УДК 330.42

Равновесие Курно при нечетко-случайной выработке

Шведов А.С.

Олигополия Курно с неточно предсказуемыми объемами выпуска представляет интерес и с теоретической, и с прикладной точки зрения. Во многих отраслях экономики реальные объемы выпуска отличаются от намеченных. Обычно для моделирования неопределенной выработки используются случайные величины. Однако у моделей со случайной выработкой существует известный недостаток. Если число фирм больше трех, то ожидаемая прибыль фирмы сначала увеличивается при увеличении неопределенности (дисперсии случайной величины), а затем начинает убывать. Если число фирм не превосходит трех, то этого дефекта нет, ожидаемая прибыль фирмы уменьшается при увеличении дисперсии. В настоящей работе впервые для моделирования неопределенной выработки используются нечеткие множества. Рассматривается олигополия Курно и с нечеткой, и с нечетко-случайной выработкой. При нечетко-случайном подходе комбинируются методы теории вероятностей и методы теории нечетких множеств. Найдены равновесные объемы выпуска и ожидаемые прибыли фирм. Для моделей с нечеткой выработкой указанного выше недостатка нет; при любом числе фирм ожидаемая прибыль фирмы уменьшается при увеличении неопределенности. Также в нечетко-случайной постановке изучается дуополия Курно при чрезмерной самоуверенности одной из фирм, когда фирма необоснованно точно прогнозирует свой выпуск. Для этого случая в работе также представлены равновесные объемы выпуска и ожидаемые прибыли фирм.

Ключевые слова: конкуренция по Курно; олигополия; равновесные объемы выпуска; неопределенная выработка; чрезмерная самоуверенность; нечеткое множество; нечетко-случайная величина.

DOI: 10.17323/1813-8691-2023-27-3-435-448

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда экономических исследований академика Н.П. Федоренко. Проект № 2022-139.

Шведов Алексей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор Департамента прикладной экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». E-mail: ashvedov@hse.ru

Статья поступила: 08.06.2023/Статья принята: 07.09.2023.

Для цитирования: Шведов А.С. Равновесие Курно при нечетко-случайной выработке. *Экономический журнал ВШЭ*. 2023; 27(3): 435–448.

For citation: Shvedov A.S. Cournot Equilibrium under Fuzzy Random Yield. *HSE Economic Journal.* 2023; 27(3): 435–448. (In Russ.)

Введение

Олигополия занимает промежуточное положение между монополией и совершенной конкуренцией. Исследуя, в частности, вопросы, в какой мере увеличение числа фирм в отрасли соответствует общественным интересам и какие при этом действуют законы, в XIX в. Курно закладывал основы математической экономики. Говоря современным языком, равновесие Курно – это равновесие Нэша в чистых стратегиях для некооперативной игры, где игроками являются фирмы. (Работы Нэша написаны в середине XX в.) Основы математической теории, которую иногда называют «олигополия Курно», представлены, например, в книге [Джейли, Рени, 2011], можно назвать также статью [Dixit, Stern, 1982]. Вопрос о том, в какой мере теоретические результаты, относящиеся к равновесиям Курно, соответствуют реальности, исследуется во многих работах и для различных отраслей экономики. Возникающее соответствие может объясняться следующей теоремой. Если каждая фирма, определяя объем выпуска, будет давать наилучший ответ (с точки зрения максимизации своей прибыли) на объемы выпусков конкурентов, таким образом «нащупывается» равновесие Курно, даже если первоначально система не находилась в состоянии равновесия (см.: [Мулен, 1985]). Первые математические результаты про равновесия Курно были получены при предположении, что у всех фирм имеется полная информация о спросе на товары в зависимости от цен и о затратах на производство. Подобные математические результаты должны учитываться фирмами при выработке своих стратегий, если своими действиями фирмы влияют на цены производимых товаров.

Предположение об отсутствии у фирм точной информации об условиях рынка и о производственном процессе оказывает существенное влияние на вид решения. Возможно, первой работой, в которой изучалось равновесие Курно при наличии неопределенности, является статья [Ponssard, 1979]. В ней рассматривается задача, где неизвестное – это параметр обратной функции спроса, сама эта функция предполагается линейной. Цель – дать ответ на вопрос, выгодно ли для фирм проводить совместные исследования рынка. В дальнейшем равновесия Курно для моделей, в которые тем или иным способом включаются случайные ошибки, изучались во многих работах. В статье [Shapiro, 1986] рассматривается модель с неизвестными затратами и делается вывод, что обмен между фирмами информацией о своих затратах приводит к уменьшению излишка потребителя. Эта же задача затем рассматривается в более широкой постановке в исследовании [Sakai, Yamato, 1989], и устанавливается, что такой однозначный вывод сделать нельзя. Равновесие Курно при случайной выработке, т.е. когда реальные объемы выпуска отличаются от намеченных, найдено в работе [Deo, Corbett, 2009]. В дальнейшем равновесия Курно при случайной выработке изучались еще в ряде работ: в [Jansen, Özaltin, 2018] рассматривается модель с ограниченными производственными возможностями фирм, в [Yan et al., 2016] сравниваются конкуренция по Курно и конкуренция по Бертрану при случайной выработке, в [Pu et al., 2017] для дуополии Курно изучается эффект чрезмерной самоуверенности одной из фирм.

История большого раздела математики, который теперь часто называют нечеткой теорией, а не теорией нечетких множеств, начинается с работы [Zadeh, 1965]. На вопрос, какой из подходов – нечеткая теория или теория вероятностей – чаще применяется практиками для моделирования неопределенности, едва ли кто-то может дать точный ответ. Но на самом ли деле это две разные теории, или, скорее, речь в нечеткой теории идет о переформулировании того, что и так было известно в теории вероятностей? В своей базовой части нечеткая теория и теория вероятностей – это две совершенно разные теории. Хотя существуют многочисленные и очень разнообразные математические конструкции и модели, в которых задействованы понятия из обеих теорий. Исчерпываются ли этими двумя теориями все существующие подходы к моделированию неопределенности? Нет, не исчерпываются. Существуют понятия нейтрософского множества, серого множества, грубого множества, неточного множества. Но все же это теории значительно меньшего размера. Некоторые из этих понятий представлены в книге [Лю, 2012], где, например, нечетко-случайное программирование и случайно-нечеткое программирование даются как совершенно разные подходы.

В ряде работ при изучении олигополии Курно используется теория нечетких множеств. Модели с нечеткими затратами и с нечетким рыночным спросом рассматриваются в работах [Liang et al., 2008; Dang et al., 2010; Feng et al., 2023]. В исследовании [Tan et al., 2018] олигополия Курно рассматривается как игра с неполной информацией при наличии неопределенности нечеткого типа. Однако для моделирования неопределенной выработки теория нечетких множеств до сих пор не применялась. В настоящей работе равновесие Курно найдено не только при нечеткой выработке, но и при нечетко-случайной выработке.

В разделе 1 содержатся некоторые предварительные сведения и приводится нечетко-случайная модель олигополии Курно. В разделе 2 для этой модели найдены равновесные объемы выпуска и прибыли фирм. В разделе 3 для дуополии Курно изучается эффект чрезмерной самоуверенности при нечетко-случайной выработке.

1. Предварительные сведения и описание модели

В настоящей работе используются те же определения нечеткого числа и нечетко-случайной величины, что и в [Шведов, 2015, 2016][1]. Эти определения слишком объемные, чтобы приводить их здесь полностью. Напомним только, что в соответствии с этими определениями (существуют и другие подходы к определению нечеткого числа) нечеткое число $\tilde{\mu}$ – это фигура, принадлежащая плоскости с координатами (ξ, η) и лежащая в полосе $0 \le \eta \le 1$, например, трапеция с нижним основанием, расположенным на прямой $\eta = 0$, и с верхним основанием, расположенным на прямой $\eta = 1$, но может быть и трапеция с криволинейными боковыми сторонами. Целью настоящего раздела является ввести

[1] Обе работы доступны онлайн:
http://www.hse.ru/data/2015/02/04/1105772662/WP2_2015_01_f.pdf
http://pe.cemi.rssi.ru/pe_2016_42_121-138.pdf

те понятия, которые используются в дальнейшем, а не сделать обзор работ, в которых рассматриваются нечеткие числа и нечетко-случайные величины. Ссылки на более ранние работы можно найти, например, в [Шведов, 2015; 2016].

Пример 1. Пусть $\tilde{\mu}$ – трапеция с верхним основанием $\{(\xi,\eta): \beta \le \xi \le \gamma, \eta = 1\}$ и с нижним основанием $\{(\xi,\eta): \alpha \le \xi \le \delta, \eta = 0\}$, где $\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$. В этом случае нечеткое число называется трапецоидальным. Для операций над нечеткими числами удобно использовать функции аргумента η

$$\mu^L(\eta) = \alpha + (\beta - \alpha)\eta,\ \mu^R(\eta) = \delta + (\gamma - \delta)\eta,\ 0 \le \eta \le 1.$$

Левая боковая сторона трапеции $\tilde{\mu}$ является графиком функции μ^L, правая боковая сторона трапеции $\tilde{\mu}$ является графиком функции μ^R. Трапецоидальные нечеткие числа, для которых $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, могут быть отождествлены с действительными числами.

В общем случае нечеткое число $\tilde{\mu}$ также определяется двумя функциями μ^L и μ^R, но эти функции могут быть нелинейными. Единого определения, как проводить арифметические операции с нечеткими числами, не существует. Достаточно подробно этот вопрос представлен, например, в книге [Пегат, 2013]. В настоящей работе используются операции сложения нечетких чисел (результатом является нечеткое число), умножения нечеткого числа на неотрицательное действительное число (результатом является нечеткое число) и скалярного произведения нечетких чисел (результатом является действительное число). Сумма нечетких чисел $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$, обозначаемая $\tilde{\mu} + \tilde{\nu}$, определяется функциями $\mu^L(\eta) + \nu^L(\eta)$ и $\mu^R(\eta) + \nu^R(\eta)$. При $c \ge 0$ нечеткое число $c\tilde{\mu}$ определяется функциями $c\mu^L(\eta)$ и $c\mu^R(\eta)$ (иногда то же нечеткое число удобнее записывать в виде $\tilde{\mu}c$). Скалярное произведение нечетких чисел $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ определяется следующим образом:

$$\langle \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \rangle = \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\mu^L(\eta) + \mu^R(\eta)\right)\left(\nu^L(\eta) + \nu^R(\eta)\right) d\eta.$$

Через μ обозначается среднее значение нечеткого числа $\tilde{\mu}$,

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\mu^L(\eta) + \mu^R(\eta)\right) d\eta.$$

В литературе представлены различные определения нечетко-случайной величины. В настоящей работе используется определение из [Шведов, 2015; 2016]. В соответствии с этим определением нечетко-случайная величина – это прямое обобщение случайной величины, значениями нечетко-случайной величины являются нечеткие числа. Нечетко-случайная величина, как и случайная величина, является измеримой функцией.

Пример 2. Пусть $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$, $\tilde{\mu}_3$ – трапецоидальные нечеткие числа. Нечетко-случайная величина $\tilde{K}$ принимает значение $\tilde{\mu}_1$ с вероятностью p_1, значение $\tilde{\mu}_2$ – с вероятностью p_2, значение $\tilde{\mu}_3$ – с вероятностью p_3, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Определения нечеткого ожидания, ожидания, дисперсии нечетко-случайной величины, а также ковариации и скалярного произведения нечетко-случайных величин, используемые в настоящей работе, даются в [Шведов, 2015; 2016]. Отметим, что в литературе имеются и другие определения моментов нечетко-случайных величин.

Рассмотрим олигополию Курно, где n фирм производят однородный товар, но с неопределенной выработкой. Пусть x_i – объем выпуска, намеченный фирмой i; $K_i x_i$ – реальный объем выпуска фирмы i, где $x_1,\ldots,x_n$ – неотрицательные действительные числа; $K_1,\ldots,K_n$ – случайные величины. Предположим, что обратная функция спроса (функция цены) имеет вид

$$P = a - b\sum_{j=1}^{n} K_j x_j ,$$

где a и b – положительные числа. Тогда ожидаемая прибыль фирмы i

$$\pi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) = E\left(\left(a - b\sum_{j=1}^{n} K_j x_j\right) K_i x_i - C_i\left(x_i\right)\right),$$

где $C_i\left(x_i\right)$ – затраты фирмы i при намеченном объеме выпуска x_i. Предположим, что

$$C_i\left(x_i\right) = \left(K_i c_{1i} + c_{2i}\right) x_i ,$$

где c_{1i} и c_{2i} – неотрицательные числа. Если случайные величины $K_1,\ldots,K_n$ некоррелированные, то

$$(1)\quad \pi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \left(a - b\sum_{j=1}^{n} E\left(K_j\right) x_j\right) E\left(K_i\right) x_i - b\,Var\left(K_i\right) x_i^2 - \left(E\left(K_i\right) c_{1i} + c_{2i}\right) x_i .$$

Возможен и другой подход, когда реальный объем выпуска фирмы i имеет вид $\tilde{\mu}_i x_i$, где $\tilde{\mu}_1,\ldots,\tilde{\mu}_n$ – нечеткие числа. Экономический смысл и с реальными выпусками $K_i x_i$, и с реальными выпусками $\tilde{\mu}_i x_i$ один и тот же. Учет неопределенных факторов, которые могут привести к уменьшению или увеличению объема выпуска по сравнению с намеченным. В настоящей работе рассматривается модель, включающая в качестве частных случаев оба эти подхода, когда реальный объем выпуска фирмы i равняется $\tilde{K}_i x_i$, где $\tilde{K}_1,\ldots,\tilde{K}_n$ – нечетко-случайные величины. Предполагается, что $Cov\left(\tilde{K}_i, \tilde{K}_j\right) = 0$ при $i \neq j$.

Также предполагается, что все нечетко-случайные величины $\tilde{K}_1,\ldots,\tilde{K}_n$ имеют одно и то же нечеткое ожидание $\tilde{\mu}$ и одну и ту же дисперсию σ^2. Тогда вместо (1) ожидаемая прибыль фирмы i имеет вид

$$\pi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=aE\left(\tilde{K}_i\right)x_i-b\left\langle\sum_{j=1}^{n}\tilde{K}_jx_j,\tilde{K}_ix_i\right\rangle-\left(E\left(\tilde{K}_i\right)c_{1i}+c_{2i}\right)x_i. \tag{2}$$

Здесь $E\left(\tilde{K}_i\right)$ – ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{K}_i$, в данном случае $E\left(\tilde{K}_i\right)=\mu$, где μ – среднее значение нечеткого числа $\tilde{\mu}$. Через $\left\langle\tilde{K}_j,\tilde{K}_i\right\rangle$ обозначается скалярное произведение нечетко-случайных величин $\tilde{K}_j$ и $\tilde{K}_i$, аналог $E\left(K_jK_i\right)$. Имеет место формула (см.: [Шведов, 2015; 2016]):

$$Cov\left(\tilde{K}_i,\tilde{K}_j\right)=\left\langle\tilde{K}_i,\tilde{K}_j\right\rangle-\left\langle\tilde{\mu}_i,\tilde{\mu}_j\right\rangle,$$

где $\tilde{\mu}_i$ – нечеткое ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{K}_i$; $\tilde{\mu}_j$ – нечеткое ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{K}_j$; $\left\langle\tilde{\mu}_i,\tilde{\mu}_j\right\rangle$ – скалярное произведение нечетких чисел $\tilde{\mu}_i$ и $\tilde{\mu}_j$. В силу сделанного предположения $\tilde{\mu}_i=\tilde{\mu}$ при любом i. Для нечетко-случайных величин, как и для случайных величин, $Cov\left(\tilde{K}_i,\tilde{K}_i\right)=Var\left(\tilde{K}_i\right)$. Тогда из (2) следует, что ожидаемая прибыль фирмы i

$$\pi_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\left(a-c_i\right)\mu x_i-bs^2x_i\sum_{j=1}^{n}x_j-b\sigma^2x_i^2, \tag{3}$$

где $s^2=\left\langle\tilde{\mu},\tilde{\mu}\right\rangle$, $c_i=c_{1i}+\dfrac{c_{2i}}{\mu}$ при $i=1,\ldots,n$.

Пример 3. Пусть рассматривается трапецоидальное нечеткое число, и используются обозначения из примера 1. Положим $q=0,5\left(\beta+\gamma\right)$, $h=0,5\left(\alpha+\delta\right)$, середина верхнего и нижнего основания трапеции, соответственно. Нетрудно увидеть, что

$$\mu=\frac{h+q}{2},\ s^2=\frac{q^2+qh+h^2}{3}.$$

Отсюда

$$s^2=\mu^2+\frac{1}{3}\left(h-\mu\right)^2.$$

Таким образом, для равнобочной трапеции $s^2 = \mu^2$. И чем сильнее h отличается от μ (т.е. трапеция отличается от равнобочной), тем сильнее s^2 отличается от μ^2. Если условиться, что при заданных μ и s из всех трапеций $\tilde{\mu}$, для которых $\frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\mu$ и $\langle\tilde{\mu},\tilde{\mu}\rangle = s^2$, используются только трапеции с минимальной возможной длиной нижнего основания, то отношение $\frac{s}{\mu}$ может рассматриваться как показатель размытости нечеткого числа $\tilde{\mu}$. (В частности, условие $s=\mu$ означает, что трапеция $\tilde{\mu}$ вырождается в вертикальный отрезок $\{(\xi,\eta): \xi=\mu,\, 0\le\eta\le 1\}$.) Именно этот показатель неопределенности используется в настоящей работе, хотя это и не единственный возможный аналог дисперсии при переходе от вероятностных моделей к нечетким.

2. Равновесные объемы выпуска и прибыли

Предположим, что производственные возможности каждой фирмы не ограничены и что равновесие Курно достигается при положительных объемах выпуска для всех фирм. Тогда для равновесных объемов выпуска $x_1^*,\ldots,x_n^*$ должны выполняться соотношения

(4) $$\frac{\partial\pi_i}{\partial x_i}\left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)=0,\ i=1,\ldots,n.$$

В соответствии с (3) соотношения (4) принимают вид

(5) $$\left(a-c_i\right)\mu - bs^2\sum_{j=1}^{n}x_j^* - bs^2x_i^* - 2b\sigma^2x_i^* = 0,\ i=1,\ldots,n.$$

Если ввести обозначение $Q^*=\sum_{j=1}^{n}x_j^*$ и сложить уравнения (5), то получается следующее уравнение для Q^*:

$$b\left(s^2+2\sigma^2\right)Q^* = n\left(a-\overline{c}\right)\mu - nbs^2Q^*,$$

где $\overline{c}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}c_j$. Отсюда

$$Q^*=\frac{n\left(a-\overline{c}\right)\mu}{b\left(\left(n+1\right)s^2+2\sigma^2\right)}.$$

Подставляя это выражение для Q^* в (5), получаем

$$x_i^* = \frac{1}{b\left(s^2+2\sigma^2\right)}\left((a-c_i)\mu - bs^2Q^*\right) = \frac{\mu}{b\left(s^2+2\sigma^2\right)}\left((a-c_i) - \frac{n\left(a-\overline{c}\right)s^2}{(n+1)s^2+2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{\mu}{b\left(s^2+2\sigma^2\right)\left((n+1)s^2+2\sigma^2\right)}\left((a-c_i)\left((n+1)s^2+2\sigma^2\right) - n\left(a-\overline{c}\right)s^2\right).$$

Если ввести обозначение $\tau = \frac{\sigma}{s}$, то

$$x_i^* = \frac{\mu}{bs^2\left(1+2\tau^2\right)\left(n+1+2\tau^2\right)}\left((a-c_i)\left(n+1+2\tau^2\right) - n\left(a-\overline{c}\right)\right) =$$

$$= \frac{\mu}{bs^2\left(1+2\tau^2\right)\left(n+1+2\tau^2\right)}\left((a-\overline{c})\left(1+2\tau^2\right) + \left(\overline{c}-c_i\right)\left(n+1+2\tau^2\right)\right).$$

Таким образом,

$$x_i^* = \frac{(a-\overline{c})\mu}{bs^2\left(n+1+2\tau^2\right)} + \frac{(\overline{c}-c_i)\mu}{bs^2\left(1+2\tau^2\right)},\ i = 1,\dots,n. \qquad (6)$$

Формулы (6) показывают, что для моделей с нечетко-случайной выработкой имеет место тот же важный факт, что и для моделей без неопределенности. При увеличении числа фирм n разность $\left(\overline{c}-c_i\right)$ начинает играть более важную роль, чем разность $\left(a-\overline{c}\right)$. При $\mu = s = 1$, $\tau = 0$ формулы (6) совпадают с хорошо известными формулами для равновесных объемов выпусков для равновесия Курно без неопределенности. И в чисто вероятностной постановке ($\mu = s$, $\tau > 0$), и в чисто нечеткой постановке ($s > \mu$, $\tau = 0$) неопределенность приводит к уменьшению объемов выпусков.

Подставляя (6) в (3), нетрудно убедиться, что

$$\pi_i\left(x_1^*,\dots,x_n^*\right) = \frac{\mu^2\left(1+\tau^2\right)}{bs^2\left(n+1+2\tau^2\right)^2}\left(\left(a-\overline{c}\right) + \frac{n+1+2\tau^2}{1+2\tau^2}\left(\overline{c}-c_i\right)\right)^2,\ i = 1,\dots,n.$$

И для ожидаемой прибыли фирмы при увеличении числа фирм n разность $\left(\overline{c}-c_i\right)$ начинает играть более важную роль, чем разность $\left(a-\overline{c}\right)$.

В случае $c_1 = \ldots = c_n = c$ выражение для ожидаемой прибыли фирмы i упрощается

$$\pi_i\left(x_1^*,\dots,x_n^*\right) = \frac{\mu^2\left(a-c\right)^2\left(1+\tau^2\right)}{bs^2\left(n+1+2\tau^2\right)^2}. \qquad (7)$$

При $\mu = s = 1$, когда рассматривается чисто вероятностная модель, $\tau = \sigma$. Поэтому

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial \sigma}\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) = \frac{2(a-c)^2 \sigma\left(n-3-2\sigma^2\right)}{b\left(n+1+2\sigma^2\right)^3}.$$

Таким образом, при $n > 3$ имеет место неравенство $\frac{\partial \pi_i}{\partial \sigma}\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) > 0$ при $\sigma^2 < \frac{n-3}{2}$. Это означает, что ожидаемая прибыль фирмы увеличивается при увеличении дисперсии σ^2 от 0 до $\frac{n-3}{2}$, при дальнейшем увеличении дисперсии ожидаемая прибыль уменьшается. При $n \le 3$ этого нежелательного эффекта нет, ожидаемая прибыль фирмы всегда уменьшается при увеличении дисперсии σ^2.

Из (7) следует, что для чисто нечеткой модели ($\tau = 0$) данного нежелательного эффекта нет ни при каком числе фирм n. При увеличении неопределенности $\frac{s^2}{\mu^2}$ ожидаемая прибыль фирмы уменьшается.

3. Дуополия Курно при чрезмерной самоуверенности одной из фирм

Рассмотрим дуополию, где, как и в предыдущем разделе, x_i – объем выпуска, намеченный фирмой i; $K_i x_i$ – реальный объем выпуска фирмы i; K_i – случайная величина; $E(K_i) = \mu$, $i = 1, 2$. Однако фирма 1 является чрезмерно самоуверенной и считает, что ее реальный объем выпуска будет $L_1 x_1$, где $L_1 = r\mu + (1-r)K_1$; здесь r – некоторое действительное число, лежащее между 0 и 1. Чем больше r, тем больше чрезмерная самоуверенность фирмы 1. Разумеется, в реальности чрезмерная самоуверенность фирмы может проявляться не только в том, что фирма необоснованно точно прогнозирует свой объем выпуска. Но в настоящей работе рассматривается только такой вид чрезмерной самоуверенности. Тогда ожидаемая прибыль фирмы 1

$$\pi_1(x_1, x_2) = E\Big(\big(a - b(L_1 x_1 + \varphi K_2 x_2)\big)L_1 x_1 - C_1(x_1)\Big),$$

ожидаемая прибыль фирмы 2

$$\pi_2(x_1, x_2) = E\Big(\big(a - b(\varphi K_1 x_1 + K_2 x_2)\big)K_2 x_2 - C_2(x_2)\Big),$$

где $0 \le \varphi \le 1$; при $\varphi = 1$ товары, производимые фирмами, являются совершенными субститутами. Затраты $C_1(x_1) = (L_1 c_{11} + c_{21})x_1$, $C_2(x_2) = (K_2 c_{12} + c_{22})x_2$.

Рассмотрим более общую модель, где $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$ – нечетко-случайные величины, $E(\tilde{K}_i)=\mu$, $Var(\tilde{K}_i)=\sigma^2$, $i=1,2$; $Cov(\tilde{K}_1,\tilde{K}_2)=0$. Фирма 2 исходит из того, что ее реальный объем выпуска будет $\tilde{K}_2x_2$ при намеченном объеме выпуска x_2. Фирма 1 исходит из того, что ее реальный объем выпуска будет $\tilde{L}_1x_1$ при намеченном объеме выпуска x_1, где $\tilde{L}_1=r\mu+(1-r)\tilde{K}_1$. Тогда ожидаемая прибыль фирмы 1

$$\pi_1(x_1,x_2)=(a-c_1)\mu x_1-b\left\langle \tilde{L}_1x_1+\varphi\tilde{K}_2x_2,\tilde{L}_1x_1\right\rangle,$$

ожидаемая прибыль фирмы 2

$$\pi_2(x_1,x_2)=(a-c_2)\mu x_2-b\left\langle \varphi\tilde{K}_1x_1+\tilde{K}_2x_2,\tilde{K}_2x_2\right\rangle.$$

Величины c_1 и c_2 определены в разделе 1; также будем считать, что нечеткое число $\tilde{\mu}$ является нечетким ожиданием и нечетко-случайной величины $\tilde{K}_1$, и нечетко-случайной величины $\tilde{K}_2$; μ – среднее значение нечеткого числа $\tilde{\mu}$, $s^2=\langle\tilde{\mu},\tilde{\mu}\rangle$. Тогда

$$\left\langle \tilde{K}_i,\tilde{K}_i\right\rangle=Var(\tilde{K}_i)+s^2=\sigma^2+s^2,\ i=1,2,\ \left\langle \tilde{K}_1,\tilde{K}_2\right\rangle=s^2,$$

$$\left\langle \tilde{L}_1,\tilde{L}_1\right\rangle=\left\langle r\mu+(1-r)\tilde{K}_1,r\mu+(1-r)\tilde{K}_1\right\rangle=$$

$$=r^2\mu^2+2r\mu(1-r)E(\tilde{K}_1)+(1-r)^2\left\langle \tilde{K}_1,\tilde{K}_1\right\rangle=\mu^2+(1-r)^2\left(\sigma^2+s^2-\mu^2\right),$$

$$\left\langle \tilde{K}_2,\tilde{L}_1\right\rangle=\left\langle \tilde{K}_2,r\mu+(1-r)\tilde{K}_1\right\rangle=r\mu E(\tilde{K}_2)+(1-r)\left\langle \tilde{K}_2,\tilde{K}_1\right\rangle=r\mu^2+(1-r)s^2.$$

Если ввести обозначения

$$N_1=\frac{a-c_1}{b},\ N_2=\frac{a-c_2}{b},$$

то ожидаемая прибыль фирмы 1

$$\pi_1(x_1,x_2)=b\Big(\mu N_1x_1-\Big(\mu^2+(1-r)^2\left(\sigma^2+s^2-\mu^2\right)\Big)x_1^2-\varphi\left(r\mu^2+(1-r)s^2\right)x_1x_2\Big),$$

ожидаемая прибыль фирмы 2

$$\pi_2(x_1,x_2)=b\Big(\mu N_2x_2-\left(\sigma^2+s^2\right)x_2^2-\varphi s^2x_1x_2\Big).$$

Условия первого порядка после введения обозначений

$$\alpha_{11}=\frac{2}{\mu}\Big(\mu^2+(1-r)^2\left(\sigma^2+s^2-\mu^2\right)\Big),$$

$$\alpha_{12} = \frac{\varphi}{\mu}\left(r\mu^2 + (1-r)s^2\right),\ \alpha_{21} = \frac{\varphi}{\mu}s^2,\ \alpha_{22} = \frac{2}{\mu}\left(\sigma^2 + s^2\right)$$

принимают вид

$$\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 = N_1,\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 = N_2.$$

Предположим, что $D = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$. Тогда по правилу Крамера решение приведенной системы линейных уравнений имеет вид $x_1^* = \frac{D_1}{D}$, $x_2^* = \frac{D_2}{D}$, где $D_1 = N_1\alpha_{22} - N_2\alpha_{12}$, $D_2 = N_2\alpha_{11} - N_1\alpha_{21}$.

Будем предполагать, что выполняются условия, при которых обе фирмы остаются на рынке, т.е. $x_1^* > 0$, $x_2^* > 0$. (И не будем в явном виде выписывать условия на N_1 и N_2, при которых это предположение верно.) Нетрудно увидеть, что выражения для ожидаемых прибылей

$$\pi_1\left(x_1^*, x_2^*\right) = b\mu x_1^*\left(N_1 - \frac{\alpha_{11}}{2}x_1^* - \alpha_{12}x_2^*\right),\ \pi_2\left(x_1^*, x_2^*\right) = b\mu x_2^*\left(N_2 - \alpha_{21}x_1^* - \frac{\alpha_{22}}{2}x_2^*\right)$$

упрощаются и принимают вид

$$\pi_1\left(x_1^*, x_2^*\right) = b\mu\frac{\alpha_{11}}{2}\frac{D_1^2}{D^2},\ \pi_2\left(x_1^*, x_2^*\right) = b\mu\frac{\alpha_{22}}{2}\frac{D_2^2}{D^2}.$$

Пример 4. Приводятся результаты расчетов при $\varphi = 1$, $a = 60$, $b = 1$, $c_1 = c_2 = 30$, $\mu = 1$, $\sigma^2 = 0{,}04$, $s^2 = 1{,}03$. При $r = 0{,}2$ получены значения $x_1^* = 9{,}798$, $x_2^* = 9{,}303$, $\pi_1\left(x_1^*, x_2^*\right) = 100{,}302$, $\pi_2\left(x_1^*, x_2^*\right) = 92{,}601$. При $r = 0{,}8$ получены значения $x_1^* = 10{,}449$, $x_2^* = 8{,}989$, $\pi_1\left(x_1^*, x_2^*\right) = 109{,}488$, $\pi_2\left(x_1^*, x_2^*\right) = 86{,}468$.

Заключение

В работе [Deo, Corbett, 2009] модели со случайной выработкой применяются для изучения рынка вакцин против гриппа в США. В исследовании [Pu et al., 2017] в качестве примера дается рынок молочной продукции в Китае. Неопределенные будущие урожаи и другие риски, приводящие к неизвестной выработке при сельскохозяйственном производстве, изучаются в работе [Kazaz, 2004]. Обзор других экономических задач, для которых нужны модели с неопределенной выработкой, дается в статье [Yano, Lee, 1995].

В настоящей работе начато изучение олигополии Курно при нечеткой и при нечетко-случайной выработке. Показаны преимущества такого подхода по сравнению с моделями со случайной выработкой. Изучается эффект чрезмерной самоуверенности при конкуренции по Курно. Полученные результаты вместе с результатами из работ [Liang et al., 2008; Dang et al., 2010; Feng et al., 2023; Tan et al., 2018] приводят к появлению большого числа новых интересных задач, связанных с применением теории нечетких множеств к олигополии Курно.

* *
*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Джейли Дж. А., Рени Ф. Дж. Микроэкономика. Продвинутый уровень. М.: ИД ГУ ВШЭ, 2011.

Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.

Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.

Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.

Шведов А.С. К анализу нечетко-случайных временных рядов: Препринт WP2/2015/01. М.: НИУ ВШЭ, 2015.

Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121–138.

Dang J.-F., Hong I-H. The Cournot Game under a Fuzzy Decision Environment // Computers and Mathematics with Applications. 2010. Vol. 59. P. 3099–3109.

Deo S., Corbett C.J. Cournot Competition under Yield Uncertainty: The Case of the U.S. Influenza Vaccine Market // Manufacturing and Service Operations Management. 2009. Vol. 11. P. 563–576.

Dixit A., Stern N. Oligopoly and Welfare: A Unified Presentation with Applications to Trade and Development // European Economic Review. 1982. Vol. 19. P. 123–143.

Feng Z., Ma Y., Yang Y. Credibilistic Cournot Game with Risk Aversion under a Fuzzy Decision Environment // Mathematics. 2023. 11. 1029.

Jansen M.C., Özaltin O.Y. Optimal Production in a Competitive Market under Yield Uncertainty // Optimization Letters. 2018. Vol. 12. P. 1487–1502.

Kazaz B. Production Planning under Yield and Demand Uncertainty with Yield-Dependent Cost and Price // Manufacturing and Service Operations Management. 2004. Vol. 6. P. 209–224.

Liang G.-S., Lin L.-Y., Liu C.-F. The Optimum Output Quantity of a Duopoly Market under a Fuzzy Decision Environment // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. P. 1176–1187.

Ponssard J.-P. The Strategic Role of Information on the Demand Function in an Oligopolistic Market // Management Science. 1979. Vol. 25. P. 243–250.

Pu X., Jin D., Han G. Effect of Overconfidence on Cournot Competition in the Presence of Yield Uncertainty // Managerial and Decision Economics. 2017. Vol. 38. P. 382–393.

Sakai Y., Yamato T. Oligopoly, Information and Welfare // Journal of Economics. 1989. Vol. 49. P. 3–24.

Shapiro C. Exchange of Cost Information in Oligopoly // Review of Economic Studies. 1986. Vol. 53. P. 433–446.

Tan C., Liu Z., Wu D.D., Chen X. Cournot Game with Incomplete Information Based on Rank-Dependent Utility Theory under a Fuzzy Environment // International Journal of Production Research. 2018. Vol. 56. P. 1789–1805.

Yan X., Wang Y., Hong Z. Comparizon of Cournot and Bertrand Competitions under Random Yield // International Journal of Production Research. 2016. Vol. 54. P. 3256–3276.

Yano C.A., Lee H.L. Lot Sizing with Random Yields: A review // Operations Research. 1995. Vol. 43. P. 311–334.

Zadeh L.A. Fuzzy Sets // Information and Control. 1965. Vol. 8. P. 338–353.

Cournot Equilibrium under Fuzzy Random Yield

Alexey Shvedov

National Research University Higher School of Economics,
20, Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation.
E-mail: ashvedov@hse.ru

Cournot duopoly with yield uncertainty is of interest both from a theoretical standpoint and a practical standpoint. In many sectors of economy, the actual products produced and the targeted quantities do not coincide. Commonly, random variables are used to model yield uncertainty. However, the models with random yields have a known drawback. When the number of firms greater than three, the expected firm's profit first increases when level of uncertainty (i.e., variance of a random variable) increases and then decreases. When the number of firms no greater than three, there is no that drawback, the expected firm's profit always decreases when level of uncertainty increases. In this paper, fuzzy sets are used for the first time to model Cournot competition in the presence of yield uncertainty. This article deals both with Cournot oligopoly with fuzzy yields and Cournot oligopoly with fuzzy random yields. In the fuzzy random approach, probabilistic methods and fuzzy methods are combined. In this paper, equilibrium quantities and expected firms' profits are found. For models with fuzzy yield, the drawback mentioned above is absent. For any number of firms, expected profit of a firm decreases when level of uncertainty increases. Also, in the fuzzy random approach, Cournot duopoly in which one firm is overconfident is studied. That firm forecasts the quantity produced unreasonably accurately. For this case, equilibrium quantities and expected firms' profits are also presented in the paper.

***Key words*:** Cournot competition; oligopoly; equilibrium quantity; yield uncertainty; overconfidence; fuzzy set; fuzzy random variable.

JEL Classification: D43, L13.

* *
*

References

Dang J.-F., Hong I-H. (2010) The Cournot Game under a Fuzzy Decision Environment. *Computers and Mathematics with Applications,* 59, pp. 3099–3109.

Deo S., Corbett C.J. (2009) Cournot Competition under Yield Uncertainty: The Case of the U.S. Influenza Vaccine Market. *Manufacturing and Service Operations Management*, 11, pp. 563–576.

Dixit A., Stern N. (1982) Oligopoly and Welfare: A Unified Presentation with Applications to Trade and Development. *European Economic Review*, 19, pp. 123–143.

Feng Z., Ma Y., Yang Y. (2023) Credibilistic Cournot Game with Risk Aversion under a Fuzzy Decision Environment. *Mathematics*, 11, 1029.

Jansen M.C., Özaltin O.Y. (2018) Optimal Production in a Competitive Market under Yield Uncertainty. *Optimization Letters,* 12, pp. 1487–1502.

Jehle G.A., Reny P.J. (2011) *Advanced Microeconomic Theory*. Moscow: Publishing House of the National Research University Higher School of Economics. (In Russ.)

Kazaz B. (2004) Production Planning under Yield and Demand Uncertainty with Yield-Dependent Cost and Price. *Manufacturing and Service Operations Management*, 6, pp. 209–224.

Liang G.-S., Lin L.-Y., Liu C.-F. (2008) The Optimum Output Quantity of a Duopoly Market under a Fuzzy Decision Environment. *Computers and Mathematics with Applications*, 56, pp. 1176–1187.

Liu B. (2012) *Theory and Practice of Uncertain Programming*. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii. (In Russ.)

Moulin H. (1985) *Game Theory with Examples from Mathematical Economics*. Moscow: Mir. (In Russ.)

Piegat A. (2013) *Fuzzy Modeling and Control*. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii. (In Russ.)

Ponssard J.-P. (1979) The Strategic Role of Information on the Demand Function in an Oligopolistic Market. *Management Science*, 25, pp. 243–250.

Pu X., Jin D., Han G. (2017) Effect of Overconfidence on Cournot Competition in the Presence of Yield Uncertainty. *Managerial and Decision Economics*, 38, pp. 382–393.

Sakai Y., Yamato T. (1989) Oligopoly, Information and Welfare. *Journal of Economics*, 49, pp. 3–24.

Shapiro C. (1986) Exchange of Cost Information in Oligopoly. *Review of Economic Studies,* 53, pp. 433–446.

Shvedov A.S. (2015) *On Fuzzy Random Time Series Models*. Working Paper WP2/2015/01. Moscow: Publishing House of the National Research University Higher School of Economics. (In Russ.)

Shvedov A.S. (2016) Estimating the Means and the Covariances of Fuzzy Random Variables. *Applied Econometrics*, 42, pp. 121–138. (In Russ.)

Tan C., Liu Z., Wu D.D., Chen X. (2018) Cournot Game with Incomplete Information Based on Rank-Dependent Utility Theory under a Fuzzy Environment. *International Journal of Production Research*, 56, pp. 1789–1805.

Yan X., Wang Y., Hong Z. (2016) Comparizon of Cournot and Bertrand Competitions under Random Yield. *International Journal of Production Research*, 54, pp. 3256–3276.

Yano C.A., Lee H.L. (1995) Lot Sizing with Random Yields: A review. *Operations Research*, 43, pp. 311–334.

Zadeh L.A. (1965) Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8, pp. 338–353.