работе рассматривается 6 для сравнимости с E-mini S&P 500), исследуются также и другие порядки лагов.

В работе для оценивания HAR-моделей применяется пакет «highfrequency» языка R<sup>3</sup>. В описании моделей типа HAR ниже используется  $RV_t^d$  – реализованная дисперсия в день  $t$ , квадрат реализованной волатильности (1)–(1b); ее средние за недельный и месячный периоды вычисляются по формулам

$$(25) \quad RV_t^w = \frac{1}{w} \sum_{j=0}^{w-1} RV_{t-j}^d, \quad RV_t^m = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} RV_{t-j}^d.$$

В стандартной HAR-RV-модели [Corsi, 2009] для фондового индекса используются  $w = 5$ ,  $m = 21$ . Поскольку торговля криптовалютой отличается от обычной биржевой торговли, то в данной работе используются все пары  $(m, w)$ , где  $4 \leq w \leq 7$  и  $21 \leq m \leq 27$ .

В обобщениях HAR-моделей участвуют:

- Realized bipower variation. Эта величина является альтернативной оценкой реализованной дисперсии, робастной при наличии редких скачков [Barndorff-Nielsen, Shephard, 2004]:

$$(26) \quad BPV_t = \sum_{j=1}^{N-1} r_{j,t} r_{j+1,t};$$

- Realized quarticity участвует в оценке точности реализованной волатильности. Включение ее в HAR-модель позволяет учесть влияния скачков реализованной волатильности [Corsi et al., 2005]:<sup>f</sup>

$$(27) \quad RQ_t = \frac{N}{3} \sum_{j=1}^N r_{j,t}^4.$$

- Jump [Barndorff-Nielsen, Shephard, 2004] является оценкой квадратичной вариации компоненты скачков:

$$(28) \quad J_t = \max(RV_t^d - BPV_t, 0).$$

- Continuous sample path представляет непрерывную компоненту RV [Andersen et al., 2007]:

$$(29) \quad C_t = RV_t^d - J_t.$$

<sup>3</sup> Package «highfrequency» (2022). См.: <https://cran.r-project.org/web/packages/highfrequency/highfrequency.pdf>

Поскольку есть пропуски в данных, то к вычислению  $BPV_t$  (26),  $RQ_t$  (27) применяется нормировка, аналогичная нормировке (1b) для реализованной дисперсии.

Средние значения  $BPV_t$ ,  $RQ_t$ ,  $J_t$  за неделю и месяц вычисляются аналогично (26).

Заметим, что для HAR-модели проводится перебор двух параметров – недельная компонента принимает 4 различных значения, а месячная компонента 7 значений, таким образом, получается  $4 \times 7 = 28$  конфигураций моделей. Аналогично, HARQJ содержит 3 компоненты, каждая из которых имеет 2 параметра (недельный и месячный), таким образом, проводится перебор по 3 параметрам, принимающим 4 значения, и 3 параметрам, принимающим 7 значений, и получается  $4 \times 4 \times 4 \times 7 \times 7 \times 7 = 21952$  моделей. В целом, с перебором всех параметров гетерогенности  $m$ ,  $w$  всех моделей рассматривается 46312 моделей для каждого из исследуемых рядов данных.

Так как сама реализованная волатильность обладает логнормальным распределением, рассматривается также и логарифмическая спецификация всех моделей, т.е. вместо всех исходных величин берутся их натуральные логарифмы. Другой подход заключается в моделировании стандартных отклонений, т.е. корней из реализованной дисперсии (корневая спецификация). В работе оцениваются следующие модели, а также их логарифмическая и корневая спецификации, таким образом в работе оценивается 138936 ( $46312 \times 3$ ) различных моделей типа HAR:

1. HAR ( $w, m$ ) [Corsi, 2009]:

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \varepsilon_{t+1}.$$

2. HARJ ( $w, m$ ) с порядком BPV ( $w_1, m_1$ ) – HAR со скачками [Andersen et al., 2007]:

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \beta_4 J_t^d + \beta_5 J_t^{w_1} + \beta_6 J_t^{m_1} + \varepsilon_{t+1}.$$

3. HARCJ ( $w, m$ ) с порядком BPV ( $w_1, m_1$ ) – HAR with Jump and Continuous sample Path [Andersen et al., 2007]:

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 C_t^d + \beta_2 C_t^w + \beta_3 C_t^m + \beta_4 J_t^d + \beta_5 J_t^{w_1} + \beta_6 J_t^{m_1} + \varepsilon_{t+1}.$$

4. HARQ ( $w, m$ ) с порядком  $RQ$  ( $w_1, m_1$ ) – HAR with Realized Quarticity. В пакете реализована модель, являющаяся модификацией модели из работы [Bollerslev et al., 2016]:

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \beta_4 RQ_t^d + \beta_5 RQ_t^{w_1} + \beta_6 RQ_t^{m_1} + \varepsilon_{t+1}.$$

5. HARQJ( $w, m$ ) с порядками BPV ( $w_1, m_1$ ) и  $RQ$  ( $w_2, m_2$ ) – HAR with Realized Quarticity and Jump [Bollerslev et al., 2016]:

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 RV_t^d + \beta_2 RV_t^w + \beta_3 RV_t^m + \beta_4 J_t^d + \beta_5 J_t^{w_1} + \beta_6 J_t^{m_1} + \beta_7 RQ_t^d + \beta_8 RQ_t^{w_2} + \beta_9 RQ_t^{m_2} + \varepsilon_{t+1}.$$



6. CHAR( $w, m$ ) – HAR with Continuous sample path [Andersen et al., 2007]. В данной модели  $C_t$  соответствует непрерывному компоненту  $RV_t^d$  и оценивается как  $BPV_t$ :

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 BPV_t^d + \beta_2 BPV_t^w + \beta_3 BPV_t^m + \varepsilon_{t+1}.$$

7. CHARQ ( $w, m$ ) с порядком  $RQ(w_1, m_1)$  – HAR with Realized Quarticity and Continuous sample path. В пакете реализована модель, являющаяся модификацией модели из работы [Bollerslev et al., 2016]:

$$RV_{t+1}^d = \beta_0 + \beta_1 J_t^d + \beta_2 J_t^w + \beta_3 J_t^m + \beta_4 RQ_t^d + \beta_5 RQ_t^{w_1} + \beta_6 RQ_t^{m_1} + \varepsilon_{t+1}.$$

В логарифмической и корневой спецификациях вместо  $RV_t^d$  и прочих составляющих  $RQ_t, BPV_t, J_t$  берутся соответственно  $\ln(RV_t^d)$  и  $\sqrt{RV_t^d}$ .

#### 4. Результаты

В табл. 2 приведены лучшие модели для реализованных волатильностей исследуемых процессов. В первом столбце указана метрика и количество отобранных в этой метрике MCS-тестом моделей. В столбце «Лучшие модели» находятся модели с наименьшей погрешностью в указанной метрике из всех отобранных в этой метрике MCS-тестом моделей. Последние два столбца показывают соответствующие погрешности выбранных моделей. Строка Benchmark содержит значения погрешностей MAE, MAPE для «эталонных» моделей GARCH(1,1)-norm и HAR\_RV(5,21) или их модификаций с  $\ln(RV_t^d)$  и  $\sqrt{RV_t^d}$ .

##### 4.1. Bitcoin. GARCH

Далее представлены лучшие GARCH-модели для прогноза реализованной волатильности Bitcoin.

Как можно видеть из табл. 2, наилучшая GARCH-модель для Bitcoin обладает MAPE больше 30%, а модели с наименьшими показателями погрешностей отобраны в MAPE и MAE-метриках.

Таблица 2.

##### Лучшие GARCH-модели для прогноза реализованной волатильности Bitcoin

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 1	csGARCH(1,0)-snorm	0,01277	33,45
MSE, 7	csGARCH(2,2)-snorm	0,01415	46,11
MAPE, 1	csGARCH(1,0)-ged	0,01277	33,45
Benchmark	GARCH(1,1)-norm	0,01521	49,51

Также среди всех отобранных моделей наблюдаются только модели csGARCH со скошенным нормальным распределением и обобщенным распределением ошибок. Benchmark-модель уступает всем выбранным моделям.

#### 4.2. Bitcoin. HAR-RV

В табл. 3 представлены лучшие модели среди HAR-RV для прогноза реализованной волатильности Bitcoin. Модели, выбранные в метриках MSE и MAPE, совпадают. Однако они хуже большей части отобранных GARCH-моделей с точки зрения точности прогноза. Benchmark-модель сопоставима с отобранными во всех метриках моделями.

Таблица 3.

##### Лучшие HAR-RV-модели для прогноза реализованной волатильности Bitcoin

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей			
MAE, 400	HARJ_RV(7,27)_BPV(7,26)	0,01376	45,92
MSE, 400	HAR_RV(4,21)	0,01377	45,20
MAPE, 400	HAR_RV(4,21)	0,01377	45,20
Benchmark	HAR_RV(5,21)	0,01399	45,72

В табл. 4 представлены лучшие модели из  $\text{HAR}-\sqrt{RV}$ . Средние относительные погрешности близки друг к другу, и среди отобранных моделей присутствуют только модели с учетом скачка – HARJ. В целом средние относительные погрешности меньше, чем для линейной спецификации и составляют порядка 33,4%. Это сопоставимо с лучшими GARCH-моделями и немного превосходит их. Модели, отобранные по метрикам MSE и MAPE, совпадают. Benchmark-модель несколько уступает всем выбранным моделям.

Таблица 4.

##### Лучшие HAR- $\sqrt{RV}$ -модели для прогноза реализованной волатильности Bitcoin

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 9	HARJ_RV(6,27)_BPV(7,24)	0,01193	33,46
MSE, 27	HARJ_RV(6,27)_BPV(5,23)	0,01200	33,34
MAPE, 166	HARJ_RV(6,27)_BPV(5,23)	0,01200	33,34
Benchmark	HAR_RV(5,21)	0,01227	34,00

В табл. 5 представлены лучшие модели из HAR-ln(RV). Результаты данных моделей лучше прогнозов классических HAR-RV и GARCH-моделей, их средние относительные погрешности составляют около 30%. В MAE и MSE отобрано всего по одной модели семейства CHARQ, в то время как в MAPE выбрано множество равномоощных моделей. В основном выбраны модели с порядком RV части 27 и порядком RQ части 24. Benchmark-модель несколько уступает всем выбранным моделям.

Таблица 5.

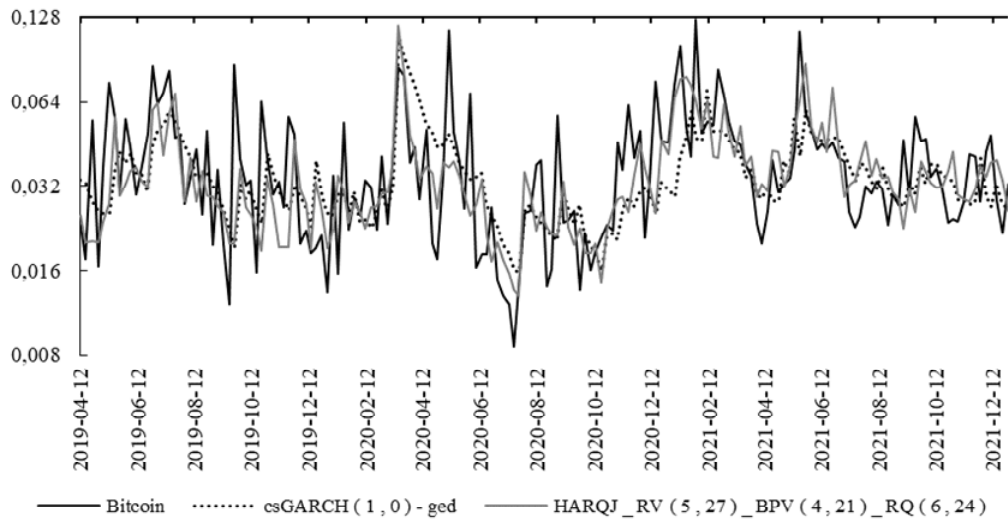
**Лучшие HAR-ln(RV)-модели  
для прогноза реализованной волатильности Bitcoin**

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 1	CHARQ_RV(5,27)_BPV(4,26)_RQ(5,24)	0,01146	29,74
MSE, 1	CHARQ_RV(7,27)_BPV(6,24)_RQ(7,22)	0,01155	30,25
MAPE, 94	HARQJ_RV(5,27)_BPV(4,21)_RQ(6,24)	0,01165	29,51
Benchmark	HAR_RV(5,21)	0,01192	30,51

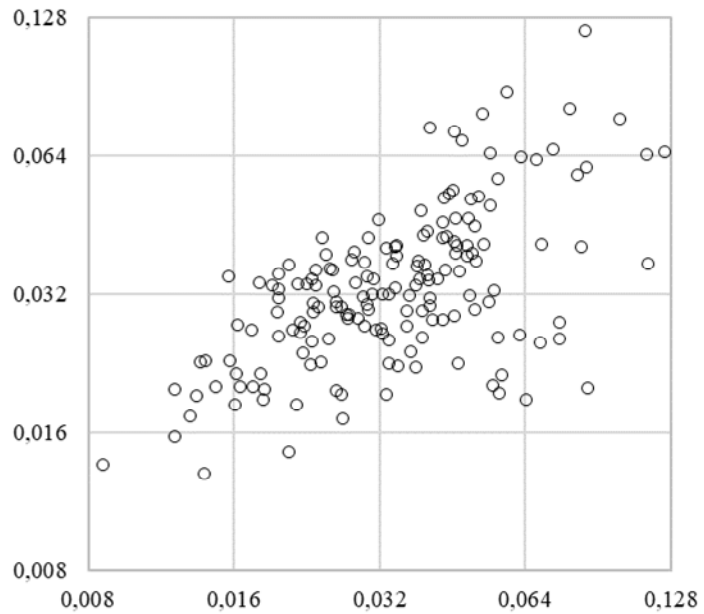
На рис. 4 представлены реализованная волатильность Bitcoin и две модели из семейств GARCH и HAR-ln(RV), которые определены как лучшие MCS-тестом и отобраны как модели с наименьшей средней относительной погрешностью. График построен в логарифмических шкалах. Как можно видеть, HAR-модель лучше и точнее моделирует пики и всплески исследуемого ряда данных, в то время как GARCH-модель скорее усредняет данные, как правило, слабо улавливая пики. Для GARCH-модели средняя относительная погрешность прогноза равна 48% в периоды малой волатильности (меньше 0,025) против 34% в периоды большей волатильности (более 0,045). Для HAR-модели средняя относительная погрешность прогноза равна 40 и 34% соответственно. Таким образом можно сказать, что в периоды большей волатильности модели показали более хорошие прогнозные способности.

Для визуализации точности прогноза на рис. 5 представлена диаграмма рассеяния для реализованной волатильности Bitcoin и ее прогноза по лучшей из GARCH и HAR-моделей. График также представлен в логарифмических шкалах.

В целом лучше всего себя показали логарифмические спецификации HAR-моделей, что согласуется с тем, что реализованные волатильности имеют логнормальное распределение, и с результатами, полученными в работе [Аганин, 2017]. Точность прогноза 30%, вероятно, не является впечатляющей, однако модели показывают свою пригодность к моделированию процесса с точки зрения отражения основных закономерностей и трендов, что в дальнейшем может быть применено, например, в гибридных нейросетевых моделях.



**Рис. 4.** Черная сплошная линия – реализованная волатильность Bitcoin, пунктир и серая – ее прогнозы по лучшим GARCH и HAR-моделям



**Рис. 5.** Диаграмма рассеяния. По горизонтали – реализованная волатильность Bitcoin, по вертикали ее прогноз по модели HARQ\_RV(5,27)\_BPV(4,21)\_RQ(6,24)

### 4.3. E-mini S&P 500. GARCH

В табл. 6 представлены лучшие GARCH-модели для реализованной волатильности фьючерса E-mini S&P 500. Как можно видеть, относительные погрешности больше соответствующих погрешностей для Bitcoin. (Абсолютные погрешности меньше, просто по той причине, что волатильность Bitcoin выше, чем волатильность фьючерса, см. рис. 3).

В целом, результаты схожи с результатами для Bitcoin, вероятно, для практических целей точность моделей недостаточна, однако они неплохо способны улавливать основные паттерны поведения исследуемых рядов, что может быть применено в гибридных моделях. Также стоит отметить, что единственная модель, отобранная в метрике MAPE, имеет наименьшую из всех погрешность 47,2% и является моделью csGARCH со скошенным нормальным распределением остатков. Benchmark-модель уступает выбранным моделям.

**Таблица 6.**

**Лучшие GARCH-модели  
для прогноза реализованной волатильности E-mini S&P 500**

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 7	NAGARCH(1,2)-std	0,004029	54,80
MSE, 47	NAGARCH(1,2)-jsu	0,004081	58,10
MAPE, 1	csGARCH(1,0)-snorm	0,004178	47,18
Benchmark	GARCH(1,1)-norm	0,004623	61,97

### 4.4. E-mini S&P 500. HAR

В табл. 7 приведены результаты лучших HAR-RV для прогнозирования реализованной волатильности E-mini S&P 500. Во всех метриках в качестве лучших выбраны HARJ-модели. Все модели практически равнозначны, однако модели, отобранные в метрике MAPE, обладают несколько меньшими значениями относительных погрешностей. Все модели имеют большие средние относительные погрешности порядка 50%. Что, впрочем, меньше, чем погрешности для большинства отобранных GARCH-моделей. Benchmark-модель несколько уступает всем выбранным моделям.

**Таблица 7.**

**Лучшие HAR-RV-модели  
для прогноза реализованной волатильности E-mini S&P 500**

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 41	HARJ_RV(4,25)_BPV(7,22)	0,003819	50,82
MSE, 54	HARJ_RV(4,25)_BPV(5,26)	0,003823	51,76
MAPE, 4	HARJ_RV(5,26)_BPV(7,22)	0,003884	47,69
Benchmark	HAR_RV(5,21)	0,003883	52,13

Лучшие модели среди HAR- $\sqrt{RV}$ -моделей для прогнозирования реализованной волатильности E-mini S&P 500 представлены в табл. 8. Выбраны в основном HARQJ-модели, и нельзя однозначно определить общий порядок всех компонент, так как среди множества выбранных моделей присутствуют компоненты всех порядков. Как можно видеть, погрешности значительно снизились относительно погрешностей классических HAR-RV (табл. 7) и составляют около 41%, кроме единственной модели, выбранной в метрике MAPE, ее погрешность составляет 39,6%. Benchmark-модель уступает всем выбранным моделям. С точки зрения MCS-теста все 400 моделей по метрике MAE примерно равноценны.

Таблица 8.

**Лучшие HAR- $\sqrt{RV}$ -модели  
для прогноза реализованной волатильности E-mini S&P 500**

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 400	HARQJ_RV(7,24)_BPV(4,25)_RQ(7,26)	0,003146	40,44
MSE, 159	HARQJ_RV(7,23)_BPV(5,24)_RQ(5,25)	0,003186	41,23
MAPE, 1	CHARQ_RV(5,24)_BPV(7,27)_RQ(4,22)	0,003328	39,59
Benchmark	HAR_RV(5,21)	0,003464	41,40

Результаты для HAR-ln(RV)-моделей представлены в табл. 9. Логарифмическая спецификация моделей позволила улучшить получаемые прогнозы, средние относительные погрешности снизились в среднем до 36–37%. Benchmark-модель уступает всем выбранным моделям. С точки зрения MCS-теста все 400 моделей по метрикам MAE и MSE примерно равноценны.

Таблица 9.

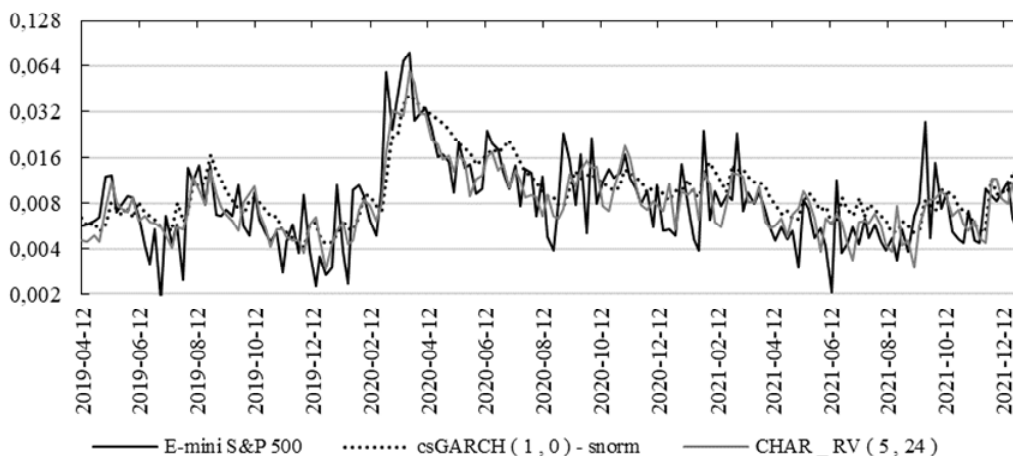
**Лучшие HAR-ln(RV)-модели  
для прогноза реализованной волатильности E-mini S&P 500**

	Лучшие модели	MAE	MAPE, %
Метрика, количество отобранных MCS-тестом моделей:			
MAE, 400	HARCJ_RV(5,27)_BPV(5,24)	0,003211	36,37
MSE, 400	HARCJ_RV(5,27)_BPV(4,24)	0,003216	36,38
MAPE, 3	CHAR_RV(5,24)	0,003377	36,12
Benchmark	HAR_RV(5,21)	0,003452	37,19

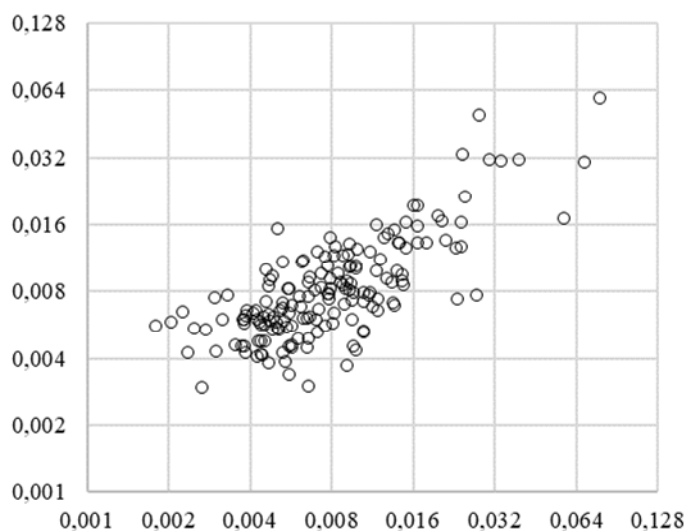
На рис. 6 представлены в логарифмической шкале реализованная волатильность E-mini S&P 500 и ее прогноз по двум моделям из семейств GARCH и HAR-ln(RV), которые определены как лучшие MCS-тестом и отобраны как модели с наименьшей средней от-

носителем погрешностью. HAR-модель значительно лучше и точнее моделирует пик исследуемого ряда данных, в то время как GARCH-модель усредняет значения, показывая основную динамику процесса. Отметим, что, парадоксально, относительная погрешность прогноза реализованной волатильности E-mini S&P 500 несколько ниже, чем Bitcoin.

Для визуализации точности прогноза на рис. 7 представлена диаграмма рассеяния для реализованной волатильности E-mini S&P 500 и ее прогноза по лучшей из GARCH и HAR-моделей. График также представлен в логарифмических шкалах.



**Рис. 6.** Черная сплошная линия – реализованная волатильность E-mini S&P 500, пунктир и серая – ее прогнозы по лучшим GARCH и HAR-моделям



**Рис. 7.** Диаграмма рассеяния. По горизонтали – реализованная волатильность E-mini S&P 500, по вертикали – ее прогноз по модели CHAR\_RV(5,24)

В целом, по полученным моделям нельзя однозначно определить оптимальные порядки компонент  $w$ ,  $m$ , полученные для близких значений порядков результаты почти не различаются. Лучшими с точки зрения величины средней относительной погрешности являются логарифмические спецификации HAR-моделей, что согласуется с тем, что реализованные волатильности имеют логнормальное распределение и с результатами, полученными в работе [Аганин, 2017].

Таким образом, наилучшая по точности модель позволила достичь средней относительной погрешности в 36%, что, вероятно, неудовлетворительно для решения практических задач прогнозирования, но все же значительно лучше, чем результаты GARCH-моделей для аналогичного ряда данных.

## 5. Заключение

В работе были получены следующие результаты.

- GARCH-модели уступают HAR-моделям в точности прогноза реализованной волатильности как Bitcoin, так и E-mini S&P 500.
- Для лучших HAR-моделей относительная точность прогноза реализованной волатильности Bitcoin выше, чем для E-mini S&P 500. Возможно, это говорит о большей сегментированности (гетерогенности) рынка Bitcoin. Наименьшие средние относительные погрешности (MAPE), которых удалось достичь, – 29,51 и 36,12% для Bitcoin и E-mini S&P 500 соответственно.
- Среди всех отобранных моделей семейства GARCH большинство моделей для Bitcoin принадлежат семейству csGARCH. Такие модели позволяют учесть как долгосрочные, так и краткосрочные движения волатильностей. Это может указывать на наличие как долгосрочных, так и краткосрочных зависимостей в Bitcoin.
- Для обоих исследуемых временных рядов лучшие результаты показали модели спецификации HAR-ln(RV), что согласуется с логнормальной природой самой реализованной волатильности.
- Для обоих временных рядов в числе лучших HAR-моделей были выбраны модели, которые учитывают не только гетерогенность рынка, но также непрерывную компоненту и скачки. Такие модели по точности прогноза несколько превосходят стандартную HAR(5,21)-модель. Отметим, что поскольку данные используются по 6 дням в неделю, то месячная компонента в лучших моделях использует 25–27 наблюдений, что как и в стандартной HAR(5,21)-модели соответствует периоду в один месяц.
- Средняя относительная ошибка прогноза по HAR-ln(RV)-моделям для Bitcoin меньше, чем для E-mini S&P 500 (29,5 и 36,1% соответственно).
- Средняя относительная ошибка прогноза по GARCH-моделям для Bitcoin также меньше, чем для E-mini S&P 500 (33,5 и 47,2% соответственно).

Полученные результаты о «лучших» GARCH и HAR-моделях могут быть использованы в построении гибридных моделей машинного обучения, которые в последнее время активно развиваются (см., например: [Kim, Won, 2018; Shen Z. et al., 2021]).



\* \*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Аганин А.Д. Сравнение GARCH и HAR-RV моделей для прогноза реализованной волатильности на российском рынке // Прикладная эконометрика. 2017. 48. С. 63–84.
- Маневич В.А., Пересецкий А.А., Погорелова П.В. Волатильность фондового рынка и волатильность криптовалют // Прикладная эконометрика. 2022. 65. С. 65–76. DOI: 10.22394/1993-7601-2022-65-65-76
- Andersen T.G., Bollerslev T. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts // International Economic Review. 1998. 39 (4). P. 885–905. DOI: 10.2307/2527343
- Andersen T., Bollerslev T., Diebold F.X. Roughing it up: Including Jump Components in Measuring, Modeling and Forecasting Asset Return Volatility // Review of Economics and Statistics. 2007. 89 (4). P. 701–720. DOI: 10.1162/rest.89.4.701
- Angelidis T., Benos A., Degiannakis S. The Use of GARCH Models in VaR Estimation // Statistical Methodology. 2004. 1. P. 105–128.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shepard N. Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps // Journal of Financial Econometrics. 2004. 2 (1). P. 1–37. DOI: 10.1093/jjfinec/nbh001
- Bergsli L.Ø., Lind F.A., Molnár P., Polasik M. Forecasting Volatility of Bitcoin // Research in International Business and Finance. 2022. 59. 101540. DOI: 10.1016/j.ribaf.2021.101540
- Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity // Journal of Econometrics. 1986. 31. P. 307–327. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90063-1
- Bollerslev T., Patton A.J., Quaedvlieg R. Exploiting the Errors: A Simple Approach for Improved Volatility Forecasting // Journal of Econometrics. 2016. 192. P. 1–18. DOI: 10.1016/j.jeconom.2015.10.007
- Caporale G.M., Zekokh T. Modelling Volatility of Cryptocurrencies Using Markov-Switching GARCH Models // Research in International Business and Finance. 2019. 48. P. 143–155. DOI: 10.1016/j.ribaf.2018.12.009
- Chen S., Chen C., Härdle W.K., Lee T.M., Ong B. A First Econometric Analysis of the CRIX Family. Humboldt-Universität zu Berlin. 2016. B 649 Discussion Paper 2016-031. DOI: 10.2139/ssrn.2832099
- Chkili W. Modeling Bitcoin Price Volatility: Long Memory vs Markov Switching // Eurasian Economic Review. 2021. 11. P. 433–448. DOI: 10.1007/s40822-021-00180-7
- Corsi F. A Simple Approximate Long-memory Model of Realized Volatility // Journal of Financial Econometrics. 2009. 7 (2). P. 174–196. DOI: 10.1093/jjfinec/nbp001
- Corsi F., Mittnik S., Pigorsch C., Pigorsch U. The Volatility of Realized Volatility: CFS Working Paper. № 2005/33, Goethe University Frankfurt, 2005. DOI: 10.1080/07474930701853616
- Craioveanu M., Hillebrand E. Why it Is OK to Use the HAR-RV(1,5,21) Model: Working Papers № 1201. University of Central Missouri, 2012.
- Ding Z., Granger C.W.J., Engle R.F. A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model // Journal of Empirical Finance. 1993. 1 (1). P. 83–106. DOI: 10.1016/0927-5398(93)90006-d
- Engle R.F., Ng V.K. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility // The Journal of Finance. 1993. 48 (5). P. 1749–1778. DOI: 10.2307/2329066
- Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks // Journal of Finance. 1993. 48 (5). P. 1779–1801. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x
- Gronwald M. The Economics of Bitcoins Market Characteristics and Price Jumps: CESifo Working Paper Series. 2014. № 5121. DOI: 10.2139/ssrn.2548999
- Hansen P., Lunde A., Nason J. The Model Confidence Set // Econometrica. 2011. 79 (2), P. 453–497. DOI: 10.2139/ssrn.522382
- Hentschel L. All in the Family Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models // Journal of Financial Economics. 1995. 39 (1). P. 71–104. DOI: 10.1016/0304-405x(94)00821-h

- Higgins M.L., Bera A.K.* A Class of Nonlinear ARCH Models // *International Economic Review*. 1992. 33 (1). P. 137–158. DOI: 10.2307/2526988
- Johnson N.* System of Frequency Curves Generated by Method of Translation // *Biometrika*. 1949. 36. P. 149–176.
- Kaya Soyulu P., Okur M., Çatıkkas O., Altıntig Z.A.* Long Memory in the Volatility of Selected Cryptocurrencies: Bitcoin, Ethereum and Ripple // *Journal of Risk and Financial Management*. 2020. 13 (6). P. 107. DOI: 10.3390/jrfm13060107
- Kim H.Y., Won C.H.* Forecasting the Volatility of Stock Price Index: A Hybrid Model Integrating LSTM with Multiple GARCH-type Models // *Expert Systems with Applications*. 2018. 103. P. 25–37. DOI: 10.1016/j.eswa.2018.03.002
- Kisinbay T.* Predictive Ability of Asymmetric Volatility Models at Medium-Term Horizons // *Applied Economics*. 2010. 42. P. 3813–3829. DOI: 10.1080/00036840802360211
- Lahaye J., Shaw P.* Can We Reject Linearity in an HAR-RV Model for the S&P 500? Insights from a Nonparametric HAR-RV // *Economics Letters*. 2014. 125 (1). P. 43–46. DOI: 10.1016/j.econlet.2014.07.003
- Lee G.J., Engle R.F.* A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility // *Cointegration Causality and Forecasting: A Festschrift in Honor of Clive W.J. Granger*. Oxford University Press, 1999. P. 475–497.
- Mastro D.* Forecasting Realized Volatility: ARCH-Type Models vs. the HAR-RV Model: Dissertation. London: Kingston University, 2014. DOI: 10.2139/ssrn.2519107
- Nelson D.* Conditional Heteroskedasticity and Asset Returns: A New Approach // *Econometrica*. 1991. 59. P. 347–370. DOI: 10.2307/2938260
- O'Hagan A., Leonard T.* Bayes Estimation Subject to Uncertainty about Parameter Constraints // *Biometrika*. 1976. 63 (1). P. 201–203. DOI: 10.1093/BIOMET/63.1.201
- Panagiotidis T., Papapanagiotou G., Stengos T.* On the Volatility of Cryptocurrencies // *Research in International Business and Finance*. 2022. 62. 101724. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101724
- Pichl L., Kaizoji T.* Volatility Analysis of Bitcoin Price Time Series // *Quantitative Finance and Economics*. 2017. 1 (4). P. 474–485. DOI: 10.3934/QFE.2017.4.474
- Schwert G.W.* Stock Volatility and the Crash of '87 // *Review of Financial Studies*. 1990. 3 (1). P. 77–102.
- Segnon M., Bekiros S.* Forecasting Volatility in Bitcoin Market // *Annals of Finance*. 2020. Doi: 10.1007/s10436-020-00368-y
- Shen Z., Wan Q., Leatham D.J.* Bitcoin Return Volatility Forecasting: A Comparative Study between GARCH and RNN // *Journal of Risk and Financial Management*. 2021. 14 (7). P. 337. DOI: 10.3390/jrfm14070337
- Souček M., Todorova N.* Realized Volatility Transmission: The Role of Jumps and Leverage Effects // *Economics Letters*. 2014. 122 (2). P. 111–115. DOI: 10.1016/j.econlet.2013.11.007
- Taylor S.J.* Modelling Financial Time Series. Wiley, 1986.
- White H.* Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. 1982. 50(1). P. 1–25.
- Zakoian J.-M.* Threshold Heteroskedastic Models // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 1994. 18 (5). P. 931–955. DOI: 10.1016/0165-1889(94)90039-6

## Comparison of Cryptocurrency and Stock Market Volatility Forecast Models

Artem Aganin<sup>1</sup>, Vyacheslav Manevich<sup>2</sup>,  
Anatoly Peresetsky<sup>3</sup>, Polina Pogorelova<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Independent researcher  
E-mail: artyomaganin@gmail.com

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Boulevard, Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: vip137@mail.ru

<sup>3</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Boulevard, Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: aperesetsky@hse.ru

<sup>4</sup> National Research University Higher School of Economics,  
11, Pokrovsky Boulevard, Moscow, 109028, Russian Federation.  
E-mail: pvpogorelova@hse.ru

The article compares GARCH and HAR models for 1 day ahead forecasting performance of the realized volatility of financial series. As an example, the cryptocurrency with the largest capitalization, Bitcoin, was chosen. Its realized volatility is calculated from intraday (24 hours) data, using the closing values of five-minute trading intervals. The paper proposes a method for calculating realized volatility for the case of gaps in 5-minute intraday data. This makes it possible to achieve comparability of the daily values of the realized volatility of assets with different trading times. All days of the week are almost equally present among the days selected for forecasting. For comparison, a stock market asset was chosen, E-mini S&P 500, a futures contract that is traded 23 hours a day. We use data from 01/01/2018 to 12/29/2021. Since there could be (and were) structural changes in the markets in this interval, the models are evaluated in rolling windows 399 days long. For each series 810 GARCH models and 46312 HAR models are compared. The MCS test is used to select the best models (at the significance level of 0,01). It is shown that GARCH models are inferior to HAR models in the accuracy of forecasting both the realized volatility of Bitcoin and the E-mini S&P 500. At the same time, the relative accuracy of the forecast of the realized volatility of Bitcoin is higher than the accuracy of the forecast of the realized volatility of the E-mini S&P 500 futures. The smallest relative errors for Bitcoin and E-mini S&P 500 realized volatility forecasts are 29,51% and 36,12%, respectively.

**Key words:** bitcoin; cryptocurrency; realized volatility; E-mini S&P 500; GARCH model; HAR-RV model.

**JEL Classification:** C32; C58; G15; G17.

\* \*  
\*

## References

- Aganin A. (2017) Forecast Comparison of Volatility Models on Russian Stock Market. *Applied Econometrics*, 48, pp. 63–84. (In Russ.)
- Andersen T.G., Bollerslev T. (1998) Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts. *International Economic Review*, 39, 4, pp. 885–905. DOI: 10.2307/2527343
- Andersen T., Bollerslev T., Diebold F.X. (2007) Roughing it up: Including Jump Components in Measuring, Modeling and Forecasting Asset Return Volatility. *Review of Economics and Statistics*, 89, 4, pp. 701–720. DOI: 10.1162/rest.89.4.701
- Angelidis T., Benos A., Degiannakis S. (2004) The Use of GARCH Models in VaR Estimation. *Statistical Methodology*, 1, pp. 105–128.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shepard N. (2004) Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps. *Journal of Financial Econometrics*, 2, 1, pp. 1–37. DOI: 10.1093/jjfinec/nbh001
- Bergsli L.Ø., Lind F.A., Molnár P., Polasik M. (2022) Forecasting Volatility of Bitcoin. *Research in International Business and Finance*, 59, 101540. DOI: 10.1016/j.ribaf.2021.101540
- Bollerslev T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, pp. 307–327. DOI: 10.1016/0304-4076(86)90063-1
- Bollerslev T., Patton A.J., Quaedvlieg R. (2016) Exploiting the Errors: A Simple Approach for Improved Volatility Forecasting. *Journal of Econometrics*, 192, pp. 1–18. DOI: 10.1016/j.jeconom.2015.10.007
- Caporale G.M., Zekokh T. (2019) Modelling Volatility of Cryptocurrencies Using Markov-Switching GARCH Models. *Research in International Business and Finance*, 48, pp. 143–155. DOI: 10.1016/j.ribaf.2018.12.009
- Chen S., Chen C., Härdle W.K., Lee T.M., Ong B. (2016) *A First Econometric Analysis of the CRIX Family*. Humboldt-Universität zu Berlin. B 649 Discussion Paper 2016-031. DOI: 10.2139/ssrn.2832099
- Chkili W. (2021) Modeling Bitcoin Price Volatility: Long Memory vs Markov Switching. *Eurasian Economic Review*, 11, pp. 433–448. DOI: 10.1007/s40822-021-00180-7
- Corsi F. (2009) A Simple Approximate Long-memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics*, 7, 2, pp. 174–196. DOI: 10.1093/jjfinec/nbp001
- Corsi F., Mittnik S., Pigorsch C., Pigorsch U. (2005) *The Volatility of Realized Volatility*. CFS Working Paper, no 2005/33, Goethe University Frankfurt. DOI: 10.1080/07474930701853616
- Craioveanu M., Hillebrand E. (2012) *Why it Is OK to Use the HAR-RV(1,5,21) Model*. Working Papers no 1201. University of Central Missouri.
- Ding Z., Granger C.W.J., Engle R.F. (1993) A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model. *Journal of Empirical Finance*, 1, 1, pp. 83–106. DOI: 10.1016/0927-5398(93)90006-d
- Engle R.F., Ng V.K. (1993) Measuring and Testing the Impact of News on Volatility. *The Journal of Finance*, 48, 5, pp. 1749–1778. DOI: 10.2307/2329066
- Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D.E. (1993) On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*, 48, 5, pp. 1779–1801. DOI: 10.1111/j.1540-6261.1993.tb05128.x
- Gronwald M. (2014) *The Economics of Bitcoins Market Characteristics and Price Jumps*. CESifo Working Paper Series, no 5121. DOI: 10.2139/ssrn.2548999
- Hansen P., Lunde A., Nason J. (2011) The Model Confidence Set. *Econometrica*, 79, 2, pp. 453–497. DOI: 10.2139/ssrn.522382
- Hentschel L. (1995) All in the Family Nesting Symmetric and Asymmetric GARCH Models. *Journal of Financial Economics*, 39, 1, pp. 71–104. DOI: 10.1016/0304-405x(94)00821-h
- Higgins M.L., Bera A.K. (1992) A Class of Nonlinear ARCH Models. *International Economic Review*, 33, 1, pp. 137–158. DOI: 10.2307/2526988

- Johnson N. (1949) System of Frequency Curves Generated by Method of Translation. *Biometrika*, 36, pp. 149–176.
- Kaya Soylu P., Okur M., Çatıkkas O., Altıntig Z.A. (2020) Long Memory in the Volatility of Selected Cryptocurrencies: Bitcoin, Ethereum and Ripple. *Journal of Risk and Financial Management*, 13, 6, p. 107. DOI: 10.3390/jrfm13060107
- Kim H.Y., Won C.H. (2018) Forecasting the Volatility of Stock Price Index: A Hybrid Model Integrating LSTM with Multiple GARCH-type Models. *Expert Systems with Applications*, 103, pp. 25–37. DOI: 10.1016/j.eswa.2018.03.002
- Kisinbay T. (2010) Predictive Ability of Asymmetric Volatility Models at Medium-Term Horizons. *Applied Economic*, 42, pp. 3813–3829. DOI: 10.1080/00036840802360211
- Lahaye J., Shaw P. (2014) Can We Reject Linearity in an HAR-RV Model for the S&P 500? Insights from a Nonparametric HAR-RV. *Economics Letters*, 125, 1, pp. 43–46. DOI: 10.1016/j.econlet.2014.07.003
- Lee G.J., Engle R.F. (1999) A Permanent and Transitory Component Model of Stock Return Volatility. *Cointegration Causality and Forecasting: A Festschrift in Honor of Clive W.J. Granger*. Oxford University Press, pp. 475–497.
- Manevich V.A., Peresetsky A.A., Pogorelova P.V. (2022) Stock Market and Cryptocurrency Market Volatility. *Applied Econometrics*, 65, pp. 65–76. DOI: 10.22394/1993-7601-2022-65-65-76. (In Russ.)
- Mastro D. (2014) *Forecasting Realized Volatility: ARCH-Type Models vs. the HAR-RV Model*. Dissertation. London: Kingston University. DOI: 10.2139/ssrn.2519107
- Nelson D. (1991) Conditional Heteroskedasticity and Asset Returns: A New Approach. *Econometrica*, 59, pp. 347–370. DOI: 10.2307/2938260
- O'Hagan A., Leonard T. (1976) Bayes Estimation Subject to Uncertainty about Parameter Constraints. *Biometrika*, 63, 1, pp. 201–203. DOI: 10.1093/BIOMET/63.1.201
- Panagiotidis T., Papapanagiotou G., Stengos T. (2022) On the Volatility of Cryptocurrencies. *Research in International Business and Finance*, 62, 101724. DOI: 10.1016/j.ribaf.2022.101724
- Pichl L., Kaizoji T. (2017) Volatility Analysis of Bitcoin Price Time Series. *Quantitative Finance and Economics*, 1, 4, pp. 474–485. DOI: 10.3934/QFE.2017.4.474
- Schwert G.W. (1990) Stock Volatility and the Crash of '87. *Review of Financial Studies*, 3, 1, pp. 77–102.
- Segnon M., Bekiros S. Forecasting Volatility in Bitcoin Market. *Annals of Finance*. 2020. Doi: 10.1007/s10436-020-00368-y
- Shen Z., Wan Q., Leatham D.J. (2021) Bitcoin Return Volatility Forecasting: A Comparative Study between GARCH and RNN. *Journal of Risk and Financial Management*, 14, 7, p. 337. DOI: 10.3390/jrfm14070337
- Souček M., Todorova N. (2014) Realized Volatility Transmission: The Role of Jumps and Leverage Effects. *Economics Letters*, 122, 2, pp. 111–115. DOI: 10.1016/j.econlet.2013.11.007
- Taylor S.J. (1986) *Modelling Financial Time Series*. Wiley.
- White H. (1982) Maximum Likelihood Estimation of Misspecified Models. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 50, 1, pp. 1–25.
- Zakoian J.-M. (1994) Threshold Heteroskedastic Models. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 18, 5, pp. 931–955. DOI: 10.1016/0165-1889(94)90039-6